УДК 621.396:51-74 DOI: 10.20535/2523-4455.2019.24.1.158203

# Лінійні структури коваріаційної функції узагальнених бінарних послідовностей Баркера непарної довжини

Голубничий О. Г., к.т.н. доц., ORCID 0000-0001-5101-3862
e-mail a.holubnychyi@nau.edu.ua
Національний авіаційний університет nau.edu.ua
Київ, Україна

***Анотація*—Представлено повний математичний опис коваріаційних функцій (КФ) узагальнених бінарних послідовностей Баркера з непарним значенням їх довжини на основі структуризації цих КФ їх лінійними компонентами. Показано, що структурованість КФ цих послідовностей полягає в тому, що їх КФ може бути представлена певною кількістю лінійних та вироджених структур у вигляді окремих точок КФ. Кількість таких структур для будь-якої непарної довжини послідовності не перевищує семи, з яких не більше трьох є лінійними структурами та не більше чотирьох – окремими точками КФ. Теоретичне значення отриманих результатів полягає в отриманні додаткової ознаки "узагальненості" узагальнених бінарних послідовностей Баркера, а саме структурованості їх КФ на основі лінійних структур. Отримані результати дають змогу здійснювати опис сигнально-кодових конструкцій з використанням лінійних складових після узгодженої фільтрації сигналів на основі узагальнених бінарних послідовностей Баркера непарної довжини.**

**Бібл. 10, рис. 3, табл. 3.**

***Ключові слова — узагальнені бінарні послідовності Баркера; коваріаційна функція; кореляційні властивості; структуризація; лінійні структури; вироджені структури.***

## I. Вступ

Сукупність математичних моделей, які представляють собою правила кодування (синтезу) узагальнених бінарних послідовностей Баркера, були запропоновані у [1]. Послідовності, які можуть бути синтезовані в рамках вищезазначених математичних моделей, узагальнюють структурні особливості відомих бінарних послідовностей Баркера [2] та мають такі ж характерні структурні і, як наслідок, кореляційні особливості.

На відміну від відомих бінарних послідовностей Баркера, які на сьогоднішній день відомі для значень довжин $N = 3; 4; 5; 7; 11; 13$ (а також $N = 2$ як окремий тривіальний випадок) та широко використовуються у радіолокаційних та інших радіоелектронних системах, узагальнені бінарні послідовності Баркера можуть бути синтезовані для значень довжин $N = 4k–1; 4k; 4k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, і містять усі відомі бінарні послідовності Баркера як частинні випадки [1].

Процеси, які відповідають досліджуваним у цій статті послідовностям, не є центрованими, тому аналізу підлягатиме їх коваріаційна функція (КФ).

У загальному випадку КФ кожної окремо взятої узагальненої бінарної послідовності Баркера характеризується великим рівнем бічних пелюсток, що унеможливлює їх практичне використання у, наприклад, радіолокаційних системах зі складними зондувальними сигналами з великими значеннями бази сигналу. Однак такі послідовності дозволяють отримувати системи мультиплікативно комплементарних сигнально-кодових конструкцій, які мають низький, характерний для класичних бінарних послідовностей Баркера, максимальний рівень бічних пелюсток результуючого сигналу на виході системи обробки сигналів на основі узгодженої фільтрації складових та їх подальшого перемноження [3], що робить їх аналогом відомих адитивно комплементарних кодів Голея [4, 5].

Проблематика цієї статті присвячена питанням особливостей математичного опису та аналізу КФ узагальнених бінарних послідовностей Баркера непарної довжини $N$, тобто $N = 4k–1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, а також $N = 4k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, які відповідно до класифікації [1] є узагальненими бінарними послідовностями Баркера типу 2 та типу 3 відповідно.

## II. Аналіз літературних даних і постановка проблеми у загальному вигляді

Питанням синтезу бінарних послідовностей та дослідженню їх властивостей, зокрема КФ, присвячена значна кількість публікацій. Наприклад, на сьогоднішній день одним з актуальних напрямів досліджень у області синтезу різних типів послідовностей та сигнально-кодових конструкцій є напрям, у якому акцент робиться саме на особливостях структур їх

КФ, наприклад рекурентності КФ [6], або врахуванні комплексних значень бічних пелюсток КФ за квадратом їх модуля у так званому інтегрованому рівні бічних пелюсток КФ (Integrated Side Lobe, ISL), що обумовлюється використанням комплексних значень елементів сигнально-кодових конструкцій, КФ яких досліджується [7].

Результати попередніх досліджень, які безпосередньо розвиває ця стаття, опубліковані у [1], де описані правила кодування (синтезу) узагальнених бінарних послідовностей Баркера, у [3], де розглядаються мультиплікативно комплементарні сигнально-кодові конструкції на їх основі, та у [8], де викладені результати, що дозволяють сформувати припущення щодо існування комбінацій лінійних структур, з яких складається КФ будь-якої узагальненої бінарної послідовності Баркера. У даній статті саме наводиться розв'язання наукової задачі, яка полягає у підтвердженні та перевірці цього припущення, щоправда лише для непарних значень довжин послідовностей розглянутого типу, оскільки повне узагальнення цього припущення для усіх можливих значень довжин, включаючи парні, є окремою більш складною науковою задачею.

