

## Акустические приборы и системы

УДК 534.231-13

Н.В. Богданова<sup>1</sup>, канд. техн. наук, О.Н. Петрищев<sup>1</sup>, д-р. техн. наук., Ж.В. Сотула<sup>2</sup>, канд. техн. наук, В.М. Шарапов<sup>2</sup>, д-р. техн. наук

<sup>1</sup> Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», ул. Політехнічна, 16, корпус 12, г. Киев, Украина, 03056.

<sup>2</sup> Черкасский государственный технологический университет, бульв. Шевченко, 460, г. Черкассы, Украина, 18006.

### Расчет акустического поля биморфного пьезоэлектрического излучателя

*Предложен новый, отличающийся от известных, подход к оценке параметров акустических полей осциллирующих дисков. Выполнено исследование особенностей практического применения метода коллокации. Показано, что этот, к сожалению единственный в данной ситуации, метод не является абсолютно устойчивым. Предложена новая методика вычисления фазовых характеристик гармонических волн, которые формируются осциллирующим диском в окружающей среде. Дана оценка размера ближнего поля излучателя. Библ. 6, рис. 13.*

**Ключевые слова:** биморфный преобразователь, акустическое поле осциллирующего диска, метод коллокации, ближнее поле, фазовые характеристики.

#### Введение

Расчет характеристик и параметров акустического поля созданного биморфным пьезоэлектрическим излучателем, по своему содержанию соответствует определению акустического поля осциллирующего диска. Общая постановка этих задач и анализ результатов решения некоторых частных случаев достаточно подробно рассмотрены в статье [1]. Некоторые аспекты этих задач были рассмотрены в тексте фундаментальной работы [2], которая удивительным образом сочетает в себе признаки научной монографии и добротного учебного пособия.

К сожалению, воспользоваться представленными в работах [1, 2] результатами не представляется возможным, поскольку они моделируют ситуацию, когда аксиальные смещения материальных частиц поверхности осциллирующего диска имеют одинаковые значения. Аксиальные смещения элементов поверхности биморфного пьезоэлектрического излучателя

изменяются весьма существенным образом при перемещении от центра к контуру закрепления диска [3]. При этом формы колеблющейся поверхности на различных частотах существенно различаются друг от друга. Помимо этого необходимо добавить, что весьма остроумные общие постановки задачи о поле осциллирующего диска [1] принципиально не в состоянии обеспечить замкнутого решения задачи об акустическом поле биморфного излучателя со свободным (абсолютно податливым) закреплением внешнего контура металлического диска.

Эти обстоятельства заставляют рассматривать расчет акустического поля биморфного пьезоэлектрического излучателя как самостоятельную задачу прикладной акустики.

В настоящей работе предлагается общая схема решения задачи и обсуждаются результаты расчета параметров акустического поля биморфного пьезоэлектрического излучателя со свободным закреплением внешнего контура металлического диска.

#### 1. Постановка и решение задачи об акустическом поле осциллирующего диска с произвольным значением аксиальных перемещений внешнего контура

Предположим, что аксиальные смещения  $w(r)e^{i\omega t}$  ( $w(r)$  - амплитудное значение аксиального смещения;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\omega$  - круговая частота;  $t$  - время) рабочей поверхности биморфного пьезоэлектрического преобразователя (позиция 1 на рис. 1) не зависит от значений окружной координаты  $\varphi$ . Будем полагать, что излучение акустического поля осуществляется в полупространство  $x_3 > 0$ . Нулевая точка декартовой системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и сопряженной с ней сферической системы координат  $(\vartheta, \varphi, r)$

находится в центре, на поверхности колеблющегося диска.

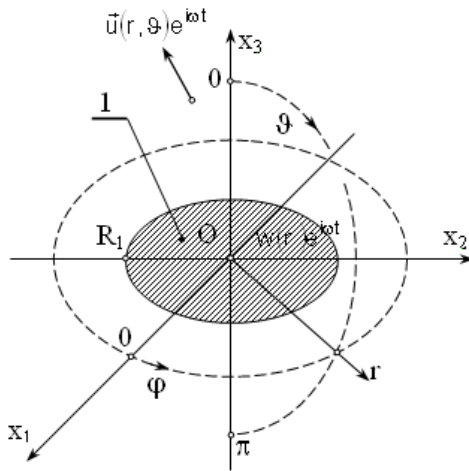


Рис. 1. К постановке задачи о расчете акустического поля биморфного излучателя

Введем потенциал  $\Phi(\vartheta, r)e^{i\omega t}$  поля смещенных материальных частиц полупространства, в которое осуществляется излучение акустических волн, амплитудное значение которого  $\Phi(\vartheta, r)$  определяет амплитудное значение  $\vec{u}(\vartheta, r)$  вектора смещения следующим образом

$$\vec{u}(\vartheta, r) = \text{grad}\Phi(\vartheta, r). \quad (1)$$

В объеме полупространства потенциал  $\Phi(\vartheta, r)$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2\Phi(\vartheta, r) + k^2\Phi(\vartheta, r) = 0, \quad (2)$$

где  $k = \omega/v$  - волновое число;  $v$  - скорость распространения звука в среде.

Решение уравнения (2) должно обеспечивать выполнение следующего условия

$$\text{Re}u_{\vartheta}(\pi/2, r) = \text{Re}w(r), \quad (3)$$

где  $\text{Re}u_{\vartheta}(\pi/2, r)$  - действительная часть комплексной амплитуды полярного компонента вектора смещения материальных частиц среды на поверхности  $\vartheta = \pi/2$  колеблющегося диска;  $\text{Re}w(r)$  - действительная часть амплитудного значения аксиального смещения поверхности биморфного излучателя.

В случае осевой симметрии акустического поля уравнение Гельмгольца (2) в сферической системе координат записывается следующим образом

$$\frac{\partial^2\Phi(\vartheta, r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\Phi(\vartheta, r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2\Phi(\vartheta, r)}{\partial\vartheta^2} + \text{ctg}\vartheta\frac{\partial\Phi(\vartheta, r)}{\partial\vartheta}\right] + k^2\Phi(\vartheta, r) = 0 \quad (4)$$

Уравнение (4) решается с помощью метода разделения переменных, в соответствии с которым искомое решение  $\Phi(\vartheta, r)$  представляется в виде произведения двух функций, т. е.

$$\Phi(\vartheta, r) = T(\vartheta)R(r), \quad (5)$$

где функция  $T(\vartheta)$  зависит только от полярного угла  $\vartheta$ , а функция  $R(r)$  - только от радиальной координаты  $r$ .

После подстановки выражения (5) в уравнение (4) получаем

$$T(\vartheta)FR(r) + \frac{R(r)}{r^2}FT(\vartheta) = 0, \quad (6)$$

где  $FR(r) = \frac{\partial^2R(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R(r)}{\partial r} + k^2R(r)$ ;

$$FT(\vartheta) = \frac{\partial^2T(\vartheta)}{\partial\vartheta^2} + \text{ctg}\vartheta\frac{\partial T(\vartheta)}{\partial\vartheta}.$$

Рассмотрим функцию  $FT(\vartheta)$  и попытаемся с помощью эквивалентных преобразований исключить из её описания производные функции  $T(\vartheta)$ .

Переходя к новой переменной  $\xi = \cos\vartheta$ , выражение для функции  $FT(\vartheta)$  можно записать в следующем виде

$$FT(\vartheta) = -\left[\left(\xi^2 - 1\right)\frac{\partial^2T(\vartheta)}{\partial\xi^2} + 2\xi\frac{\partial T(\vartheta)}{\partial\xi}\right]. \quad (7)$$

Внутри квадратной скобки выражения (7) добавим и вычтем произведение  $v(v+1)T(\vartheta)$ , где  $v = 0, 1, 2, \dots$  - элемент ряда натуральных чисел. При этом выражение (7) принимает следующий вид

$$FT(\vartheta) = -\left[\left(\xi^2 - 1\right)\frac{\partial^2T(\vartheta)}{\partial\xi^2} + 2\xi\frac{\partial T(\vartheta)}{\partial\xi} - v(v+1)T(\vartheta)\right] - v(v+1)T(\vartheta) \quad (8)$$

Если предположить, что  $T(\vartheta) = P_v(\xi)$ , где  $P_v(\xi)$  - функция Лежандра первого рода степени  $v$  [4], то квадратная скобка в выражении (8) обращается в нуль. Очевидно, что линейная комбинация функций Лежандра, т. е.

$$T(\vartheta) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v P_v(\xi), \quad (9)$$

где  $C_v$  - константы, также обращает в нуль квадратную скобку в формуле (8). Из сказанного выше следует, что

$$FT(\vartheta) = \sum_{v=0}^{\infty} FT_v(\vartheta) = - \sum_{v=0}^{\infty} v(v+1)C_v P_v(\xi). \quad (10)$$

$$C_v P_v(\xi) \left\{ \frac{\partial^2 R_v(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R_v(r)}{\partial r} + \left[ k^2 - \frac{v(v+1)}{r^2} \right] R_v(r) \right\} = 0. \quad (12)$$

Полагая  $C_v P_v(\xi) \neq 0$  из равенства (12) получаем уравнение функции радиальной координаты

$$x^2 \frac{\partial^2 R_v(x)}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial R_v(x)}{\partial x} + \left[ x^2 - v(v+1) \right] R_v(x) = 0 \quad (13)$$

где  $x = kr$  - безразмерная радиальная координата.

