

УДК 534.8

К.А. Трапезон¹, канд. техн. наук, **А.Г. Трапезон**², д-р техн. наук¹Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”, пр. Победы 37, Киев-56, 03056, Украина.²Институт проблем прочности НАН Украины, ул. Тимирязевская 2, Киев-014, 01014, Украина.

К решению задачи о колебаниях круговой пластинки с толщиной, убывающей от центра по выпуклой параболе

Рассмотрена задача о собственных осесимметричных колебаниях кольцевой пластинки с толщиной, убывающей от центра по выпуклой параболе. Показан способ решения дифференциального уравнения четвертого порядка, которое описывает собственные осесимметричные колебания. Найдены собственные частоты и построены соответствующие им первые три формы колебаний для пластинки с жестким закреплением внутреннего контура. Подтверждена эффективность решения задачи методом симметрий, разработанного ранее для линейных уравнений второго порядка. Библ. 9, рис. 3, табл. 2.

Ключевые слова: *кольцевая пластинка, колебания, факторизация, метод симметрии, аппроксимация, нормальные напряжения, собственные частоты, формы колебаний.*

Введение

Конструктивные элементы в виде круговых пластинок переменной толщины находят широкое применение не только в технических устройствах общего назначения, но также и в различных акустических колебательных системах звукового и ультразвукового диапазона. Поскольку в последнем случае в процессе эксплуатации такие пластинки работают в резонансном режиме, то для изучения и анализа их колебаний и напряженно-деформированного состояния первостепенное значение имеют результаты решения задачи о их собственных колебаниях.

Постановка проблемы, краткий обзор и цель работы

Задача о колебаниях пластинок переменной толщины представляется актуальной не только для инженерной ультраакустики, но является одной из важнейших в технической теории упругости и ее различных инженерно-технических приложениях [1]. Основная проблема при реше-

нии подобных задач переносится на поиск эффективных методов решения определяющих дифференциальных уравнения и на вычисление собственных частот. В настоящее время известны точные решения, описывающие осесимметричные колебания круговых пластин в частных случаях изменения толщины по законам $h = H_0(\rho; \rho^2)$, а также по закону $h = H_0 \rho^{\frac{3\nu+1}{2}}$ при отдельных значениях $\nu = (1/9; 5/21)$, не выходящих за физически допустимые пределы ($0,5 \geq \nu > 0$) коэффициента Пуассона ν реальных конструкционных материалов. Необходимые сведения о таких решениях содержатся в источниках [2,3]. Важно обратить внимание на то, что приведенные случаи точных решений относятся к пластинкам, толщина которых возрастает от нуля в центре до максимума на крае, что является очевидным ограничением для широкого использования их на практике.

Для пластинок, толщина которых $h = H_0 \rho^\alpha$ (α – произвольное число) убывает от $h = \infty$ в центре до конечных значений на крае, что имеет место при $\alpha < 0$, решение задачи получено в виде произведений степенных и обобщенных гипергеометрических функций [4]. Очевидно, что для сплошных пластинок результаты этой работы не пригодны по определению, а что касается кольцевых пластинок, то результаты вычисления частотных параметров, представленные здесь в виде графических зависимостей от отношения наружного и внутреннего диаметров для значений $\alpha = (0; 0,5; -0,5; -1; -1,5)$ без указания конкретных численных данных, для практики могут иметь ограниченное использование и лишь в роли ориентировочных, тем более, что эти параметры найдены только для форм без узловых окружностей. При помощи асимптотических методов эта же задача при жесткой заделке обоих контуров рассмотрена в [5]. Ре-

зультаты, полученные в этой работе, позволяют давать качественные оценки частот. Показано, в частности, что приближенные решения, приводящие к асимптотическому частотному уравнению, тем точнее, чем выше номер частоты и формы колебаний.

Для пластинок, центральная часть которых является сплошной, исключая случай $h(0) = \infty$, т.е. $h(0) \neq 0$, решения задачи в конечном (замкнутом) виде не обнаружено. Для расчета колебаний таких пластинок прибегают к приближенным методам, например, с использованием асимптотических интегралов исходного уравнения в виде балочных функций или при помощи метода Ритца [2]. В монографии [3] приведено решение задачи об осесимметричных колебаниях пластинки толщиной $h(\rho) = H_0(1 - \rho)$, построенное в гипергеометрических функциях только для основной формы колебаний. В работе [6] получено решение этой же задачи методом симметрий [7] с вычислением первых трех частот, построением соответствующих им форм колебаний и эпюр циклических напряжений в пластинке. Эффективность этого нового метода подтверждена взаимным сопоставлением результатов работ [3] и [6].

Целью настоящей статьи является дальнейшее расширение набора аналитических ре-

шений задачи о колебаниях пластинок переменной толщины на примере случая параболы $h = H_0(1 - \mu^2 \rho^2)$, где H_0, μ^2 – постоянные, ρ – переменный радиус (рис.1).