Наявність у математичному описі КФ комбінацій лінійних структур дозволила б спростити математичний аналіз та процеси моделювання сигналів на виході систем обробки сигналів на основі узгодженої фільтрації [9], які є одними з основних систем обробки (разом з кореляторами) складних (широкосмугових) сигналів з великими значеннями бази сигналу, відгук яких на дію на вході узгодженого з ними сигналу відтворює за формою КФ цього сигналу на виході [10].

## III. Мета і завдання дослідження

Метою дослідження, яке представлено у цій статті, є формалізація системи повних математичних описів КФ узагальнених бінарних послідовностей Баркера довільної можливої непарної довжини з використанням лінійних структур, які входять до складу КФ цього типу послідовностей.

Враховуючи те, що узагальнені бінарні послідовності Баркера непарної довжини можуть належати різним типам і підтипам [1], завдання дослідження полягають у аналізі та математичному описі КФ узагальнених бінарних послідовностей Баркера типу 2 та типу 3, останній з яких у свою чергу містить підтип A та підтип B.

## IV. Виділення лінійних структур КФ узагальнених бінарних послідовностей Баркера непарної довжини та синтез математичного опису КФ на їх основі

### *A. Лінійні структури КФ та математичний опис КФ з їх використанням для узагальнених бінарних послідовностей Баркера типу 2*

Узагальнені бінарні послідовності Баркера типу 2 мають непарне значення довжини $N = 4k - 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Правило кодування для синтезу елементів цих послідовностей $\mathbf{X} = \{x_i\}$, $i = \overline{1, N}$, наведено у (1) [1].

$$x_i = \begin{cases} -1, & i = 1, \\ (-1)^{S^{(1)}}, & i = 2S^{(1)} + 1, \\ (-1)^{S^{(2)}} x_{2S^{(2)}-1}, & i = 2S^{(2)}, \\ x_{2S^{(1)}}, & i = N + 1 - 2S^{(1)}, \\ -x_{2S^{(1)}+1}, & i = N - 2S^{(1)}, \\ -x_1, & i = N, \\ S^{(1)}\Big|_{N \ge 7} = \overline{1, \left(\dfrac{N+1}{4} - 1\right)}, & \\ S^{(2)} = \overline{1, \left(\dfrac{N+1}{4}\right)}. & \end{cases} \quad (1)$$

Правило кодування (1) містить гіперпараметр $\mathbf{S} = \{S^{(1)}, S^{(2)}\}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{Z}_+$, який використовується для визначення номерів та значень елементів послідовності при синтезі її структури.

Розглянемо структуру КФ послідовності $\mathbf{X}$ = {-1, 1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1}, яка має довжину $N = 31$ та є синтезованою за правилом кодування (1). КФ цієї послідовності $R(\tau) = \sum_{m=1+\tau}^{N} x_m x_{m-\tau}$, $\tau = \overline{0, N-1}$, з її виокремленими структурами показано на рис. 1.

Принцип виокремлення структур КФ на рис. 1 полягає у тому, щоб у першу чергу виділити лінійні структури типу $R(\tau) = a\tau + b$, в тому числі такі, при яких $a = 0$ та/або $b = 0$, а потім як частинні випадки врахувати в якості окремих вироджених структур точки КФ, які залишились після виділення явних лінійних структур КФ.

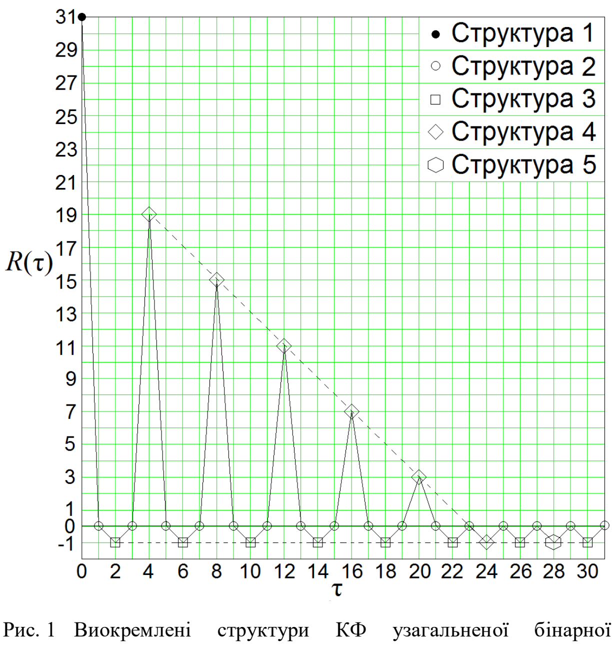


Рис. 1 Виокремлені структури КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера типу 2 довжини $N = 31$.