Подстановкой

$$R_v(x) = x^{-1/2} U_v(x), \quad (14)$$

где  $U_v(x)$  - новая функция безразмерной координаты  $x$ , уравнение (13) приводится к стандартному уравнению Бесселя относительно функции  $U_v(x)$ :

$$x^2 \frac{\partial^2 U_v(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial U_v(x)}{\partial x} + \left[ x^2 - (v+1/2)^2 \right] U_v(x) = 0. \quad (15)$$

Поскольку  $\partial P_0(\xi)/\partial \xi \equiv 0$ , постольку выражение (18) необходимо переписать в следующем виде

$$u_{\vartheta}(\vartheta, r) = -k \sin \vartheta x^{-3/2} \sum_{v=1}^{\infty} A_v H_{v+1/2}^{(2)}(x) \frac{\partial P_v(\xi)}{\partial \xi}. \quad (19)$$

Совершенно ясно, что в представлении (5) каждой функции  $T_v(\vartheta) = C_v P_v(\xi)$  должна соответствовать своя функция  $R_v(r)$ . При этом выражение (5) следует записать в виде

$$\Phi(\vartheta, r) = \sum_{v=0}^{\infty} C_v R_v(\xi) P_v(\xi). \quad (11)$$

Уравнение (6) при этом необходимо записать в следующем виде

$$T_v(\vartheta) F R_v(r) + \frac{R_v(r)}{r^2} F T_v(\vartheta) = 0,$$

откуда следует, что

При выбранной зависимости от времени  $e^{i\omega t}$  радиальная составляющая  $U_v(x)$  скалярного потенциала  $\Phi(\vartheta, r)$  определяется следующим решением уравнения (15):

$$U_v(x) = B_v H_{v+1/2}^{(2)}(x), \quad (16)$$

где  $B_v$  - константа;  $H_{v+1/2}^{(2)}(x)$  - функция Ханкеля второго рода полуцелого порядка.

Подставляя выражение (16) в определение (14), а полученный результат - в представление (11), можно записать, что

$$\Phi(\vartheta, r) = x^{-1/2} \sum_{v=0}^{\infty} A_v H_{v+1/2}^{(2)}(x) P_v(\xi), \quad (17)$$

где  $A_v = B_v C_v$ .

Полярный компонент  $u_{\vartheta}(\vartheta, r)$  вектора смещения материальных частиц среды в акустическом поле дискового излучателя определяется, в соответствии с общим выражением (1), следующим образом

$$u_{\vartheta}(\vartheta, r) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(\vartheta, r)}{\partial \vartheta} = -k \sin \vartheta x^{-3/2} \sum_{v=0}^{\infty} A_v H_{v+1/2}^{(2)}(x) \frac{\partial P_v(\xi)}{\partial \xi}. \quad (18)$$

Производная функции Лежандра  $P_v(\xi)$  определяется рекуррентным соотношением следующего вида [4]

$$\frac{\partial P_v(\xi)}{\partial \xi} = \frac{v}{\xi^2 - 1} [\xi P_v(\xi) - P_{v-1}(\xi)].$$

При  $\xi = 0$  ( $\vartheta = \pi/2$ ) эта производная принимает следующее значение

$$\left. \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = \nu P_{\nu-1}(0). \quad (20)$$

Если  $\nu - 1 = 2n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial P_{2n+1}(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= (2n+1)P_{2n}(0) = \\ &= (2n+1)(-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$-kx^{-3/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} J_{2n+3/2}(x) (2n+1)(-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} - \text{Re } w(r) = 0 \quad \forall r \leq R_1, \quad (23)$$

где  $J_{2n+3/2}(x) = \text{Re } H_{2n+3/2}^{(2)}(x)$  - функция Бесселя полуцелого порядка.

Из уравнения (23) точно определяется лишь один коэффициент  $A_1$ . Действительно, при  $x = 0$  ( $r = 0$ ) из уравнения (23) следует, что

$$-k A_1 \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{J_{3/2}(x)}{x^{3/2}} \right] = \text{Re } w(0). \quad (24)$$

Функция Бесселя  $J_{3/2}(x)$  определяется формулами Рэлея [4] в следующем виде

$$J_{3/2}(x) = x^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\sin x - x \cos x)}{x^2}.$$

При этом

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{J_{3/2}(x)}{x^{3/2}} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \right] = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Подставляя последний результат в равенство (24), получаем следующее определение коэффициента  $A_1$ :

$$A_1 = -\frac{3}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{Re } w(0). \quad (25)$$

Из формулы (25) следует, что при  $k \rightarrow 0$  ( $\omega \rightarrow 0$ ) коэффициент  $A_1$  неограниченно возрастает по абсолютной величине. Поскольку аналитические свойства коэффициентов  $A_{2n+1}$  в разложении (23) одинаковы, постольку можно утверждать, что по мере уменьшения частоты смены знака направления движения элементов поверхности осциллирующего диска все коэффициенты  $A_{2n+1}$  возрастают по абсолютной ве-

Если показатель степени  $\nu$  функции Лежандра  $P_\nu(\xi)$  является четным числом, то её первая производная при  $\xi = 0$  равна нулю.

Таким образом, только нечетные значения значка  $\nu$  создают принципиальную возможность для выполнения граничных условий (3). С учетом этого обстоятельства перепишем выражение (17) в следующем виде

$$\Phi(\vartheta, r) = x^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} H_{2n+3/2}^{(2)}(x) P_{2n+1}(\xi), \quad (22)$$

При этом граничное условие (3) записывается в виде

личине. В пределе, при  $\omega \rightarrow 0$ , возникает сингулярность типа  $1/0$ .

Очевидно, что из равенства (23) невозможно точно определить коэффициенты  $A_{2n+1}$  при  $n > 0$ . Анализируя ситуацию с позиции выполнения технических расчетов, можно прийти к выводу, что знание точных значений всех без исключения коэффициентов  $A_{2n+1}$  вовсе не обязательно. Действительно, если ряд (22) сходится, а он должен быть сходящимся по своему физическому содержанию, то количественные оценки потенциала  $\Phi(\vartheta, r)$  формируются первыми  $N$  членами этого ряда. Число  $N$  суммируемых членов ряда (22) определяется заданной погрешностью вычислений.

Первые  $N$  коэффициентов  $A_{2n+1}$  надежно и эффективно определяются с помощью метода коллокаций [5]. Суть этого метода чрезвычайно проста. На радиальной оси, которая находится в плоскости колеблющегося диска фиксируется  $N$  точек, расстояния между которыми, вообще говоря, должны отличаться друг от друга. Координаты этих точек обозначим символами  $r_1, r_2, \dots, r_k, \dots, r_N$ . Точка  $r_1$  не должна находиться в центре диска. Положение точки  $r_N$  определяется способом закрепления внешнего контура осциллирующего диска. При шарнирном и жестком закреплении этого контура координата  $r_N < R_1$ . В случае свободного закрепления внешнего контура осциллирующего диска, точка  $r_N$  должна находиться на границе диска, т. е. на

окружности  $r = R_1$ . Обозначая  $x_m = kr_m$  и составляя в сумме (23) первые  $N + 1$  слагаемых,

запишем равенство (23) для каждой из точек коллокации, т. е. для каждой точки с координатой  $r_m$ :

$$\begin{aligned}
 &A_3 J_{2+3/2}(x_1)(2+1)P_2(0) + A_5 J_{4+3/2}(x_1)(4+1)P_4(0) + \dots + A_{2m+1} J_{2m+3/2}(x_1)(2m+1)P_{2m}(0) + \\
 &\quad + \dots + A_{2N+1} J_{2N+3/2}(x_1)(2N+1)P_{2N}(0) = -\frac{x_1^{3/2}}{k} \text{Re}w(r_1) - A_1 J_{3/2}(x_1), \\
 &A_3 J_{2+3/2}(x_2)(2+1)P_2(0) + A_5 J_{4+3/2}(x_2)(4+1)P_4(0) + \dots + A_{2m+1} J_{2m+3/2}(x_2)(2m+1)P_{2m}(0) + \\
 &\quad + \dots + A_{2N+1} J_{2N+3/2}(x_2)(2N+1)P_{2N}(0) = -\frac{x_2^{3/2}}{k} \text{Re}w(r_2) - A_1 J_{3/2}(x_2), \\
 &\quad \vdots \\
 &A_3 J_{2+3/2}(x_N)(2+1)P_2(0) + A_5 J_{4+3/2}(x_N)(4+1)P_4(0) + \dots + A_{2m+1} J_{2m+3/2}(x_N)(2m+1)P_{2m}(0) + \\
 &\quad + \dots + A_{2N+1} J_{2N+3/2}(x_N)(2N+1)P_{2N}(0) = -\frac{x_N^{3/2}}{k} \text{Re}w(r_N) - A_1 J_{3/2}(x_N),
 \end{aligned} \tag{26}$$

где константа  $A_1$  определена соотношением (25).