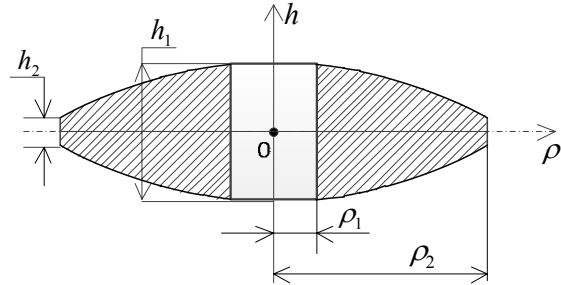


Рис. 1. Эскиз кольцевой пластинки

Исходное дифференциальное уравнение и его преобразование

Волновое уравнение IV порядка, описывающее осесимметричные колебания $W = W(\rho) \cos \omega t$ круговой пластинки толщиной $h = H_0 H(\rho)$, которое приведено в работе [6], после отделения временной части $\cos \omega t$ ($\omega = 2\pi f$ – круговая частота собственных колебаний; f – линейная частота) принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$W^{(4)} + 2 \frac{(\rho H^3)'}{\rho H^3} W''' + \left[\frac{(H^3)''}{H^3} + \frac{(H^{6+3\nu} / \rho)'}{H^{6+3\nu}} \right] W'' + \frac{1}{\rho H^3} \left[\nu (H^3)' - \frac{H^3}{\rho} \right] W' - \frac{\lambda^4}{H^2} W = 0, \quad (1)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{\omega \cdot R^2}{H_0} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\gamma}{gE}}; \quad (2)$$

$\rho = \frac{r}{R}$ – относительный радиус; r – переменный радиус; R – постоянный радиус; ν, E, γ – соответственно коэффициент Пуассона, модуль упругости и удельный вес материала пластинки; g – ускорение силы тяжести.

Если значение коэффициента Пуассона принять равным $1/3$, что допустимо для большинства конструкционных металлических материалов, то при $H = 1 - \mu^2 \rho^2$ уравнение (1) можно записать в виде

$$\left[H \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{(H^2 \rho)'}{H \rho} \frac{d}{d\rho} + 2\mu^2 \right] \times \left[HW'' + \frac{(H^2 \rho)'}{H \rho} W' + 2\mu^2 W \right] - (\lambda^4 - 4\mu^4) W = 0 \quad (3)$$

Такое представление позволяет согласно методу факторизации заменить уравнение IV порядка (3) двумя уравнениями II порядка

$$HW'' + \frac{(H^2 \rho)'}{H \rho} W' + 2\mu^2 W \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4} W = 0 \quad (4)$$

и тогда общее решение уравнения (3) будет найдено как сумма общих решений этих двух уравнений $W = W_1 + W_2$, где W_1 – решение уравнения (4) при знаке “плюс” перед $\sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4}$, а W_2 – при знаке “минус”. После внесения в (4) выражения $H = 1 - \mu^2 \rho^2$ получим уравнение

$$W'' + \frac{\left[(1 - \mu^2 \rho^2)^2 \rho \right]'}{(1 - \mu^2 \rho^2)^2 \rho} W' + \frac{k_*^2}{(1 - \mu^2 \rho^2)} W = 0, \quad (5)$$

где

$$k_*^2 = 2\mu^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4} = \mu^2 \left[2 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^4 - 4} \right].$$

Решения такого типа уравнений в замкнутом виде неизвестны, исходя из чего используем метод симметрий, изложенный по отношению к уравнениям второго порядка в работе [7].

Схема метода симметрий для разрешающих уравнений

Преобразуя (5) путем замены переменной $\rho = \rho(x)$ к виду

$$W_{xx} + \frac{F_x}{F} W_x + k^2 W = 0, \quad (6)$$

где $k^2 = \text{const}$; $W_x = \frac{dW}{dx}$; $W_{xx} = \frac{d^2W}{dx^2}$, получим уравнение, выраженное через переменную $x(\rho)$,

$$x_\rho^2 W_{xx} + \left\{ x_{\rho\rho} + \frac{\left[(1 - \mu^2 \rho^2)^2 \rho \right]'}{(1 - \mu^2 \rho^2)^2 \rho} x_\rho \right\} \times \quad (7)$$

$$\times W_x + \frac{k_*^2}{1 - \mu^2 \rho^2} W = 0.$$

$$\text{Требуем, чтобы } x_\rho^2 = \left(\frac{dx}{d\rho} \right)^2 = \frac{C_1^2}{1 - \mu^2 \rho^2},$$

откуда

$$x = C_1 \int \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \mu^2 \rho^2}} + C_2 = \frac{C_1}{\mu} \arcsin \mu \rho + C_2; \quad (8)$$

$$\rho = \frac{1}{\mu} \sin \frac{(x - C_2)\mu}{C_1}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Выражение при W_x в уравнении (7), деленное на x_ρ^2 , представим в виде F_x / F , т.е.

$$\frac{F_x}{F} = \frac{1}{x_\rho} \left[\frac{x_{\rho\rho}}{x_\rho} + \frac{\left[(1 - \mu^2 \rho^2)^2 \rho \right]'}{(1 - \mu^2 \rho^2)^2 \rho} \right] = \frac{\left[x_\rho \cdot \rho \cdot (1 - \mu^2 \rho^2)^2 \right]'}{\left[x_\rho \cdot \rho \cdot (1 - \mu^2 \rho^2)^2 \right]}.$$

Отсюда следует

$$F = x_\rho \cdot \rho \cdot (1 - \mu^2 \rho^2)^2 = \frac{C_1 \rho \cdot (1 - \mu^2 \rho^2)^2}{\sqrt{1 - \mu^2 \rho^2}} = C_1 \rho (1 - \mu^2 \rho^2)^{3/2}$$