Таблиця 1 Структури КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера типу 2 при $N = 31$

| Структури **J** | $R(\tau\|\tau^{(j)})$ |
|---|---|
| $j = 1$ | $R(\tau\|\tau = 0) = N = 31$ |
| $j = 2$ | $R(\tau\|\tau = 1+2Q^{(1)}, Q^{(1)} \in [0,15]) = 0$ |
| $j = 3$ | $R(\tau\|\tau = 2+4Q^{(2)}, Q^{(2)} \in [0,7]) = -1$ |
| $j = 4$ | $R(\tau\|\tau = 4(Q^{(3)}+1), Q^{(3)} \in [0,5]) = -\tau+23$ |
| $j = 5$ | $R(\tau\|\tau = N-3 = 28) = -1$ |

Слід зазначити, що яка-небудь узагальнена алгоритмічна процедура виокремлення таких лінійних структур для загального випадку, тобто для довільної форми КФ будь-якого типу послідовностей, невідома. Окрім того, КФ деяких послідовностей може містити більш складні структури, ніж лінійні, наприклад спадні експоненціальні залежності, періодичні структури тощо. У випадку достатньо складної форми КФ виділення лінійних структур та їх узагальнення може характеризуватися значною комбінаторною складністю при аналізі структур КФ.

На відміну від більш складних можливих форм КФ, на рис. 1 показана КФ, лінійні структури якої спостерігаються практично в явному вигляді і тому їх виділення не викликає суттєвих труднощів.

У табл. 1 охарактеризовані виокремлені структури КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера типу 2 при $N = 31$, які зображені на рис. 1.

У табл. 1 серед п'яти виокремлених структур 4-а має вигляд $R(\tau) = a\tau + b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), 2-а та 3-я мають вигляд $R(\tau) = b$ (зокрема $b = 0$ для 2-ї структури), а 1-а та 5-а складові є виродженими структурами та являють собою окремі точки КФ, які залишились після виділення лінійних структур.

Повний математичний опис КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера типу 2 при $N = 31$, який складається з трьох лінійних структур та двох окремих точок КФ, представлено у (2).

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \bigcup_{j\in\mathbf{J}} R\left(\tau \mid \tau^{(j)}\right) = \\ &= \{N \mid \tau = 0\} \cup \{0 \mid \tau = 1 + 2Q^{(1)},\ Q^{(1)} \in [0,15]\} \cup \\ &\cup \{-1 \mid \tau = 2 + 4Q^{(2)},\ Q^{(2)} \in [0,7] \ \vee\ \tau = N-3\} \cup \\ &\cup \{-\tau + 23 \mid \tau = 4\left(Q^{(3)} + 1\right),\ Q^{(3)} \in [0,5]\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Табл. 1 та математичний опис КФ (2) містять гіперпараметр $\mathbf{Q} = \{Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}\}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{N}_0$, який використовується для опису лінійних складових.

Використовуючи таку ж методологічну схему "синтез через аналіз" та узагальнення отриманих при цьому результатів, можна синтезувати математичний опис КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера типу 2 будь-якої можливої довжини $N$, яка формується шляхом використання правила кодування (1). Такий узагальнений математичний опис КФ на основі її виокремлених лінійних структур для будь-якої бінарної послідовності Баркера типу 2 наведено у (3).

$$\begin{aligned} R(\tau) = \bigcup_{j\in\mathbf{J}} R\left(\tau \mid \tau^{(j)}\right) &= \{N \mid \tau = 0\} \cup \{0 \mid \tau = 1 + 2Q^{(1)},\ Q^{(1)} \in [0,(N-1)/2]\} \cup \\ &\cup \{-1 \mid \tau = 2 + 4Q^{(2)},\ Q^{(2)} \in [0,(N-3)/4] \ \vee\ \tau = N-3,\ N \geq 7 \ \vee\ \tau = N-7,\ N \geq 11\} \cup \\ &\cup \{N - 12 \mid \tau = 4,\ N \geq 15\} \cup \{-\tau + N - 8 \mid \tau = 4\left(Q^{(3)} + 1\right),\ Q^{(3)} \in [1,(N-15)/4],\ N \geq 19\}, \\ &\mathbf{Q} \in \mathbb{N}_0,\ \mathbf{Q} = \{Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Узагальнений математичний вираз (3) має більш складний набір лінійних та вироджених структур при $N = 31$ у порівнянні з виразом (2) через необхідність врахування у (3) частинних випадків при відносно малих значеннях $N$ ($N < 19$), коли спостерігається виродження явних лінійних структур. У цьому випадку лінійні структури утворюватимуть спочатку окремі точки КФ, а при ще менших значеннях $N$ зникають, що і було враховано при синтезі узагальненого математичного виразу КФ для будь-якої можливої довжини узагальненої бінарної послідовності Баркера типу 2. З цього також випливає висновок про те, що можуть існувати різні набори структур, якими можна описати КФ, і в більш узагальнених структурах можливе інше структурування точок КФ та їх приналежність до різних структур з метою врахування частинних випадків, або отримання більш компактного узагальненого математичного виразу для КФ. Це визначає нетривіальний та комбінаторний характер задачі представлення КФ сукупністю структур певної форми. Так, при $N = 31$ з (3) можна отримати (4) і далі (2) шляхом аналізу і включення двох структур з (4), а саме $\{-1|\tau = N-7\}$ та $\{N-12|\tau = 4\}$, до складу однієї структури $\{-\tau+N-8|\tau = 4(Q^{(3)}+1)\}$ з розширенням області значень $Q^{(3)}$: $Q^{(3)} \in [0,5]$.