В неоднородной системе алгебраических уравнений (26) содержится  $N$  уравнений и ровно  $N$  искомым констант  $A_3, A_5, \dots, A_{2m+1}, \dots, A_{2N+1}$ . Указанная неоднородная система уравнений решается относительно искомым констант единственным образом.

После определения первых  $2N+1$  констант разложения (22) скалярного потенциала по сферическим гармоникам можно утверждать, что задача об акустическом поле осциллирующего диска формально полностью решена.

**2. Исследование особенностей практического использования метода коллокаций**

Рассмотрим вначале простейшую ситуацию, когда смещения  $w(r)$  элементов поверхности диска не зависит от радиальной координаты  $r$ , т. е.

$$w(r) = \begin{cases} U_0 \forall r \leq R_1, \\ 0 \forall r > R_1. \end{cases} \tag{27}$$

В этом случае первый коэффициент разложения (22) определяется следующим выражением

$$A_1 = -\frac{3}{k} \sqrt{\frac{\pi}{2}} U_0 = -\frac{3,7599}{kR_1} R_1 U_0,$$

остальные коэффициенты  $A_{2n+1}$  определяются с помощью метода коллокаций.

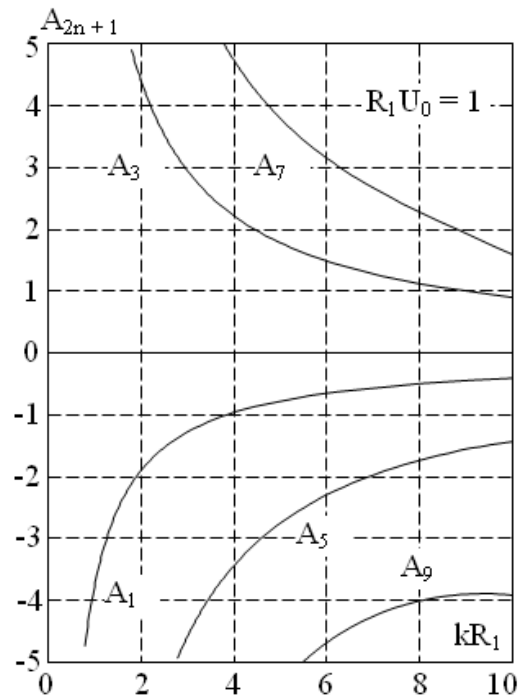
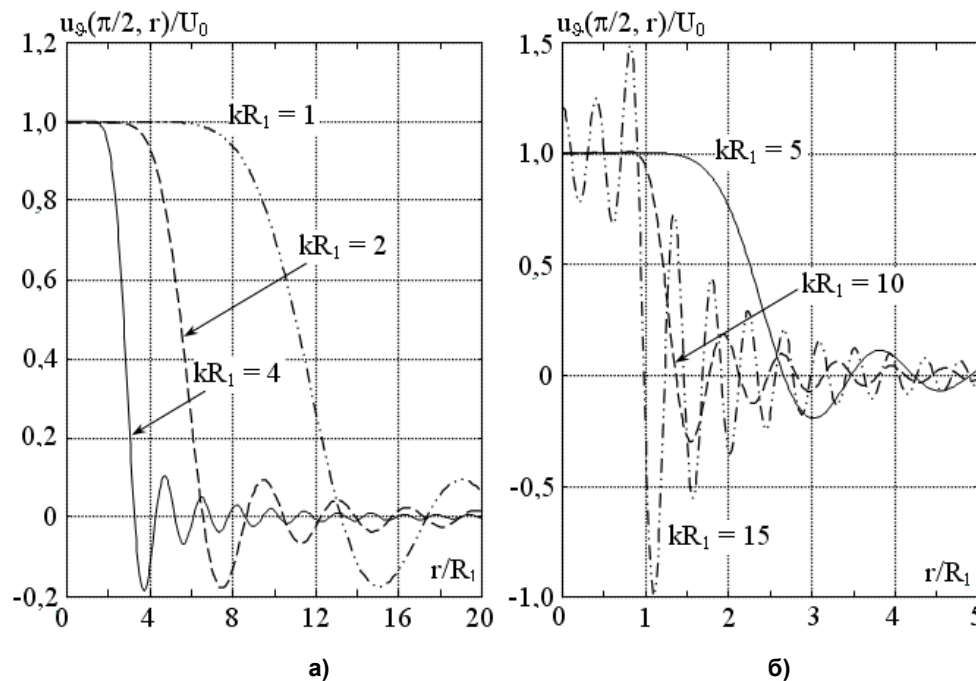


Рис. 2. Графическое изображение числовых значений первых пяти коэффициентов  $A_{2n+1}$  на различных безразмерных частотах  $kR_1 = \omega \tau_1$  ( $\tau_1 = R_1/v$ )

Результаты расчетов числовых значений первых пяти коэффициентов  $A_{2n+1}$  показаны на рис. 2. Координаты четырех точек коллокации

$r_1, \dots, r_4$  определялись как чебышевские узловые точки [5]. Отчетливо видно. Что числовые значения коэффициентов  $A_{2n+1}$  достаточно быстро возрастают с ростом номера  $n$ . Это накладывает особые требования к точности вычислений. Увлекаться чрезмерно большой размерностью системы уравнений (26) не стоит, так как при небольших значениях безразмерных частот  $x = kR_1$  множители в уравнениях системы (26) при искомым коэффициентах  $A_{2n+1}$  с большим значением индекса  $n$  становятся достаточно малыми величинами, а определитель

системы уравнений (26) принимает значения порядка  $10^{-20} \div 10^{-30}$ . При этом возникает практически линейная зависимость элементов двух соседних строк определителя. В случае идеальной линейной зависимости этих элементов возникает сингулярность типа  $1/0$  и счет прекращается. На малых частотах можно обходиться тремя, максимум пятью, коэффициентами  $A_{2n+1}$ . При этом получаются надежные и довольно точные числовые оценки параметров акустического поля.



**Рис. 3. Иллюстрация выполнения граничных условий по смещению на различных частотах с помощью первых пяти сферических гармоник в разложении (22)**

На рис. 3 показаны результаты проверки выполнения граничных условий по смещению на поверхности осциллирующего диска с помощью первых пяти сферических гармоник в разложении (22). Легко заметить, что на малых частотах (рис. 3а) происходит своеобразное затягивание уровней смещений за пределы  $r/R_1 = 1$  края диска. Эту, с позволения сказать, инерцию физического состояния можно объяснить тем, что на низких частотах масштаб неоднородности физического состояния сплошной среды, т. е. длина акустической волны, достаточно велика. Так, для безразмерной частоты  $kR_1 = 1$  из соотношения  $\lambda f = v$  ( $\lambda$  - длина акустической волны), получаем, что  $\lambda = 2\pi R_1$ . Полная перестройка параметров физического

состояния акустического поля происходит на расстоянии в две длины волны. Второй причиной затягивания фиксированных значений полярного компонента вектора смещения за пределы осциллирующего диска является достаточно быстрое нарастание погрешности вычисления четвертого и пятого коэффициентов на низких частотах.

На рис. 3б показано, как выполняются граничные условия на высоких частотах. На безразмерной частоте  $kR_1 = 15$ , что для диска с радиусом  $R_1 = 5$  мм соответствует частоте порядка 17 кГц ( $v = 340$  м/с), сумма из пяти сферических гармоник не обеспечивает удовлетворительного (в смысле точности) выполнение

условия кинематического сопряжения (23) на поверхности  $0 \leq r \leq R_1$  осциллирующего диска.

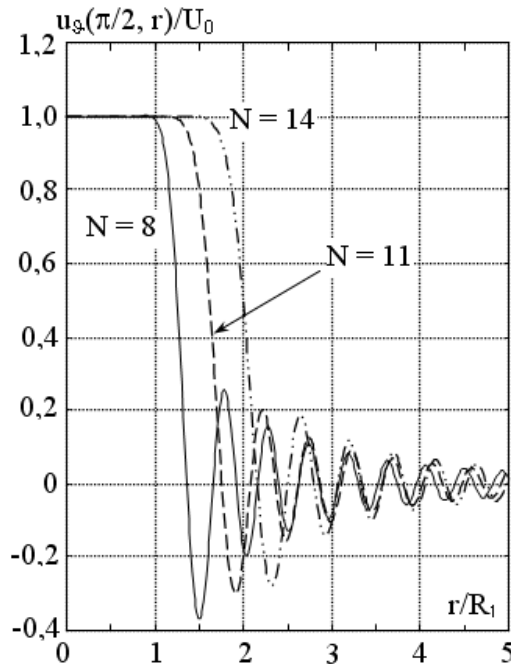


Рис. 4. Иллюстрация выполнения граничных условий по смещению на безразмерной частоте  $kR_1 = 15$  с помощью различного числа  $N$  суммируемых сферических гармоник

На рис. 4 показано, как удовлетворяются граничные условия на частоте  $kR_1 = 15$  с помощью большего числа суммируемых сферических гармоник.  $kR_1 = 15$ . Уже при восьми суммируемых сферических гармониках граничные условия выполняются вполне удовлетворительно. Дальнейшее увеличение числа суммируемых гармоник практически не изменяет точность выполнения граничных условий в круге  $r \leq R_1$ , но сопровождается затягиванием фиксированного значения полярного компонента вектора смещения за пределы осциллирующего диска. Это, по всей вероятности, обусловлено увеличением погрешности вычисления амплитудных множителей  $A_{2n+1}$  сферических гармоник с номерами  $2n + 1 > 8$  на частоте  $kR_1 = 15$ . Причина этого обсуждалась выше.