или в переменной x

$$F = \frac{C_1}{\mu} \sin \frac{(x - C_2)\mu}{C_1} \left[1 - \sin^2 \frac{(x - C_2)\mu}{C_1} \right]^{3/2} = \quad (9)$$

$$= F_0 \sin \frac{x - C_2}{C_1 / \mu} \cos^3 \frac{x - C_2}{C_1 / \mu}.$$

При этом значение постоянной k^2 в уравнении (6) будет

$$k^2 = \frac{k_*^2}{C_1^2} = \frac{2\mu^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4}}{C_1^2} = \frac{\mu^2}{C_1^2} \left[2 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^4 - 4} \right]. \quad (10)$$

Постоянные μ, C_1, C_2 в вышеприведенных выражениях выбираем, исходя из удобства и практических соображений. В данном случае учитывая, что ранее в работе [6] рассмотрена задача для случая $h = H_0(1 - \rho)$ при отношении предельных толщин $h_1/h_2 = 1,8$ на границах $\rho_1 = 0,1$ и $\rho_2 = 0,5$ кольцевой пластинки, то для сохранения этого отношения при $h = H_0(1 - \mu^2 \rho^2)$ и при тех же границах $\rho = 0,1 \div 0,5$ получим $\mu = 1,3484$. Отсюда, например, при $C_1 = \mu/2$ и $C_2 = 0$, границам $\rho_1 = 0,1$ и $\rho_2 = 0,5$ будут соответствовать согласно (8) границы $x_1 = 0,067626$ и $x_2 = 0,36994$. При этом в соответствии с (9) и (10) также получим

$$F = F_0 \sin 2x \cos^3 2x;$$

$$k^2 = 4 \left(2 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4} \right), \quad (11)$$

где F_0 – произвольно выбираемый коэффициент, поскольку при любом F_0 отношение F_x / F остается неизменным. Сохранение отношения $h_1 / h_2 = 1,8$ целесообразно с точки зрения возможных обобщений и/или соответствующих выводов по результатам сравнения данных, полученных при изучении случаев $h = H_0(1 - \rho)$ и $h = H_0(1 - \mu^2 \rho^2)$.

Уравнения (6) при данном $F(x)$ неразрешимы в элементарных или известных специальных функциях, поэтому будем разыскивать их реше-

ния после аппроксимации выражения $F(x) = D^2(x)$ функцией $F_1(x) = D_1^2(x)$, при которой требуемые решения могут быть получены.

В качестве аппроксимирующей принимаем функцию

$$D_1(x) = D_{01} \sqrt{x} J_0(mx), \quad (12)$$

которая при надлежаще выбранных постоянных D_{01} и m с максимально возможным приближением на заданном интервале $x = x_1 \div x_2$ должна соответствовать выражению

$$D(x) = \sqrt{F(x)} = \sqrt{\sin 2x \cos^3 2x} = \sqrt[4]{\cos^6 2x - \cos^8 2x}, \quad (13)$$

следующему из (11). На рисунке 2 приведены графики изменения D и D_1 построенные согласно (12) и (13) при $D_{01} = 1,41566$ и $m = 3,63$.

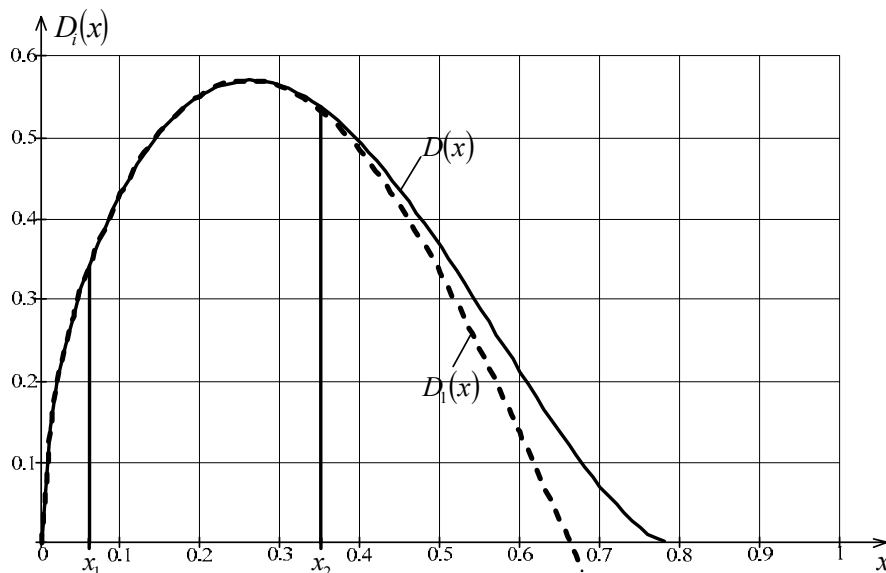


Рис. 2. Графики функции D и D_1

Как видно из рис. 2, на интервале $x = 0,0676 \div 0,3699$ совпадение D и D_1 вполне удовлетворительно. В таблице 1 приведены также результаты вычислений D и D_1 при раз-

личных значениях x , из которых заключаем, что количественное несоответствие функций (12) и (13) на выбранном интервале не существенно и в среднем не превышает по абсолютному значению величины $\delta_{cp} = 0,21\%$.