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \bigcup_{j\in\mathbf{J}} R\left(\tau \mid \tau^{(j)}\right) = \{N \mid \tau = 0\} \cup \\ &\cup \{0 \mid \tau = 1 + 2Q^{(1)},\ Q^{(1)} \in [0,15]\} \cup \\ &\cup \{-1 \mid \tau = 2 + 4Q^{(2)},\ Q^{(2)} \in [0,7] \ \vee \\ &\vee\ \tau = N-3 \ \vee\ \tau = N-7\} \cup \\ &\cup \{N - 12 \mid \tau = 4\} \cup \\ &\cup \{-\tau + N - 8 \mid \tau = 4\left(Q^{(3)} + 1\right),\ Q^{(3)} \in [1,4]\}, \\ &\mathbf{Q} \in \mathbb{N}_0,\ \mathbf{Q} = \{Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Зазначимо, що узагальнений математичний вираз (3) для КФ будь-якої узагальненої бінарної послідовності Баркера типу 2 містить сім структур, з яких одна має вигляд $R(\tau)=a\tau+b$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$), дві – вигляд $R(\tau)=b$ (зокрема $b = 0$), та чотири є окремими точками КФ.

*B. Лінійні структури КФ та математичний опис КФ з їх використанням для узагальнених бінарних послідовностей Баркера підтипу A типу 3*

Узагальнені бінарні послідовності Баркера типу 3 мають непарне значення довжини $N = 4k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Особливістю цього типу є те, що він поділяється на два підтипи (A та B) [1], що визначатиме особливості структур як самих послідовностей, так і їх КФ.

Розглянемо процес виокремлення лінійних структур КФ узагальнених бінарних послідовностей Баркера типу 3 для підтипу A та підтипу B окремо.

Правило кодування для синтезу елементів послідовності підтипу A типу 3 $\mathbf{X} = \{x_i\}$, $i=\overline{1,N}$, наведено у (5) [1].

$$x_i=\begin{cases}-1, & i=1,\ 2S+1,\ \dfrac{N+1}{2},\ \dfrac{N+3}{2},\ N,\\ -x_{2S-1}, & i=2S,\\ 1, & i=\dfrac{N-1}{2},\\ -x_{2S}, & i=N+1-2S,\\ x_{2S+1}, & i=N-2S,\\ S\big|_{N\geq 9}=\overline{1,\left(\dfrac{N-5}{4}\right)}. \end{cases} \quad (5)$$

Правило кодування (5) містить параметр $S \in \mathbb{Z}_+$, який є аналогічним гіперпараметру $\mathbf{S}$ у (1) та використовується для визначення номерів та значень елементів послідовності при синтезі її структури.

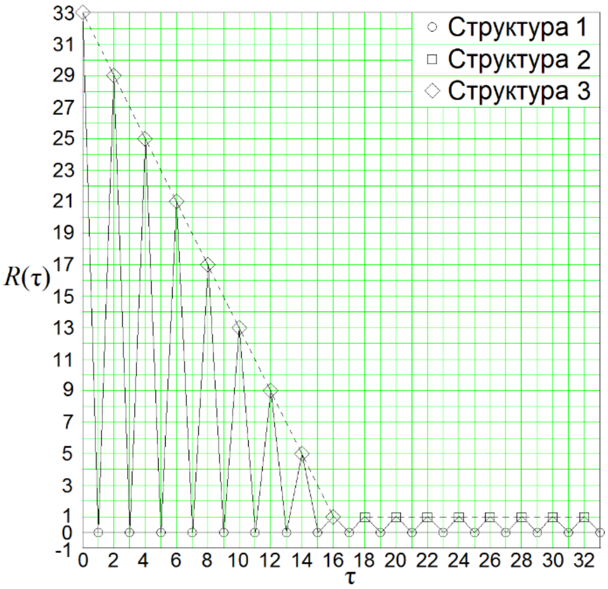


Рис. 2 Виокремлені структури КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу A типу 3 довжини $N = 33$.