Из всего сказанного выше следует вполне очевидный вывод – при использовании метода коллокаций необходимо использовать минимально возможное число суммируемых сферических гармоник. Тогда будут минимизированы артефакты, которые обусловлены квазисингулярностью определителя системы уравнений

(26). В результате нескольких серий вычислений было установлено, что сумма  $N \cong kR_1/2$  сферических гармоник обеспечивают вполне удовлетворительное выполнение граничных условий на поверхности осциллирующего диска.

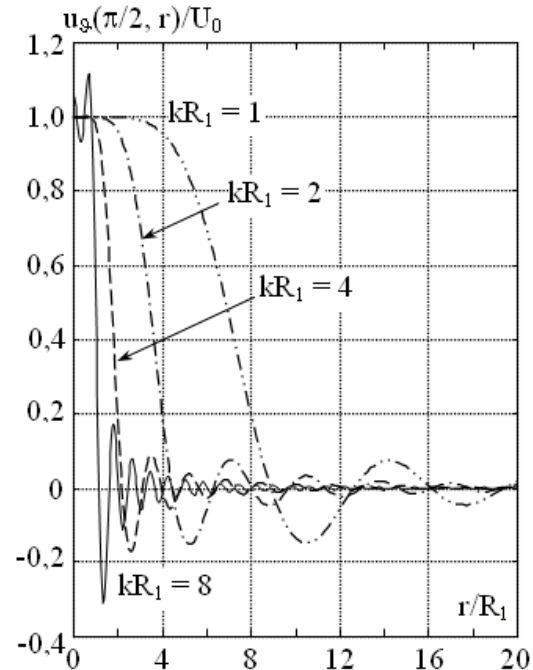


Рис. 5. Иллюстрация возможности выполнения граничных условий (23) суммированием первых трех сферических гармоник

На рис. 5 показано, что аппроксимация разложения (22) всего лишь первыми тремя сферическими гармониками с амплитудными множителями  $A_1, A_3$  и  $A_5$  позволяет достаточно точно удовлетворить граничным условиям на поверхности осциллирующего диска вплоть до безразмерных частот  $kR_1 \cong 8$ .

Результаты модельных исследований позволяют сделать вывод о том, что количественные оценки параметров акустического поля осциллирующего диска можно, в первом приближении, выполнять, суммируя первые три сферические гармоники в разложении (22).

Амплитудные множители первых трех сферических гармоник, т. е. коэффициенты  $A_1, A_3$  и  $A_5$  определяются следующим образом. Коэффициент  $A_1$  определяется через прогиб  $w(0)$  центра биморфного элемента по формуле (25). Полагая, что внешний контур биморфного элемента свободен, две точки коллокации можно определить следующим образом:  $r_1 = 0,7R_1$  и  $r_2 = R_1$ . При этом граничные условия (23) принимают следующий вид



$$A_3 J_{7/2}(0,7x)P_2(0) + A_5 J_{11/2}(0,7x)P_4(0) = -0,7R_1(0,7x)^{1/2} \text{Re} w(0,7R_1) - A_1 J_{3/2}(0,7x),$$

$$A_3 J_{7/2}(x)P_2(0) + A_5 J_{11/2}(x)P_4(0) = -R_1 \text{Re} w(R_1) - A_1 J_{3/2}(x), \quad (28)$$

где  $x = kR_1$  - безразмерное волновое число или безразмерная частота;  $w(0,7R_1)$  и  $w(R_1)$  - про-

гибы биморфного элемента на расстоянии  $0,7R_1$  и  $R_1$  от центра.

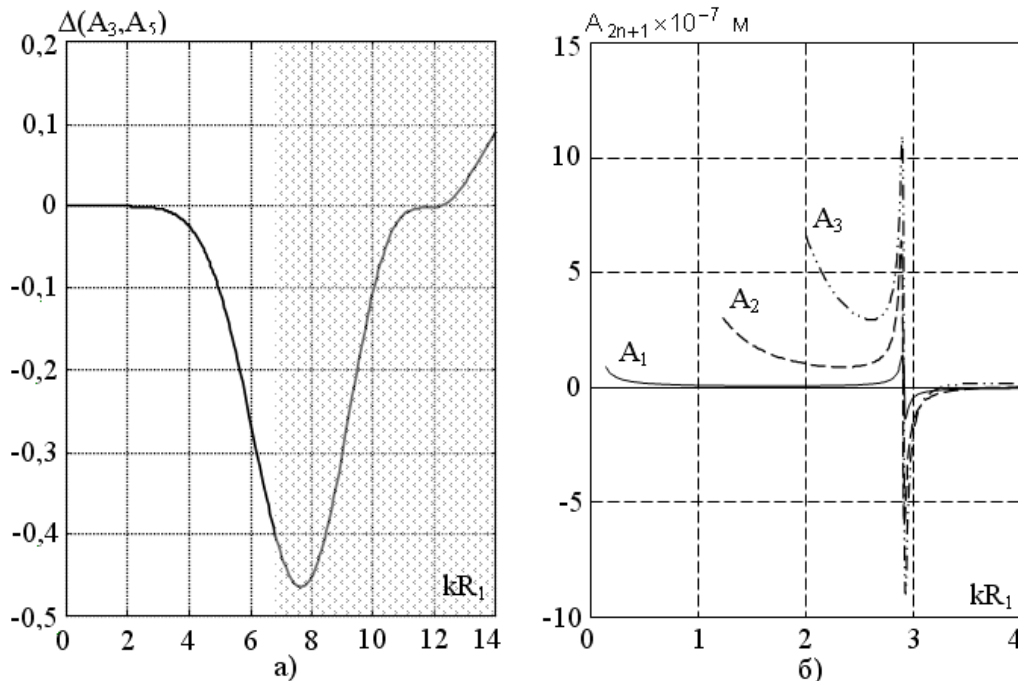


Рис. 6. Частотно зависимое изменение определителя системы уравнений (28) (а) и амплитудные множители первых трех сферических гармоник акустического поля биморфного элемента со свободным закреплением внешнего контура металлического диска (б)

На рис. 6а показано частотно зависимое изменение определителя уравнения (28). Прогибы  $w(0)$ ,  $w(0,7R_1)$  и  $w(R_1)$  определялись для асимметричного биморфного элемента со свободным закреплением внешнего контура (окружности  $R_1$ ) [6]. При вычислении прогибов были приняты следующие значения материальных константы компонентов биморфного элемента. Так, параметры пьезоэлектрика соответствуют основным параметрам пьезокерамики ЦТС – 19 ( $c_{11}^E = 112,2$  ГПа;  $c_{12}^E = 62,2$  ГПа;

$e_{31} = -8,4$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\chi_3^E = 8,274 \cdot 10^{-9}$  Ф/м;  
 $\rho_0 = 7,4 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $v^D = 3918$  м/с; добротность пьезоэлектрика  $Q = 80$ ). Для металлического слоя были зафиксированы следующие константы  $E = 210$  ГПа,  $\nu = 0,31$ , что примерно соответствует усредненным показателям стали, легированной марганцем или хромом или тем и

другим элементом вместе; плотность металла  $\rho_M = 7,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Геометрические параметры биморфного элемента тако вы:  $R_1/R = 1,75$  ( $R$  - радиус пьезокерамического диска);  $h/\alpha = 0,8$  ( $h$  и  $\alpha$  - толщины металлического и пьезоэлектрического дисков соответственно);  $\alpha = 1$  мм;  $d = R/\alpha = 10$ . Амплитудное значение разности электрических потенциалов на электродированных поверхностях пьезокерамического диска принято равным одному вольту.