Таблица 1. Значения функций $D(x)$ и $D_1(x)$ на интервале $x = 0 \div 0,37$

x	0	0,025	0,05	0,0676	0,1	0,15	0,2	0,25	0,2618	0,3	0,35	0,37
D	0	0,2231	0,3135	0,3621	0,4324	0,507	0,5516	0,5692	0,5698	0,5634	0,5368	0,5211
D_1	0	0,2233	0,3139	0,3625	0,433	0,508	0,5523	0,5694	0,5697	0,5619	0,5321	0,5143
$\delta = \left(\frac{D}{D_1} - 1 \right) \times 100\%$		-0,100	-0,107	-0,114	-0,130	-0,149	-0,134	-0,029	0,017	0,258	0,892	1,3

По определению при выбранной функции $F_1 = D_1^2 = D_{01}^2 x J_0^2(mx)$ уравнения (6) должны иметь точные решения. В данном случае эти уравнения переписуются в виде

$$W_{1,2}'' + 2 \frac{(\sqrt{x} J_0(mx))'}{\sqrt{x} J_0(mx)} W_{1,2}' + k_{1,2}^2 W_{1,2} = 0, \quad (14)$$

где согласно (11)

$$k_1^2 = 4 \left(2 + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4} \right);$$

$$k_2^2 = 4 \left(2 - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4} \right).$$

Их точные решения, исходя из метода симметрий, имеют вид

$$W_1 = \frac{A J_0(\alpha x) + B Y_0(\alpha x)}{J_0(mx)};$$

$$W_2 = \frac{A_1 I_0(\beta x) + B_1 K_0(\beta x)}{J_0(mx)} \quad (15)$$

где

$$\alpha^2 = 4 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4 + (m^2 + 8)};$$

$$\beta^2 = 4 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4 - (m^2 + 8)}.$$

Общее решение задачи как сумма W_1 и W_2 будет

$$W = \frac{1}{J_0(mx)} \times [A J_0(\alpha x) + B Y_0(\alpha x) + A_1 I_0(\beta x) + B_1 K_0(\beta x)], \quad (16)$$

Последнее условие можно упростить, после внесения в него W_{xx} из третьего условия, в результате получим

$$\left(W_{xxx} - \frac{16 \cos^2 2x}{3 \sin^2 2x} W_x \right)_{x=x_2} = 0.$$

где A, B, A_1, B_1 – постоянные, значения которых зависят от граничных условий задачи.

Решение для кольцевой пластинки с жестким закреплением внутреннего контура

Рассмотрим задачу о колебаниях кольцевой пластинки жестко закрепленной при $\rho_1 = 0,1$ и свободной на крае при $\rho_2 = 0,5$ (рис.1). При жесткой заделке прогибы и углы поворота элементов пластинки должны быть равны нулю, т.е.

$$(W)_{\rho=\rho_1} = 0; (W_\rho)_{\rho=\rho_1} = 0. \quad (17)$$

На свободном крае при осесимметричном деформировании радиальные изгибающие моменты и перерезывающие силы равны нулю, т.е. [8]

$$\left(W_{\rho\rho} + \frac{\nu}{\rho} W_\rho \right)_{\rho=\rho_2} = 0;$$

$$\left(W_{\rho\rho\rho} + \frac{1}{\rho} W_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho^2} W_\rho \right)_{\rho=\rho_2} = 0. \quad (18)$$

При переходе к переменной $x(\rho)$ условия (17) и (18) необходимо переписать, исходя из зависимостей (8) при $C_1 = \mu/2$ и $C_2 = 0$, т.е.

полагая $x = \frac{1}{2} \arcsin \mu \rho$ ($\rho = \frac{1}{\mu} \sin 2x$). Таким

образом, при $\nu = 1/3$ эти условия принимают соответственно вид

$$\left. \begin{aligned} (W)_{x=x_1} &= 0 \\ (W_x)_{x=x_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left[W_{xx} + 2 \left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{1 \cos 2x}{3 \sin 2x} \right) W_x \right]_{x=x_2} = 0;$$

$$\left[W_{xxx} + 2 \cdot \left(\frac{3 \sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \right) W_{xx} + 4 \cdot \left(\frac{3}{\cos^2 2x} - \frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} - 1 \right) W_x \right]_{x=x_2} = 0.$$

$$\text{Обозначим } \left(\frac{16 \cos^2 2x}{3 \sin^2 2x} \right)_{x=x_2} = q;$$

$$\left[2 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{1 \cos 2x}{3 \sin 2x} \right) \right]_{x=x_2} = p, \text{ тогда условия}$$

при $x = x_2$ переписуются в виде

$$(W_{xx} + p W_x)_{x=x_2} = 0; (W_{xxx} - q W_x)_{x=x_2} = 0. \quad (20)$$

Образует производные $W_x = W'$; $W_{xx} = W''$; $W_{xxx} = W'''$ от функции (16). Для удобства обозначим $W = yZ$, где

$$y = \frac{1}{J_0(mx)};$$

$$Z = AJ_0(\alpha x) + BY_0(\alpha x) + A_1I_0(\beta x) + B_1K_0(\beta x).$$

Тогда

$$W' = yZ' + yZ''; \quad W'' = y''Z + 2y'Z' + yZ'';$$

$W''' = y'''Z + 3y''Z' + 3y'Z'' + yZ'''$. Используя формулы дифференцирования бесселевых функций [9] получим

$$y' = m \frac{J_1(mx)}{J_0^2(mx)};$$

$$y'' = m^2 \frac{J_1(mx)}{J_0^2(mx)} \left[\frac{J_0(mx)}{J_1(mx)} + 2 \frac{J_1(mx)}{J_0(mx)} - \frac{1}{mx} \right],$$

И тогда условия (20) с учетом введенной замены переписываются следующим образом

$$\left[Z'' + Z' \left(p + 2 \frac{y'}{y} \right) + Z \left(p \frac{y'}{y} + \frac{y''}{y} \right) \right]_{x=x_2} = 0;$$

$$\left[Z''' + Z'' \left(3 \frac{y''}{y} - 6 \frac{y'^2}{y^2} - 3p \frac{y'}{y} - q \right) + Z' \left(\frac{y'''}{y} - 3 \frac{y'y''}{y^2} - q \frac{y'}{y} - 3p \frac{y'^2}{y^2} \right) \right]_{x=x_2} = 0,$$

где в последнем выражении для некоторого упрощения внесли Z'' из первого условия во второе.