ТАБЛИЦЯ 2 СТРУКТУРИ КФ УЗАГАЛЬНЕНОЇ БІНАРНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ БАРКЕРА ПІДТИПУ A ТИПУ 3 ПРИ $N = 33$

| Структури **J** | $R(\tau\vert\tau^{(j)})$ |
|---|---|
| $j = 1$ | $R(\tau\vert\tau = 1+2Q^{(1)}, Q^{(1)} \in [0,16]) = 0$ |
| $j = 2$ | $R(\tau\vert\tau = 16+2Q^{(2)}, Q^{(2)} \in [1,8]) = 1$ |
| $j = 3$ | $R(\tau\vert\tau = 2Q^{(3)}, Q^{(3)} \in [0,8]) = -2\tau+33$ |

Розглянемо структуру КФ послідовності $\mathbf{X}$ = {-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1}, яка має довжину $N = 33$ та є синтезованою за правилом кодування (5). КФ цієї послідовності з її виокремленими структурами показано на рис. 2.

КФ, яка показана на рис. 2, повністю складається з лінійних структур та не містить, на відміну від послідовностей типу 2, вироджених структур у вигляді окремих точок КФ.

У табл. 2 охарактеризовані виокремлені структури КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу A типу 3 при $N = 33$, які зображені на рис. 2.

У табл. 2 серед трьох виокремлених структур 3-я має вигляд $R(\tau)=a\tau+b$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$), а 1-а та 2-а мають вигляд $R(\tau)=b$ (зокрема $b = 0$ для 1-ї структури).

Повний математичний опис КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу A типу 3 при $N = 33$, який складається з лінійних структур, представлено у (6).

$$\begin{aligned}R(\tau)&=\bigcup_{j\in\mathbf{J}}R\left(\tau\mid\tau^{(j)}\right)=\\&=\{0\mid\tau=1+2Q^{(1)},\ Q^{(1)}\in[0,16]\}\cup\\&\cup\{1\mid\tau=16+2Q^{(2)},\ Q^{(2)}\in[1,8]\}\cup\\&\cup\{-2\tau+33\mid\tau=2Q^{(3)},\ Q^{(3)}\in[0,8]\}.\end{aligned}\quad(6)$$

Табл. 2 та математичний опис КФ (6) містять гіперпараметр $\mathbf{Q} = \{Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}\}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{N}_0$, який використовується для опису лінійних складових.

За аналогією з синтезом узагальненого математичного виразу для КФ (3), узагальнюючи (6) для випадку будь-якої можливої довжини $N$ узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу A типу 3, яка формується шляхом використання правила кодування (5), отримуємо вираз (7).

$$\begin{aligned}R(\tau)&=\bigcup_{j\in\mathbf{J}}R\left(\tau\mid\tau^{(j)}\right)=\\&=\{0\mid\tau=1+2Q^{(1)},\ Q^{(1)}\in[0,(N-1)/2]\}\cup\\&\cup\{1\mid\tau=[(N-1)/2]+2Q^{(2)},\ Q^{(2)}\in[1,(N-1)/4]\}\cup\\&\cup\{-2\tau+N\mid\tau=2Q^{(3)},\ Q^{(3)}\in[0,(N-1)/4]\},\\&\mathbf{Q}\in\mathbb{N}_0,\ \mathbf{Q}=\{Q^{(1)},Q^{(2)},Q^{(3)}\}.\end{aligned}\quad(7)$$

Особливістю узагальненого математичного виразу (7) для КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу A типу 3 є те, що він не містить, на відміну від подібного узагальненого виразу (3) для послідовностей типу 2, вироджених структур у вигляді окремих точок КФ, а також відсутністю частинних випадків при відносно малих значеннях $N$, при яких спостерігалося б таке виродження явних лінійних структур, яке необхідно було б враховувати у (7) як частинні випадки.

Зазначимо, що узагальнений математичний вираз (7) для КФ будь-якої узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу A типу 3 містить три структури, з яких одна має вигляд $R(\tau)=a\tau+b$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$), а дві – вигляд $R(\tau)=b$ ($b = 0$ та $b = 1$).

### *C. Лінійні структури КФ та математичний опис КФ з їх використанням для узагальнених бінарних послідовностей Баркера підтипу B типу 3*

Правило кодування для синтезу елементів послідовності підтипу B типу 3 $\mathbf{X} = \{x_i\}$, $i=\overline{1,N}$, наведено у (8) [1].

$$x_i=\begin{cases}-1, & i=1,\ 2S+1,\ \dfrac{N-1}{2},N,\\ -x_{2S-1}, & i=2S,\\ 1, & i=\dfrac{N+1}{2},\ \dfrac{N+3}{2},\\ -x_{2S}, & i=N+1-2S,\\ x_{2S+1}, & i=N-2S,\\ S\big|_{N\geq 9}=\overline{1,\left(\dfrac{N-5}{4}\right)}. \end{cases} \quad (8)$$