По оси ординат на рис. 6а отложены абсолютные значения определителя  $\Delta(A_3, A_5)$  системы уравнений (28). По оси абсцисс на рис. 6 отложены безразмерные волновые числа  $kR_1$ , где  $k = \omega/v$  - волновое число упругих колебаний воздуха ( $v = 340$  м/с). Фоновой заливкой на поле рис. 6а выделен диапазон частот, где счет коэффициентов  $A_3$  и  $A_5$  выполняется с нара-



тающей погрешностью и вообще становится недостоверен при  $kR_1 > 9$ . При  $kR_1 = 12$  четко просматривается точка сингулярности, когда  $\Delta(A_3, A_5) = 0$ . При этом значения амплитудных множителей второй и третьей сферических гармоник акустического поля, т. е. коэффициентов  $A_3$  и  $A_5$ , вообще не определяются. Между безразмерными частотами  $kR_1$ , которые используются в расчетах параметров и характеристик акустического поля, и частотами  $\omega\tau_0$ , которые были использованы при расчетах напряженно-деформированного состояния биморфных элементов в работе [6], существует линейная связь следующего вида  $kR_1 = \zeta(\omega\tau_0)$ , где коэффициент пропорциональности  $\zeta = (v^D R_1)/(vR)$ . В данной ситуации  $\zeta = 20,79$ . При этом изменению безразмерной частоты  $kR_1$  в пределах от нуля до семи соответствует интервал безразмерных частот  $\omega\tau_0$  от нуля до 0,34. Этот интервал содержит в себе первую резонансную частоту  $(\omega\tau_0)_1 = 0,140076$  (см. табл. 3 в работе [6]) биморфного излучателя, т. е. перекрывает практически всю полосу частот, в которой осуществляется эффективное излучение акустического поля.

На рис. 6б показаны результаты расчета коэффициентов  $A_3$  и  $A_5$ , которые соответствуют прогибам описанного выше биморфного пьезокерамического элемента. Необходимо подчеркнуть, что коэффициент  $A_1$  вычисляется точно в любом диапазоне частот.

На рис. 7 показаны графики прогибов биморфного элемента со свободным закреплением окружности  $R_1$  (сплошные кривые) и полярного компонента  $u_9(\pi/2, r)$  вектора смещений материальных частиц воздушной среды (штриховые кривые) при аппроксимации реального поля первыми тремя сферическими гармониками с амплитудными множителями  $A_1$ ,  $A_3$  и  $A_5$ , частотно зависимое изменение которых показано на рис. 6б. По оси ординат на рис. 7 отложены значения прогибов и соответствующих им смещений в нанометрах (электрическое воздействие всего один вольт!), по оси абсцисс – безразмерная радиальная координат  $r/R$ , где  $R$  – радиус пьезокерамического диска. Расчеты выполнены на двух фиксированных значениях частоты –  $kR_1 = 2$  и  $kR_1 = 4$ , т. е. до и после частоты первого электромеханического резонанса биморфного преобразователя. Отчетливо видно, что на краях, т. е. вблизи окружности ра-

диуса  $R_1$  появляется и быстро нарастает погрешность кинематического сопряжения поверхности осциллирующего диска и материальных частиц среды, в которую осуществляется излучение акустических волн. Этот факт, скорее всего, обусловлен недостаточным количеством сферических гармоник, сумма которых аппроксимирует реальное акустическое поле.

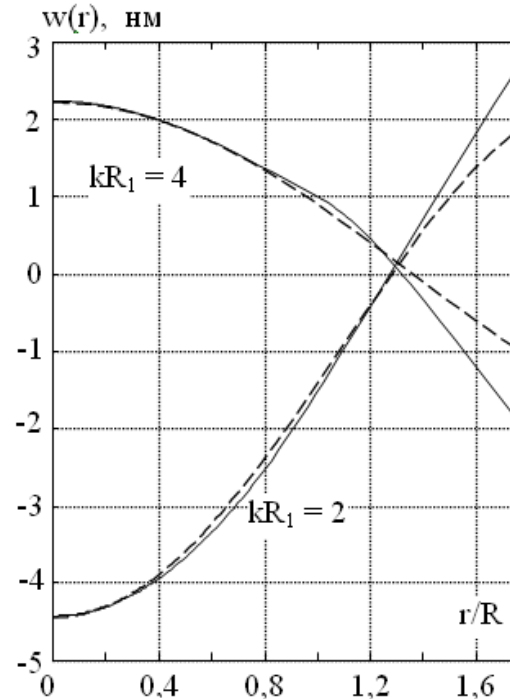


Рис. 7. Графическое изображение перемещения элементов поверхности биморфного излучателя (сплошные кривые) и полярный компонент вектора смещения материальных частиц среды, аппроксимированный суммой первых трех сферических гармоник (штриховые кривые) на частотах до и после частоты первого резонанса

Приведенные выше результаты практического использования метода коллокаций заставляют констатировать, что этому численному методу присуща неустойчивость – он не является сходящимся при любых обстоятельствах. Утверждение [5], что он расходится при равноотстоящих узлах коллокации, не соответствует реальному положению вещей. В задачах акустики, где важнейшим параметром является частота смены знака напряженно-деформированного состояния сплошной среды, сходимость метода коллокации определяется, как представляется, в первую очередь, именно этим параметром. Можно даже сказать, что метод коллокации способен доставить неожиданные результаты. Но, к сожалению, он единственный позволяет определить элементы суммы не ортогональных функций. Таким образом, практическое применение этого метода предпо-

лагает достаточно обширное предварительное исследование и, поскольку невозможно сформулировать четкие рецептурные указания по использованию метода коллокаций на все случаи жизни, постольку можно говорить, что его реализация требует проявления элементов творчества.

### 3. Количественные оценки параметров и характеристик акустического поля биморфного излучателя со свободным закреплением внешнего контура металлического диска

Одним из важнейших для практического применения технических показателей электроакустических преобразователей является размер так называемой мертвой зоны, т. е. области, из которой невозможно принять отраженный от структурной неоднородности акустический импульс. Оценка размеров мертвой зоны напрямую связана с размерами области, где существует ближнее поле преобразователя.

Авторы книги [2], замечательной по широте охвата и подаче материала, напоминая по глубине толкования физического содержания обсуждаемых результатов классическую монографию лорда Рэлея «Теория звука», определяют ближнее поле излучателя или, как иногда говорят – ближнюю зону, как область, в пределах которой практически не изменяется фаза волнового поля смещений материальных частиц. Так как материальные частицы колеблются практически синфазно (стоячая волна), то энергосенос между различными участками объема ближнего поля практически отсутствует. Стоячие волны в ближнем поле возникают в результате сложения (интерференции) сферических волн, которые излучаются различными элементами поверхности осциллирующего диска. Бегущие волны начинают образовываться на некотором расстоянии от излучателя, т. е. за пределами ближнего поля. Область, в которой существуют распространяющиеся гармонические волны, которые уносят энергию от излучателя в периферийную область упругого полупространства, называется дальним полем. Естественно, что четкую границу между ближним и дальним полем указать нельзя, но вполне возможно сформулировать некоторые приближенные оценки.

С целью выработки этих оценок рассмотрим фазу скалярного потенциала поля смещений материальных частиц, т. е. фазу избыточного давления в акустической нагрузке, на расстоянии  $g$  от центра осциллирующего диска. Для

определенности последующих рассуждений введем термин «фазовая функция». Фазовой функцией  $F_n(kr)$   $n$ -ой сферической гармоники скалярного потенциала поля смещений в акустической (продольной) волне будем называть функцию  $H_{2n+1}^{(2)}(kr)$ , т. е. сомножитель при коэффициенте  $A_{2n+1}$  в разложении (22). Аргумент  $kr$  фазовой функции можно представить в следующем виде  $kr = \Omega r^*$ , где  $\Omega = kR_1$  – безразмерная частота;  $r^* = r/R_1$  – безразмерное (относительное) удаление от центра осциллирующего диска.

Очевидно, что фаза  $\Phi_n(\Omega, r^*)$  скалярного потенциала в  $n$ -ой сферической гармонике акустической волны определяется следующим образом

$$\Phi_n(\Omega, r^*) = \text{arctg} \left[ \frac{\text{Im} F_n(\Omega, r^*)}{\text{Re} F_n(\Omega, r^*)} \right], \quad (29)$$

где символами  $\text{Im} F_n(\Omega, r^*)$  и  $\text{Re} F_n(\Omega, r^*)$  обозначены мнимая и действительная части фазовой функции

$$F_n(\Omega, r^*) \equiv F_n(kr) = J_{2n+3/2}(kr) - i N_{2n+3/2}(kr),$$

где  $J_{2n+3/2}(kr)$  и  $N_{2n+3/2}(kr)$  – функции Бесселя и Неймана полуцелого порядка.

Особенностью практического вычисления фазы  $\Phi_n(\Omega, r^*)$  является то обстоятельство, что в любом пакете программ функция арктангенс вычисляется в пределах главного значения, т. е. в пределах замкнутого интервала  $[-\pi/2, \pi/2]$ . При изменении фазы в более широких диапазонах, график функции  $\Phi_n(\Omega, r^*)$ , построенный по результатам машинных вычислений функции арктангенс, становится похожим на пилу. Последнее существенно осложняет качественный и количественный анализ изменения фазы упругих колебаний сплошной среды на произвольно больших расстояниях  $r^*$  от центра осциллирующего диска.