Далее необходимо вычислить p, q, y, y', y'', y''' и значения образуемых этими величинами вышеприведённых выражений при $x_2 = 0,37$ и $m = 3,63$. В частности получим

$$p = 2,5563; \quad q = 6,3969; \quad p + 2 \frac{y'}{y} = 9,01055;$$

$$p \frac{y'}{y} + \frac{y''}{y} = 33,5331;$$

$$3 \frac{y''}{y} - 6 \frac{y'^2}{y^2} - 3p \frac{y'}{y} - q = -17,78062;$$

$$\frac{y'''}{y} - 3 \frac{y'y''}{y^2} - q \frac{y'}{y} - 3p \frac{y'^2}{y^2} = -88,37118.$$

В результате имеем два условия при $x = x_2$

$$\left. \begin{aligned} Z'' + 9,01055Z' + 33,5331Z &= 0 \\ Z''' - 17,78062Z'' - 88,37118Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Условия (19) и (21) в развернутом виде приводят к системе следующих однородных урав-

нений относительно четырех неизвестных постоянных A, B, A_1, B_1

$$\left. \begin{aligned} Aa + Bb + A_1c + B_1d &= 0 \\ Aa_1 + Bb_1 + A_1c_1 + B_1d_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ из условий (19) при } x = x_1 = 0,0676$$

(22)

$$\left. \begin{aligned} Aa_2 + Bb_2 + A_1c_2 + B_1d_2 &= 0 \\ Aa_3 + Bb_3 + A_1c_3 + B_1d_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ из условий (21) при } x = x_2 = 0,37$$

где

$$\begin{aligned} a &= J_0(\alpha x_1); & b &= Y_0(\alpha x_1); & c &= I_0(\beta x_1); \\ d &= K_0(\beta x_1); & a_1 &= -\alpha J_1(\alpha x_1); & b_1 &= -\alpha Y_1(\alpha x_1); \\ c_1 &= \beta I_1(\beta x_1); & d_1 &= -\beta K_1(\beta x_1); \end{aligned}$$

$$a_2 = (b^* - \alpha^2)J_0(\alpha x_2) + \alpha \left(\frac{1}{x_2} - a^* \right) J_1(\alpha x_2);$$

$$b_2 = (b^* - \alpha^2)Y_0(\alpha x_2) + \alpha \left(\frac{1}{x_2} - a^* \right) Y_1(\alpha x_2);$$

$$c_2 = (b^* + \beta^2)I_0(\beta x_2) + \beta \left(a^* - \frac{1}{x_2} \right) I_1(\beta x_2);$$

$$d_2 = (b^* + \beta^2)K_0(\beta x_2) - \beta \left(a^* - \frac{1}{x_2} \right) K_1(\beta x_2);$$

$$a_3 = \left(d^* + \frac{\alpha^2}{x_2} \right) J_0(\alpha x_2) + \alpha \left(\alpha^2 - c^* - \frac{2}{x_2^2} \right) J_1(\alpha x_2);$$

$$b_3 = \left(d^* + \frac{\alpha^2}{x_2} \right) Y_0(\alpha x_2) + \alpha \left(\alpha^2 - c^* - \frac{2}{x_2^2} \right) Y_1(\alpha x_2);$$

$$c_3 = \left(d^* - \frac{\beta^2}{x_2} \right) I_0(\beta x_2) + \beta \left(\beta^2 + c^* + \frac{2}{x_2^2} \right) I_1(\beta x_2);$$

$$d_3 = \left(d^* - \frac{\beta^2}{x_2} \right) K_0(\beta x_2) - \beta \left(\beta^2 + c^* + \frac{2}{x_2^2} \right) K_1(\beta x_2).$$

При этом согласно (21): $a^* = 9,01055$; $b^* = 33,5331$; $c^* = -17,78062$; $d^* = -88,37118$.

Из равенства нулю определителя системы (22) следует частотное уравнение, откуда вычисляются параметры α или

$$\beta = \sqrt{\alpha^2 - 2(m^2 + 8)},$$

которые связаны с частотой посредством формулы (2) и соотношениями при выражениях (15). Путем преобразований систему (22) можно заменить системой двух однородных уравнений относительно двух неизвестных, например A_1, B_1 . В таком случае вме-

сто частотного уравнения, полученного на основе определителя IV порядка легко получить эквивалентное частотное уравнение, приравняв нулю определитель следующей системы двух уравнений

$$A_1 L_1 + B_1 L_2 = 0; \quad A_1 L_3 + B_1 L_4 = 0.$$

Частотное равнение, следовательно, будет

$$L_1 L_4 - L_2 L_3 = 0, \quad (23)$$

где

$$L_1 = \frac{ca_1 - c_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{ca_2 - c_2 a}{ba_2 - b_2 a};$$

$$L_2 = \frac{da_1 - d_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{da_2 - d_2 a}{ba_2 - b_2 a};$$

$$L_3 = \frac{ca_1 - c_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{ca_3 - c_3 a}{ba_3 - b_3 a};$$

$$L_4 = \frac{da_1 - d_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{da_3 - d_3 a}{ba_3 - b_3 a}.$$