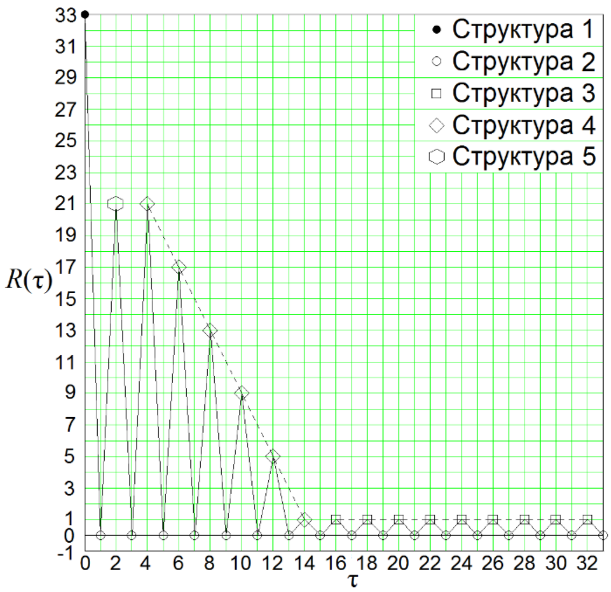


Рис. 3 Виокремлені структури КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу B типу 3 довжини $N = 33$.

Таблиця 3 Структури КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу B типу 3 при $N = 33$

| Структури **J** | $R(\tau\vert\tau^{(j)})$ |
|---|---|
| $j = 1$ | $R(\tau\vert\tau = 0) = N = 33$ |
| $j = 2$ | $R(\tau\vert\tau = 1+2Q^{(1)},\ Q^{(1)} \in [0,16]) = 0$ |
| $j = 3$ | $R(\tau\vert\tau = 16+2Q^{(2)},\ Q^{(2)} \in [0,8]) = 1$ |
| $j = 4$ | $R(\tau\vert\tau = 4+2Q^{(3)},\ Q^{(3)} \in [0,5]) = -2\tau+29$ |
| $j = 5$ | $R(\tau\vert\tau = 2) = N-12 = 21$ |

Правило кодування (8) містить параметр $S \in \mathbb{Z}_+$, який так само як і у (5) використовується для визначення номерів та значень елементів послідовності при синтезі її структури.

Розглянемо структуру КФ послідовності $\mathbf{X}$ = {-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1}, яка має довжину $N = 33$ та є синтезованою за правилом кодування (8). КФ цієї послідовності з її виокремленими структурами показано на рис. 3.

У табл. 3 охарактеризовані виокремлені структури КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу B типу 3 при $N = 33$, які зображені на рис. 3.

У табл. 3 серед п’яти виокремлених структур 4-а має вигляд $R(\tau)=a\tau+b$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$), 2-а та 3-я мають вигляд $R(\tau)=b$ (зокрема $b=0$ для 2-ї структури), а 1-а та 5-а складові є виродженими структурами та являють собою окремі точки КФ, які залишились після виділення лінійних структур.

Повний математичний опис КФ узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу B типу 3 при $N = 33$, який складається з трьох лінійних структур та двох окремих точок КФ, представлено у (9).

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \bigcup_{j\in\mathbf{J}} R\left(\tau\,|\,\tau^{(j)}\right)=\\ &=\{N\,|\,\tau=0\}\cup\{0\,|\,\tau=1+2Q^{(1)},\ Q^{(1)}\in[0,16]\}\cup\\ &\cup\{1\,|\,\tau=16+2Q^{(2)},\ Q^{(2)}\in[0,8]\}\cup\\ &\cup\{-2\tau+29\,|\,\tau=4+2Q^{(3)},\ Q^{(3)}\in[0,5]\}\cup\\ &\cup\{N-12\,|\,\tau=2\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Табл. 3 та математичний опис КФ (9) містять гіперпараметр $\mathbf{Q} = \{Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}\}$, $\mathbf{Q} \in \mathbb{N}_0$, який використовується для опису лінійних складових.

За аналогією з синтезом узагальнених математичних виразів для КФ (3) та (7), узагальнюючи (9) для випадку будь-якої можливої довжини $N$ узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу B типу 3, яка формується шляхом використання правила кодування (8), отримуємо вираз (10).

$$R(\tau) = \bigcup_{j \in \mathbf{J}} R\left(\tau \mid \tau^{(j)}\right) = \{N \mid \tau = 0\} \cup \{0 \mid \tau = 1 + 2Q^{(1)},\ Q^{(1)} \in [0, (N-1)/2)]\} \cup$$
$$\cup \{1 \mid \tau = [(N-1)/2] + 2Q^{(2)},\ Q^{(2)} \in [0, (N-1)/4)],\ N \geq 9\ \vee\ \tau = 4,\ N = 5\} \cup$$
$$\cup \{-2\tau + N - 4 \mid \tau = 4 + 2Q^{(3)},\ Q^{(3)} \in [0, (N-13)/4)],\ N \geq 13\} \cup \tag{10}$$
$$\cup \{-3 \mid \tau = 2,\ N = 5\} \cup \{N - 12 \mid \tau = 2,\ N \geq 9\},$$
$$\mathbf{Q} \in \mathbb{N}_0,\ \mathbf{Q} = \{Q^{(1)}, Q^{(2)}, Q^{(3)}\}.$$

Узагальнений математичний вираз (10), так само як і у випадку з виразом (3), має більш складний набір лінійних та вироджених структур при $N = 33$ у порівнянні з виразом (9) через необхідність врахування у (10) частинних випадків при відносно малих значеннях $N$ ($N < 13$), коли спостерігається виродження лінійних структур, що і було враховано при синтезі узагальненого математичного виразу КФ для будь-якої можливої довжини узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу В типу 3. При $N = 33$ з (10) випливає (9) як частинний випадок.