Для того, чтобы обойти это препятствие, рассмотрим групповое время задержки  $\tau_{gr}^{(n)}(\omega, r)$   $n$ -ой сферической гармоники скалярного потенциала поля смещений в акустической волне. Эта величина определяется следующим образом

$$\tau_{gr}^{(n)}(\omega, r) = \frac{\partial \Phi_n(\Omega, r^*)}{\partial \omega} = \hat{\tau}_{gr}^{(n)}(\Omega, r^*) \tau_0 r^*, \quad (30)$$

где  $\Phi_n(\Omega, r^*)$  - определенная выражением (29) фаза;  $\hat{\tau}_{gr}^{(n)}(\Omega, r^*)$  - безразмерное (нормированное на величину  $\tau_0$ ) время групповой задержки;  $\tau_0 = R_1/v$  - временной масштаб;  $r^* = r/R_1$  - по-прежнему, безразмерное расстояние. Нормированное время групповой задержки вычисляется следующим образом

$$\hat{\tau}_{gr}^{(n)}(\Omega, r^*) = \frac{\text{Re}F_n(x)[\text{Im}F_n(x)]' - \text{Im}F_n(x)[\text{Re}F_n(x)]'}{[\text{Re}F_n(x)]^2 + [\text{Im}F_n(x)]^2}, \quad (31)$$

где  $x = kr = \Omega r^*$ ;  $[\text{Im}F_n(x)]'$  и  $[\text{Re}F_n(x)]'$  - первые производные мнимой и действительной части фазовой функции  $F_n(x)$  по переменной  $x$ . С вычислением производных в численном виде вполне успешно справляется компьютер. В пакете MatLab эта производная достаточно точно определяется как отношение  $[F_r^{(n)}(x + \Delta x) - F_r^{(n)}(x)]/\Delta x$  уже при  $\Delta x = 0,001x$ .

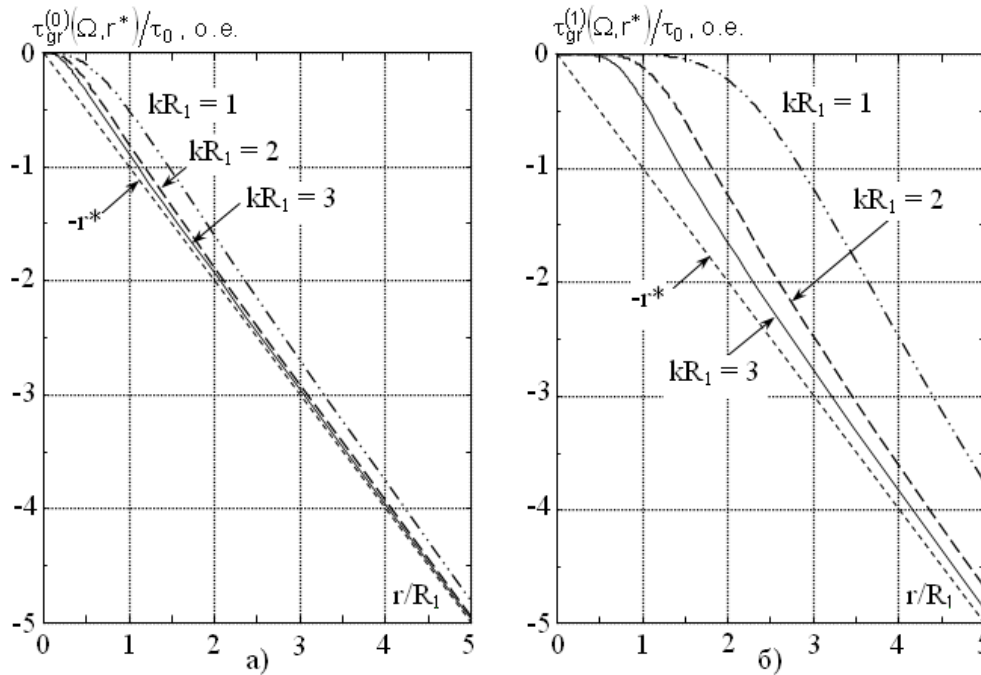


Рис. 8. Графики изменения группового времени задержки для первой (а) и второй (б) сферической гармоники по мере удаления от центра осциллирующего диска для различных безразмерных частот

На рис. 8 показаны графики изменения безразмерного группового времени задержки  $\hat{\tau}_{gr}^{(0)}(\Omega, r^*)$  (рис. 8а) и  $\hat{\tau}_{gr}^{(1)}(\Omega, r^*)$  (рис. 8б) первой и второй сферических гармоник акустической волны для различных значений безразмерной частоты  $\Omega = kR_1$  в зависимости от безразмерного удаления  $r^* = r/R_1$  от центра осциллирующего диска.

Отчетливо видно, что при малых значениях параметра  $r^*$  безразмерное групповое время задержки  $\hat{\tau}_{gr}^{(n)}(\Omega, r^*) \approx 0$ , что противоречит принципу причинно-следственных связей, т. е., попросту говоря, физическому смыслу вообще и самому определению этой величины в частности. Область, где  $\hat{\tau}_{gr}^{(n)}(\Omega, r^*) \approx 0$ , является

ближним полем для спектральной составляющей  $\Omega$   $n$ -ой сферической гармоники скалярного потенциала поля смещений в акустической волне. В этой области нет распространяющейся волны и неприменимо само понятие группового времени задержки. Когда расстояние  $r^*$  становится больше относительного радиуса полусферы, в объеме которой существует ближнее поле, безразмерное групповое время задержки  $\hat{\tau}_{gr}^{(n)}(\Omega, r^*) < 0$  и асимптотически устремляется к значению  $\hat{\tau}_{gr}^{(n)} = -r^*$ . Эта асимптота изображена на рис. 6 штриховой наклонной прямой. Легко заметить, что высокочастотные спектральные составляющие (рис. 8а) уже на сравнительно малых расстояниях от границы ближнего поля приобретают значения группового времени за-

держки  $\hat{\tau}_{gr}^{(0)}(\Omega, r^*) \cong -r^*$ . Чем точнее выполняется последнее приближенное равенство, тем ближе характеристики волнового поля к характеристикам поля в бегущей волне, т. е. дальнего поля. Следует подчеркнуть, что точное равенство  $\hat{\tau}_{gr}^{(0)}(\Omega, r^*) = -r^*$  выполняется в предельном случае, когда  $r^* \rightarrow \infty$ . Последнее означает, что дальнего поля, в его идеальном определении, не существует. Вместо этого существует бесконечно протяженная в радиальном направлении переходная область, в пределах которой характеристики волнового поля плавно изменяются от кинематических характеристик стоячей волны до характеристик бегущей гармонической волны.

Очевидно, что при решении практических задач можно ограничить размер переходной области, оговорив заранее определенную погрешность вычисления фазовых характеристик поля смещений материальных частиц сплошной среды. Если эту погрешность обозначить символом  $\eta$ , то на расстояниях  $r^* > r_0^*$ , где расстояние  $r_0^*$  определяется из условия

$$\frac{\hat{\tau}_{gr}(\Omega, r_0^*)}{r_0^*} - 1 = \eta,$$

где  $\hat{\tau}_{gr}(\Omega, r_0^*)$  - групповое время задержки суммы сферических гармоник в разложении (22);  $\eta \ll 1$  наперед заданная величина.

На рис. 9 показаны графики безразмерного группового времени задержки  $\hat{\tau}_{gr}(\Omega, r^*)$  различных спектральных компонентов акустической волны на оси  $\vartheta = 0$  (все функции Лежандра в разложении (22) при  $\vartheta = 0$  ( $\xi = 1$ ) равны плюс единице) осциллирующего диска. Акустическое поле аппроксимировано суммой трех сферических гармоник. Как и следовало ожидать, располагая результатами, представленными на рис. 8, увеличился радиальный размер области, где групповое время задержки практически равно нулю. Очевидно, что это и есть размер ближней зоны. Обозначим его символом  $r_b$ . Из представленных на рис. 9 данных следует, что  $r_b \approx \lambda/2$ , где  $\lambda$  - длина акустической волны. Вслед за ближней зоной начинается переходная область, в пределах которой происходит перестройка кинематических характеристик акустической волны. На краю этой области ки-

нематические характеристики акустической волны максимально похожи на кинематические характеристики бегущей волны. Как уже говорилось выше, размеры переходной области определяются допустимой погрешностью расчетов.