После вычисления корней уравнения (23) можно вычислить отношения амплитудных коэффициентов по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} &= -\frac{L_2}{L_1} = -\frac{L_4}{L_3} \\ \frac{B}{B_1} &= -\left(\frac{A_1 ca_1 - c_1 a}{B_1 ba_1 - b_1 a} + \frac{da_1 - d_1 a}{ba_1 - b_1 a} \right) \\ \frac{A}{B_1} &= -\left(\frac{B b}{B_1 a} + \frac{A_1 c}{B_1 a} + \frac{d}{a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Корни уравнения (23) получили посредством последовательного вычисления величин $\Delta_j = L_1 L_4 - L_2 L_3$ при произвольно выбираемых α_j , добиваясь чтобы $\Delta_j = 0$. В результате найдены следующие три корня

$$\alpha_1 = 8,30186; \quad \alpha_2 = 16,59807; \quad \alpha_3 = 26,61502,$$

чему соответствуют согласно зависимости

$$\alpha^2 = 4\sqrt{(\lambda/\mu)^4 - 4 + (m^2 + 8)}$$

частотные параметры λ_i при заданных исходных значениях $\mu = 1,3484; \quad m = 3,63; \quad \lambda_1 = 4,69088;$
 $\lambda_2 = 10,75438; \quad \lambda_3 = 17,67419. \quad (25)$

При помощи коэффициентов системы (22), вычисленных с использованием найденных корней α_i и β_i , вычисляются амплитудные коэффициенты и строятся формы собственных колебаний кольцевой пластинки.

Например, при $\alpha_1 = 8,30186$ и $\beta_1 = 5,15443$ имеем

$$a = 0,9228; \quad b = -0,35881; \quad c = 1,03058; \quad d = 1,23;$$

$$a_1 = -2,23901; \quad b_1 = 11,0759; \quad c_1 = 0,91166; \quad d_1 = -13,2599;$$

$$a_2 = -6,3031; \quad b_2 = -30,44747;$$

$$c_2 = 175,89874; \quad d_2 = 2,53392; \quad a_3 = 158,91554;$$

$$b_3 = 239,80808; \quad c_3 = -166,64669; \quad d_3 = -39,52897.$$

Отсюда согласно (24) для первой формы колебаний получим:

$$\frac{A_1}{B_1} = 0,113906; \quad \frac{B}{B_1} = 0,967194; \quad \frac{A}{B_1} = -1,091334.$$

Не выписывая коэффициентов a, b, c, \dots , вычисленных при α_2 и α_3 , приведем сразу значения амплитудных коэффициентов, необходимых для построения второй и третьей форм колебаний, т.е. соответственно для $\alpha_2 = 16,59807$

$$\frac{A_1}{B_1} = -2,32488 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{B}{B_1} = 0,321328; \quad \frac{A}{B_1} = -0,6432399,$$

и для $\alpha_3 = 26,61502$

$$\frac{A_1}{B_1} = 2,834697 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{B}{B_1} = -0,073488; \quad \frac{A}{B_1} = -0,356657.$$

При построении форм колебаний используем функцию прогибов (16) выраженную через переменную ρ согласно зависимости $x = \arcsin \mu \rho / 2$ и записанную в виде

$$W_i = \frac{B_1}{J_0(mx)} \times \left[\frac{A}{B_1} J_0(\alpha_i x) + \frac{B}{B_1} Y_0(\alpha_i x) + \frac{A_1}{B_1} I_0(\beta_i x) + K_0(\beta_i x) \right],$$

где при известных $A/B_1, B/B_1, A_1/B_1$ параметр B_1 является свободно выбираемой величиной, используемой в данном случае для нормировки W_i таким образом, чтобы $W_i(\rho = 0,5) = 1$. На рис. 3 представлены первые три формы собственных колебаний пластинки. Величины нормирующих коэффициентов B_1 для W_1, W_2, W_3 равны соответственно 0,584727; -1,889525; 4,617478.