Зазначимо, що узагальнений математичний вираз (10) для КФ будь-якої узагальненої бінарної послідовності Баркера підтипу В типу 3 містить 7 структур, з яких одна має вигляд $R(\tau) = a\tau + b$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$), дві – вигляд $R(\tau) = b$ (зокрема $b = 0$), та чотири є окремими точками КФ.

## Висновки та перспективи подальших досліджень

У статті формалізовано систему повних математичних описів КФ узагальнених бінарних послідовностей Баркера довільної можливої непарної довжини з використанням лінійних структур, які входять до складу їх КФ, а саме такі узагальнені математичні вирази: вираз (3) – для типу 2, вираз (7) – для підтипу А типу 3, вираз (10) – для підтипу В типу 3 узагальнених бінарних послідовностей Баркера, відповідно.

Структурованість КФ узагальнених бінарних послідовностей Баркера непарної довжини полягає в тому, що КФ таких послідовностей може бути представлена обмеженою кількістю лінійних структур та вироджених структур у вигляді окремих точок КФ. Кількість таких структур для будь-якої непарної довжини послідовності не перевищує семи, з яких не більше трьох є лінійними структурами та не більше чотирьох – виродженими структурами (окремими точками КФ).

Проаналізована у статті та формально описана структурованість та системність щодо лінійних та вироджених структур КФ узагальнених бінарних послідовностей Баркера непарної довжини може розглядатися як окремий додатковий критерій "узагальненості" узагальнених бінарних послідовностей Баркера, що можна вважати теоретично значимим результатом, який доповнює теорію цього типу послідовностей.

Практична значимість отриманих результатів полягає у отриманні нових можливостей опису та моделювання сигналів з використанням комбінацій лінійних структур на виході узгоджених фільтрів при обробці сигнально-кодових конструкцій на основі узагальнених бінарних послідовностей Баркера (сигнал на виході узгодженого фільтра відтворює форму КФ сигналу, який надходить на його вхід і з яким він є узгодженим).

Перспективою подальших досліджень є формалізація повного математичного опису КФ на основі лінійних структур для узагальнених бінарних послідовностей Баркера з довільним можливим парним значенням довжини, тобто для типу 1 цих послідовностей відповідно до класифікації [1]. Це узагальнить отримані у цій статті висновки на всі існуючі відомі типи та підтипи узагальнених бінарних послідовностей Баркера.

## Перелік посилань


[1] A. H. Holubnychyi, "Generation of generalized binary Barker sequences and their structure," *Problems of Informatization and Management*, vol. 4, no. 44, pp. 20–26, 2013, **DOI:** 10.18372/2073-4751.4.6359.

[2] V. P. Babak and A. Ya. Biletskyi, *Determinovani syhnaly i spektry: Navch. posib. dlia stud. vyshch. navch. zakl. [Deterministic Signals and Spectrums: study guide for students of higher educational institutions]*. Kyiv: Tekhnika, 2003, **ISBN:** 966-575-081-X.

[3] A. H. Holubnychyi and G. F. Konakhovych, "Multiplicative complementary binary signal-code constructions," *Radioelectronics and Communications Systems*, vol. 61, no. 10, pp. 431–443, Oct. 2018, **DOI:** 10.3103/S0735272718100011.

[4] J. Jedwab and M. G. Parker, "A construction of binary Golay sequence pairs from odd-length Barker sequences," *Journal of Combinatorial Designs*, vol. 17, no. 6, pp. 478–491, Mar. 2009, **DOI:** 10.1002/jcd.20222.

[5] V. E. Bychkov, O. D. Mrachkovsky, and V. I. Pravda, "Golay's codes application features in radiolocation," *Radioelectronics and Communications Systems*, vol. 51, no. 4, pp. 210–214, Apr. 2008, **DOI:** 10.3103/S0735272708040055.

[6] D. Zhao, Y. Wei, and Y. Liu, "Design of unimodular sequence train with low central and recurrent autocorrelations," *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 13, no. 1, pp. 45–49, Dec. 2018, **DOI:** 10.1049/iet-rsn.2018.5021.

[7] M. Alaee-Kerahroodi *et al.*, "Binary sequences set with small ISL for MIMO radar systems," in *2018 26th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, 2018, pp. 2395–2399, **DOI:** 10.23919/EUSIPCO.2018.8553434.

[8] A. H. Holubnychyi, "Correlation properties of generalized binary Barker sequences," *Problems of Informatization and Management*, vol. 2, no 50, pp. 48–55, 2015, **DOI:** 10.18372/2073-4751.2.8940.