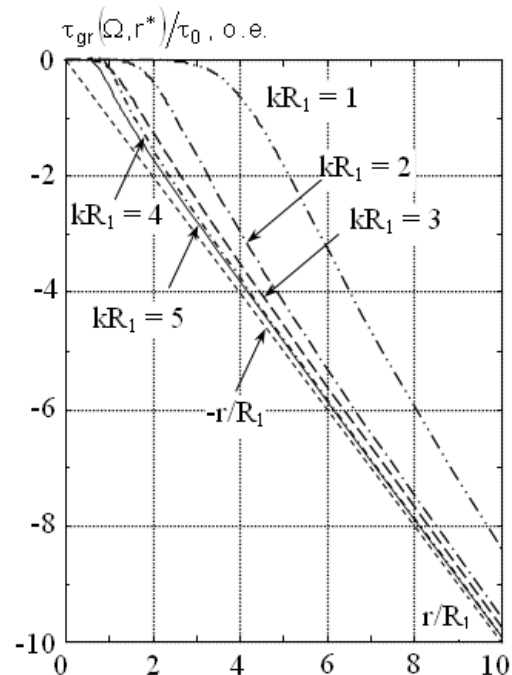


Рис. 9. Графическое изображение изменения группового времени задержки различных спектральных компонентов акустической волны на оси излучателя

Из определения (30) группового времени задержки следует, что фаза скалярного потенциала поля смещений  $n$ -ой сферической гармоники акустической волны может быть рассчитана следующим образом

$$\Phi_n(\Omega r^*) = \int_0^{\Omega r^*} \hat{\tau}_{gr}^{(n)}(\xi) d\xi + C,$$

где  $\Omega = kR_1$ ;  $C$  - константа. Так как  $\text{Im}[F_n(x)] \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow 0$ , то  $C = -\pi/2$ . Таким образом

$$\Phi_n(\Omega r^*) = \int_0^{\Omega r^*} \hat{\tau}_{gr}^{(n)}(\xi) d\xi - \pi/2. \quad (32)$$

На рис. 10 показаны результаты вычислений фазы  $\Phi_n(\Omega r^*)$  ( $n = 0, 1$ ) по формуле (32). Интеграл в формуле (32) определялся численно, как площадь под кривой группового времени задержки  $\hat{\tau}_{gr}^{(1)}(\Omega, r^*)$ . Достоверность вычислений по формуле (32) была проверена для безразмерной частоты  $\Omega = 0, 1$ , для которой арктан-

генс отношения мнимой части к действительной части фазовой функции  $F_n(\Omega, r^*)$  находится в пределах главного значения при достаточно больших значениях расстояния  $r^*$ . Расчеты по

формуле (32) и через арктангенс (встроенную функцию вычислительного пакета MatLab) совпадают в пределах погрешностей графического представления результатов расчетов в среде MatLab.

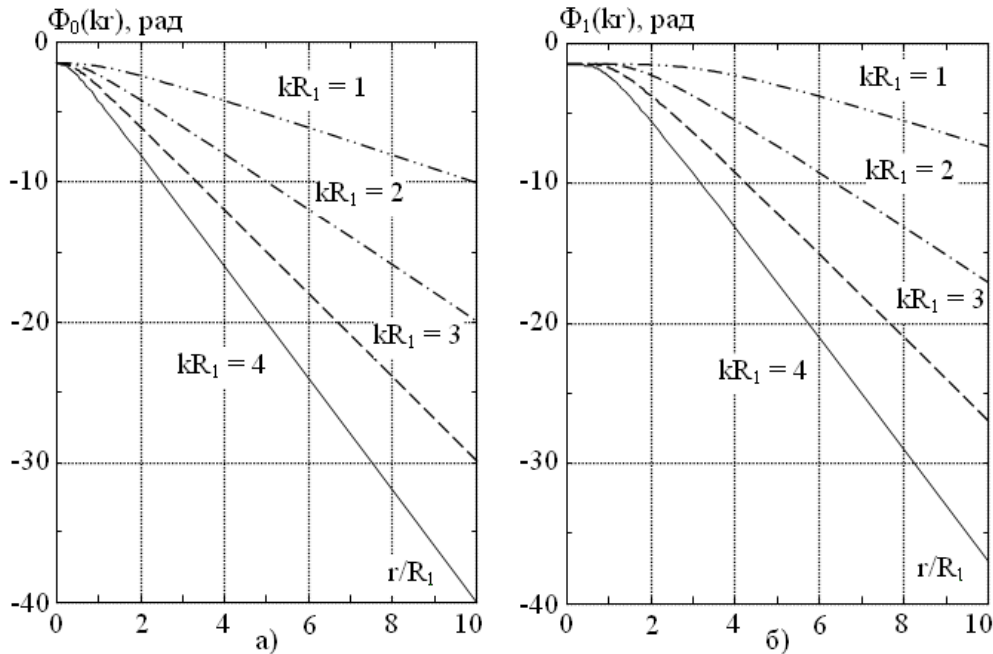


Рис. 10. Графики изменения фазы спектральных компонентов первой (а) и второй (б) сферических гармоник скалярного потенциала поля смещений в акустической волне

На рис. 11 показаны графики изменения фазы спектральных компонентов скалярного потенциала акустического поля, характеристики которого определяются суммой первых трех сферических гармоник.

Из представленных на рис. 10 и рис. 11 графиков следует, что значения фаз  $\Phi_n(\Omega r^*)$  и  $\Phi(\Omega r^*)$  после преодоления некоторого расстояния  $r^*$  образуют прямую, которая практически параллельна асимптоте  $\Omega r^*$ . Эти асимптоты показаны на рис. 11 пунктирными линиями. Если эти асимптоты проводить не из точки  $r^* = 0$ , а из некоторой точки  $r_0^* = r_0/R$ , где  $r_0$  - радиальный размер ближнего поля, то, очевидно, через некоторое расстояние  $r^* > r_0$  кривые  $\Phi(\Omega r^*)$  будут практически совпадать с прямыми (асимптотами)  $\Omega r^*$ . Сравнивая рис. 9 и рис. 11, легко заметить, что предполагаемые значения  $r_0^*$  больше значений  $r^*$ , при которых  $\hat{\tau}_{gr}(\Omega, r^*) = 0$ .

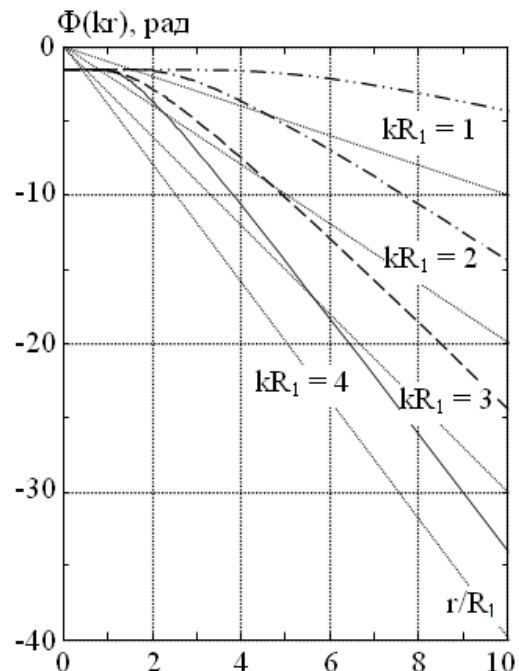


Рис. 11. Графики фаз спектральных составляющих скалярного потенциала поля смещений, аппроксимированных суммой первых трех сферических гармоник

Для определения радиального размера  $r_0^*$  ближней зоны были выполнены построения, которые показаны на рис. 12 для двух спектральных составляющих  $\Omega = kR_1 = 1$  и  $\Omega = kR_1 = 2$  скалярного потенциала акустического поля, которое аппроксимировано суммой первых трех сферических гармоник. Сплошной и штриховой кривыми на рис. 12 показано изменение фазы в радианах. Прямые пунктирные линии показывают асимптоты  $-\Omega r^*$ , которые соответствуют набегу фазы в бегущей волне с фазовой функцией  $e^{-i\Omega r^*}$ . Если в качестве границы ближнего поля принять точки  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (рис. 12), координаты которых численно равны длинам волн на безразмерных частотах  $\Omega = 1$  и  $\Omega = 2$ , и начало асимптот совместить с этими точками, то легко увидеть, что построенные таким образом прямые действительно являются асимптотами кривых набега фазы.

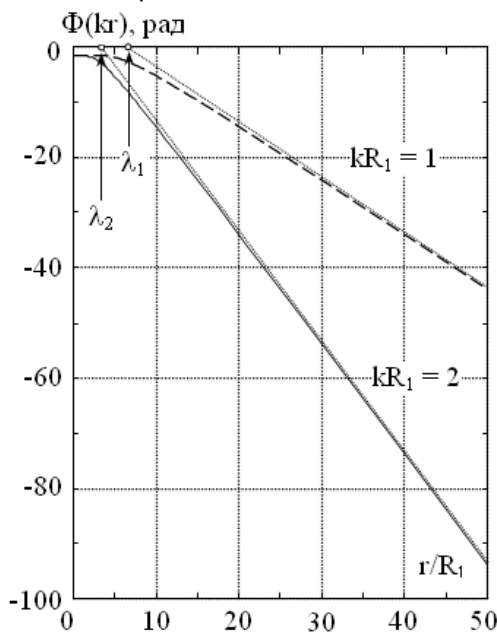


Рис. 12. Графическое изображение набега фазы при распространении спектральных составляющих акустической волны и бегущей волны (пунктирные прямые) от центра осциллирующего диска

Таким образом, получается, что радиальный размер ближнего поля равен длине волны. В дальнейшем будем использовать именно эту оценку границы ближнего поля.