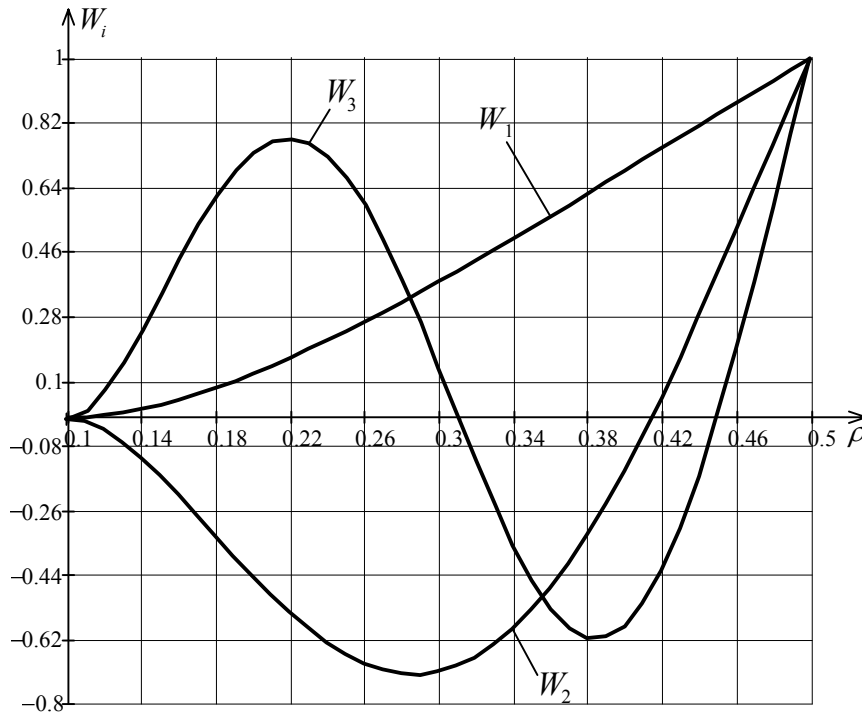


Рис. 3. Графическое изображение распределения прогибов при первых трех формах колебаний пластинки

Представляет некоторый практический интерес сравнение полученных результатов, относящихся к собственным частотам и формам колебаний, с аналогичными результатами для пластинки вида $h = H_0(1 - \rho)$, рассмотренной ранее [6].

Для возможности корректного сравнения колебаний этих пластинок при выборе их исходных геометрических параметров заранее обеспечены равными граничные размеры ($\rho_1 = 0,1; \rho_2 = 0,5$) и соотношение предельных толщин $h(\rho_1)/h(\rho_2) = 1,8$. Из визуального сравнения конфигураций этих пластинок замечено, что заявленная пластинка толщиной $h = H_0(1 - \mu^2 \rho^2)$ должна быть более жесткой по сравнению с пластинкой линейно-переменной

толщины $h = H_0(1 - \rho)$ [6], поскольку площадь поперечного сечения ее больше. Это означает, что собственные частоты ее изгибных колебаний должны быть выше. В таблице 2 для количественного сравнения приведены частотные параметры λ_i , координаты ρ_{0i} узлов окружностей, т.е. тех ρ , при которых W_i ; координаты ρ_{mi} пучностей, т.е. максимальных по абсолютной величине прогибов W_{max} и значения этих прогибов. Из таблицы 2 следует, что частоты (числа λ_i) пластинки линейно-переменной толщины [6], как и предполагалось, действительно ниже соответствующих им значений (25) на (8;8,23;7,92)%. Остальные характерные параметры, как следует из таблицы 2, различаются менее существенно или практически совпадают.

Таблица 2. Результаты расчета колебаний пластинок переменной толщины

Толщина пластинки h/H_0	Частотные параметры λ_i			Координаты узлов ρ_{0i}			Координаты пучностей ρ_{mi}			Прогибы при ρ_{mi} , $W_i(\rho_{mi})$		
	λ_1	λ_2	λ_3	ρ_{01}	ρ_{02}	ρ_{03}	ρ_{m1}	ρ_{m2}	ρ_{m3}	$W_1(\rho_{m1})$	$W_2(\rho_{m2})$	$W_3(\rho_{m3})$
$1 - \mu^2 \rho^2$	4,6908	10,7543	17,6741	0,1	0,1; 0,4144	0,1; 0,3105; 0,4499	0,5	0,2875; 0,5	0,2187; 0,3846; 0,5	1	0,7125; 1	0,777; 0,614; 1
$1 - \rho$	4,3406	9,9364	16,9758	0,1	0,1; 0,417	0,1; 0,3102; 0,4508	0,5	0,291; 0,5	0,222; 0,3853; 0,5	1	0,74; 1	0,827; 0,645; 1

Так, экстремальные прогибы $W_i(\rho_{mi})$ исследуемой пластинки несколько ниже прогибов альтернативной как менее жесткой, а положения узловых окружностей (координаты ρ_{0i}) и окружностей пучностей (координаты ρ_{mi}) практически неизменны.

Располагая функцией прогибов W_i , можно получить выражения для радиальных σ_r и окружных σ_θ нормальных напряжений, возникающих в колеблющейся пластинке, изучить их распределение и в целом сделать анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) пластинки. В данном случае несущественное различие почти по всем параметрам, установленное по результатам сравнения двух разновидностей пластинки (табл.2) позволяет для оценки НДС пластинки $h = H_0(1 - \mu^2 \rho^2)$ использовать результаты, касающиеся распределения σ_r и σ_θ , установленные ранее [6] для кольцевой пластинки $h = H_0(1 - \rho)$. Более того, даже количественные данные, полученные в [6], можно непосредственно использовать для приближенной оценки НДС, не прибегая к выкладкам и вычислениям типа тех, что приведены в [6].

Новизна результатов работы заключается в разработке метода и алгоритме его реализации для решения задачи о колебаниях пластинки с толщиной $h = H_0(1 - \mu^2 \rho^2)$ параболического типа, убывающей от центра к краю. Практическое значение теоретических результатов состоит в возможности непосредственного использования расчетных данных, полученных в работе, в частности, для рационального проектирования резонансных звуковых и ультразвуковых систем на основе пластинок как акустически активных элементов. Алгоритм решения проблемы в случае значений коэффициента μ^2 , отличных от приведенных в работе, остается неизменным, однако может потребоваться видоизменение аппроксимирующей функции (12), что согласно методу симметрий не представляет принципиальных затруднений.