[9] P. Stärke *et al.*, "A passive tunable matching filter for multiband RF applications demonstrated at 7 to 14 GHz," *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 27, no. 8, pp. 703–705, Aug. 2017, **DOI:** 10.1109/LMWC.2017.2724006.

[10] H. Bouhedjeur *et al.*, "Investigation of a joint I/Q demodulation/pulse compression scheme for radar applications,"

in *2017 Seminar on Detection Systems Architectures and Technologies (DAT)*, 2017, pp. 1–5,
**DOI:** 10.1109/DAT.2017.7889150.

**Надійшла до редакції 01 лютого 2019 р.**

УДК 621.396:51-74

# Линейные структуры ковариационной функции обобщённых бинарных последовательностей Баркера нечётной длины

Голубничий А. Г., к.т.н. доц., ORCID 0000-0001-5101-3862
e-mail a.holubnychyi@nau.edu.ua
Национальный авиационный университет nau.edu.ua
Киев, Украина

***Аннотация*—Представлено полное математическое описание ковариационных функций (КФ) обобщённых бинарных последовательностей Баркера с нечётным значением их длины на основе структуризации этих КФ их линейными компонентами. Показано, что структурированность КФ этих последовательностей заключается в том, что их КФ может быть представлена определённым количеством линейных и вырожденных структур в виде отдельных точек КФ. Количество таких структур для любой нечётной длины последовательности не превышает семи, из которых не более трёх являются линейными структурами и не более четырёх – отдельными точками КФ. Теоретическое значение полученных результатов заключается в получении дополнительного признака “обобщённости” обобщённых бинарных последовательностей Баркера, а именно структурированности их КФ на основе линейных структур. Полученные результаты дают возможность осуществлять описание сигнально-кодовых конструкций с использованием линейных составляющих после согласованной фильтрации сигналов на основе обобщённых бинарных последовательностей Баркера нечётной длины.**

**Библ. 10, рис. 3, табл. 3.**

***Ключевые слова — обобщённые бинарные последовательности Баркера; ковариационная функция; корреляционные свойства; структуризация; линейные структуры; вырожденные структуры.***

UDC 621.396:51-74

# Linear Structures of Correlation Function of Odd-Length Generalized Binary Barker Sequences

O. H. Holubnychyi, PhD Assoc.Prof., ORCID 0000-0001-5101-3862
e-mail a.holubnychyi@nau.edu.ua
National Aviation University nau.edu.ua
Kyiv, Ukraine

***Abstract*—Spread-spectrum, wideband and pulse compression are well-known currently in use technologies for radar, telecommunication, navigation and other radio systems. The main theoretical problem concerning these technologies boils down to a synthesis and study of signals with certain correlation properties.**

**A collection of mathematical models, which are generation rules for binary sequences, and related sequences with regular structures, which generalize structural features of known binary Barker sequences, were suggested and described in literature and may be taken as a kind of generalized binary Barker sequences. In contrast with known binary Barker sequences, which are known up to length $N = 13$ and widely used in radar and other radio systems and techniques, the generalized binary Barker sequences can be synthesized by means of deterministic generation rules for lengths $N = 4k–1$, $N = 4k$, $N = 4k+1$, where $k$ is a positive integer, and contain binary Barker sequences of lengths $N = 3, 4, 5, 7, 11, 13$ as a particular case. However, generally, the correlation function of generalized binary Barker sequence has a high value of sidelobes and therefore they cannot be used separately for high quality signal detection. Because of that, multiplicative complementary sets of generalized binary Barker sequences with a mutual sidelobe reduction are usable, similarly to Golay additive complementary sequences.**

**It is shown that a structuring of the correlation function of odd-length generalized binary Barker sequences lies in the fact that the correlation function may be presented by some finite number of linear structures and singular ones, which are exceptional points of the correlation function. It has been determined that the number of such structures for any odd-length generalized binary Barker sequence does not exceed 7 pieces, of which no more than 3 pieces are linear structures, and no more than 4 pieces are exceptional points of the correlation function.**

**On the basis of the structural analysis a complete system of analytical expressions, which based on above-mentioned linear and singular structures, for the correlation function of off-length generalized binary Barker sequence of any type and subtype is synthesized and presented.**

**Examples of a structuring of the correlation function, which based on linear and singular structures, for odd-length generalized binary Barker sequences of different types and subtypes at $k = 8$ (lengths $N = 31$ and $N = 33$) are done.**

**The theoretical significance of presented results lies in the obtaining of a new additional feature of "generalization" of generalized binary Barker sequences, namely, the structuring of their correlation functions based on linear structures. The obtained results make possible a description of signal components, which are based on odd-length generalized binary Barker sequences, after their matched filtering by means of linear constituents.**

**Bibl. 10, Fig. 3, Tables 3.**

***Keywords — generalized binary Barker sequences; correlation function; correlation properties; structuring; linear structures; singular structures.***