При известных значениях амплитудных множителей сферических гармоник, т. е. коэффициентов  $A_{2n+1}$  расчет таких характеристик излучателя, как направленность и избыточное

давление на оси излучателя, не сопряжен с какими-либо принципиальными затруднениями.

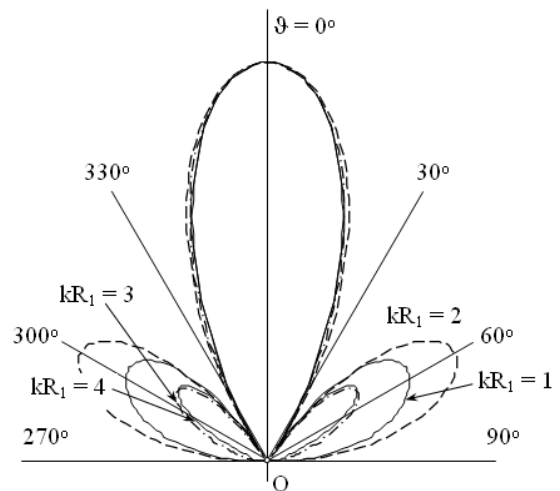


Рис. 13. Изображение углового распределения скалярного потенциала акустического поля биморфного излучателя на различных частотах

Так, на рис. 13 показаны графики углового распределения скалярного потенциала поля смещений в акустической волне, которые были построены в результате суммирования трех сферических гармоник с амплитудными множителями, значения которых показаны на рис. 6б. Все кривые нормированы на значение скалярного потенциала на оси биморфного преобразователя ( $\vartheta = 0$ ) на заданной частоте  $kR_1$ . Отчетливо видно, что с ростом частоты происходит изменение размеров и формы боковых лепестков диаграммы направленности. При этом форма центрального лепестка остается практически неизменной. Суммирование большего числа сферических гармоник сопровождается незначительными перестройками боковых лепестков диаграммы направленности биморфного излучателя. Центральный лепесток диаграммы направленности сохраняет свои размеры и форму.

Избыточное давление  $\Delta P(\vartheta, r)$  определяется следующим образом

$$\Delta P(\vartheta, r) = \Lambda \operatorname{div} \bar{u}(\vartheta, r), \quad (33)$$

где  $\Lambda$  - адиабатический модуль упругости воздушной среды; его величина определяет скорость звука в воздухе  $v = \sqrt{\Lambda/\rho_c}$  ( $\rho_c$  - плотность воздуха -  $1,2928 \text{ кг/м}^3$ );  $\bar{u}(\vartheta, r)$  - вектор смещения материальных частиц воздушной среды. Подставляя в формулу (33) определение (1) вектора смещения, получаем следующее определение избыточного давления

$$\Delta P(\vartheta, r) = \Lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi(\vartheta, r) = \Lambda \nabla^2 \Phi(\vartheta, r). \quad (34)$$

Из уравнения Гельмгольца (2) следует, что  $\nabla^2 \Phi(\vartheta, r) = -k^2 \Phi(\vartheta, r)$ . Принимая это во внимание, запишем окончательный вид формулы для расчета избыточного давления в акустическом поле биморфного излучателя

$$\Delta P(\vartheta, r) = -k^2 \Lambda \Phi(\vartheta, r) = -\rho_c \omega^2 \Phi(\vartheta, r), \quad (35)$$

где скалярный потенциал  $\Phi(\vartheta, r)$  определяется выражением (22). При известных коэффициентах  $A_{2n+1}$  расчет избыточного давления не представляет каких-либо проблем.

### Выводы

1. Предложен новый, отличающийся от известных, подход к оценке параметров и характеристик акустических полей осциллирующих дисков.

2. Выполнено исследование особенностей практического применения метода коллокаций. Показано, что этот, к сожалению единственный в данной ситуации, метод не является абсолютно устойчивым. Достоверность вычислений определяется значениями определителя алгебраической системы уравнений в полосе частот, которая содержит в себе частоту, на которой производится вычисление коэффициентов разложения в ряд по сферическим гармоникам.

3. Предложена новая методика вычисления фазовых характеристик гармонических волн, которые формируются осциллирующим диском в окружающей среде. Дана оценка размера ближнего поля излучателя.

4. Построена диаграмма направленности биморфного пьезоэлектрического излучателя, которая по своим свойствам отличается от диаграмм направленности рассчитанных на основе общеизвестной формулы Рэлея.

### Список использованных источников

1. *Вовк И.В., Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т.* Новый подход к оценке акустических свойств излучателя в виде диска // Акустичний вісник, 2008. Том 11. Вип. 3. С 13 – 26.
2. *Грінченко В.Т., Вовк І.В., Маціпура В.Т.* Основи акустики. Київ, Наукова думка, 2007. 640 с.
3. *Петрищев О.Н., Шарапов В.М., Сотула Ж.В.* Исследование параметров динамического напряженно - деформированного состояния асимметричных биморфных пьезо-керамических элементов при различных способах закрепления внешнего контура металлического диска // Вісник Черкаського державного технологічного університету. 2013. Вип.4. С.38-48.
4. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М.Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
5. Математическая энциклопедия. Том 2 Д – Коо. – М.: Советская энциклопедия, 1979. Ст. 951 – 952.
6. *Petrishchev O.N., Sharapov V.M., Sotula Zh.V.* The calculation of dynamic stress-strain state of asymmetric bimorph piezoelectric elements // Visnyk ChDTU, 2013, No. 3, pp. 48-55. [in Russian].

Поступила в редакцию 30 декабря 2013 г.

УДК 534.231-13

**Н.В. Богданова**<sup>1</sup>, канд. техн. наук, **О.М. Петрищев**<sup>1</sup>, д-р. техн. наук., **Ж.В. Сотула**<sup>2</sup>, канд. техн. наук, **В.М. Шарапов**<sup>2</sup>, д-р. техн. наук

<sup>1</sup> Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, Україна, 03056.

<sup>2</sup> Черкаський державний технологічний університет, бульв. Шевченко, 460, м. Черкаси, Україна, 18006.

## Розрахунок акустичного поля біморфного п'єзоелектричного випромінювача

Запропоновано новий, відмінний від відомих, підхід до оцінки параметрів акустичних полів осцилюючих дисків. Виконано дослідження особливостей практичного застосування методу коллокацій. Показано, що цей, на жаль єдиний у даному випадку, метод не є абсолютно стійким. Запропоновано нову методику обчислення фазових характеристик гармонійних хвиль, які форму-



ються осцилюючим диском в навколишньому середовищі. Дана оцінка розміру ближнього поля випромінювача. Бібл. 6, рис 13.

**Ключові слова:** біморфний перетворювач, акустичне поле осцилюючого диску, метод коллокації, ближнє поле, фазові характеристики.

UDC 534.231-13

**N.V. Bogdanova**<sup>1</sup>, Ph.D., **O.N. Petrishchev**<sup>1</sup>, Dr.Sc., **V. M. Sharapov**<sup>2</sup>, Dr.Sc., **Zh. V. Sotula**<sup>2</sup>, Ph.D.

<sup>1</sup> National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",

st. Polytechnique, 16, Kyiv, Ukraine, 03056.

<sup>2</sup> Cherkasy State Technological University,

Shevchenko blvd, 460, Cherkasy, Ukraine, 18006.

## Acoustic field calculation of bimorph piezoelectric transducer

*A new approach to the estimation of parameters of acoustic fields oscillating drives is proposed. The approach is different from the known. Investigation of the specific application of the collocation method is executed. This method is the only one in this case. Non-absolute stability of the method is shown. The new technique calculating the phase characteristics of harmonic waves is proposed. Evaluation time measure near-field emitter is given. References 6, figures 13.*

**Keywords:** bimorph transducer, acoustic field of the oscillating disc, collocation method, near field, phase characteristics.

### References

1. Vovk I.V., Grinshenko V.T., Matsypura V.T. (2008), "A new approach to estimation of acoustic properties of the disk-shaped sound radiator". Acoustic bulletin. Vol.11, no. 3, pp. 13 – 26 (Rus)
2. Grinshenko V.T., Vovk I.V., Matsypura V.T. (2007), "Fundamentals of acoustics". K. Naukova dumka, 640p. (Rus)
3. Petrishchev O.N., Sharapov V.M., Sotula Zh.V. (2013), "Study parameters of the dynamic stress-strain state of asymmetric bimorph piezoceramic elements for different methods of fixing the outer contour of the metal disk". Bulletin Cherkasy State Technological University. Vol.4, pp.38– 48(Rus)
4. (1979), "Reference book of mathematical functions and formulas, graphs, and mathematical tables". Ed. M. Abramowitz and I. Steagan. M.: Nauka. P. 832 (Rus)
5. (1979), "Mathematical encyclopedia". Vol.2, M.: Published «Sovetskaia encyclopedia», pp.951—952 (Rus)
6. Petrishchev O.N., Sharapov V.M., Sotula Zh.V. (2013), "The calculation of dynamic stress-strain state of asymmetric bimorph piezoelectric elements". Visnyk ChDTU, No. 3, pp. 48-55.