Выводы

- Решена задача о колебаниях кольцевой пластинки с толщиной, убывающей от центра по выпуклой параболе $h = H_0(1 - \mu^2 \rho^2)$.

- Получены уравнения частот и осесимметричных форм собственных колебаний для кольцевой пластинки с жестким закреплением внутреннего контура.
- Вычислены первые три частоты и построены соответствующие им собственные формы.
- Подтверждена эффективность решения задачи методом симметрий, разработанного ранее для линейных уравнений второго порядка.
- Отмечена для данного случая возможность приближенной оценки напряженно-деформированного состояния пластинки на основе результатов, полученных ранее для пластинки линейно-переменной толщины.

Список использованных источников

1. Бицено К.Б., Граммель Р. Техническая динамика : Т. II. — М.: ГИТТЛ, 1952. — 638 с.
2. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек: Справочное пособие. — К.: Наукова думка, 1964. — 288 с.
3. Коваленко А.Д. Круглые пластинки переменной толщины. — М.: Физматгиз, 1959. — 294 с.
4. Лизарев А.Д., Кузьменцов В.П. Свободные колебания кольцевых пластин переменной толщины // Проблемы прочности. — 1980. — № 4. — С. 96—99.
5. Лизарев А.Д., Адамчик В.С. Асимптотический анализ влияния параметров на собственные частоты колебаний упругих систем // Проблемы прочности. — 1989. — № 2. — С. 90—95.
6. Трапезон К.А. Метод симметрий при колебаниях круговых пластинок переменной толщины // Электроника и связь. — 2012. — № 6. — С. 66—76.
7. Трапезон К.А. Обобщенный метод симметрий при изучении колебаний упругих элементов // Электроника и связь. — 2012. — № 2. — С. 31—34.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. — М.: Физматгиз, 1963. — 636 с.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

Поступила в редакцию 20 декабря 2013 г.

УДК 534.8

К.О. Трапезон¹, канд. техн. наук, **О.Г. Трапезон**², д-р техн. наук¹Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”, пр. Перемоги 37, Київ-56, 03056, Україна.²Інститут проблем міцності НАН України, вул. Тимірязєвська 2, Київ-014, 01014, Україна.

До розв’язку задачі про коливання круглої пластинки, товщина якої зменшується від центру по випуклій параболі

Розглянуто задачу про власні вісесиметричні коливання кільцевої пластинки, яка має товщину, що зменшується від центру за законом опуклої параболі. Показано спосіб розв’язання диференціального рівняння четвертого порядку, яке описує власні вісесиметричні коливання. Знайдено власні частоти та побудовано відповідні їм перші три форми коливань для пластинки, яка жорстко закріплена по внутрішньому контуру. Підтверджено ефективність розв’язання задачі на основі методу симетрій, який раніше було розроблено для лінійних рівнянь другого порядку. Бібл. 9, рис. 3, табл. 2.

Ключові слова: кільцева пластинка, коливання, факторизація, метод симетрії, апроксимація, нормальні напруги, власні частоти, форми коливань.

UDC 534.8

К.А. Trapezon¹, Ph.D, **A.G. Trapezon**², Dr. Sc.¹National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”, Peremogy Avenue, 37, Kyiv-56.²G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2 Timiryazevs'ka str., Kyiv-14, 01014, Ukraine.

To the decision of task about the vibrations of circular plate with a thickness decreasing from a center on a protuberant parabola

A task is considered about the axisymmetric proper oscillations of circular plate with a thickness decreasing from a center on a protuberant parabola. The method of decision of differential equalization of fourth order, that describes axisymmetric proper oscillations, is shown. Proper frequencies are found and corresponding is built to them the first three forms of vibrations for a plate with the hard fixing of internal contour. Efficiency of decision of task the method of symmetries is confirmed, worked out before for linear equalizations the second order. Reference 9, figures 3, tables 2.

Keywords: circular plate, vibrations, factorization, method of symmetry, approximation, normal tensions, proper frequencies, forms of vibrations.

References

1. Biceno K.B., Grammel R. (1952), “Technical dynamics : Vol. II”. M. GITTL, P. 638. (Rus)
2. Gontkevich V.S. (1964), “Natural vibrations of plates and hulls: manual”. K. Naukova dumka, P. 288. (Rus)
3. Kovalenko A.D. (1959), “Round plates with variable thickness”. M. Phismatgiz, P. 294. (Rus)
4. Lizarev A.D., Kuzmencov V.P. (1980), “Svobodnie kolebania kolcevich plastin peremennoj tolschini” *Strength of Materials*, No. 4, pp. 96—99. (Rus)
5. Lizarev A.D., Adamchik V.S. (1989), “Asimptoticheskiy analiz vlijania parametrov na sobstvennie chastoti kolebaniy uprugich system” *Strength of Materials*, No. 2, pp. 90-95. (Rus)
6. Trapezon K.A. (2012) “Method of symmetries at the vibrations of circular plates of variable thickness” *Electronics and Communications*, No. 6, pp. 66-76. (Rus)
7. Trapezon K.A. (2012) “Generalized method of symmetries at the study of vibrations of resilient elements” *Electronics and Communications*, No. 2, pp. 31-34. (Rus)
8. Timoshenko S.P., Vojnovskiy-Kriger S. (1963), “Plates and shells”. M. Phismatgiz, P. 636. (Rus)
9. Abramoviz M., Stigan I. (1979), “Reference book on the special functions”. M. Nauka, P. 832. (Rus)