

УДК 534.141

В.С. Дидковский, д-р техн. наук, **Я.В. Пламадил**Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,
ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

Некоторые особенности распространения волн давления в улитке внутреннего уха человека

Предложена упрощенная модель улитки в виде цилиндрической трубки переменного сечения, которая заполнена идеальной жидкостью. Путем использования дифференциальных уравнений движения жидкости в трубке, проанализировано модели с упругими или жесткими стенками.

Влияние сужения в трубке показано отношением амплитудных значений прошедшей и падающей волн давления. Библ. 5, рис. 6.

Ключевые слова: упругая стенка, жесткая стенка, волновод, волна давления, улитка, сужение.

Введение

Проблема снижения чувствительности слуха волновала людей всегда. Глухота считалась и считается одним из самых тяжелых недугов, так как влечет за собой нарушение связи человека с окружающими людьми.

В настоящее время созданы специальные устройства, которые предназначены помочь людям с проблемами слуха. Однако данных о внутреннем ухе человека, в частности о характере движения жидкости в улитке имеется достаточно мало [4]. Основным источником являются эксперименты Г. Бекеши, отмеченного Нобелевской премией в 1961 г [1]. В последние десятилетия появились работы, которые ставят под сомнение некоторые результаты теории распространения волн во внутреннем ухе (в первую очередь в улитке), изложенные Г. Бекеши.

Задача распространения волн давления в улитке является важной как с медицинской, так и с технической точки зрения, поскольку позволит усовершенствовать уже существующие методы диагностики и реабилитации слуха, а также разрабатывать новые.

Если представить геликотрему не в виде отверстия, а трубкой малого (по сравнению с остальными частями улитки) сечения, то возможно рассматривать улитку как волновод переменного сечения, состоящий из идеальной жидкости. Поэтому целью настоящей статьи является анализ влияния изменения площади поперечного сечения в улитке на распространение в

ней волн давления. Для этого опишем два случая - волновод с упругими или жесткими стенками.

Модель волновых движений жидкости в эластичной трубке

Улитка заполнена бесцветной жидкостью – перилимфой. Площадь поперечного сечения уменьшается от стремечка к противоположному тонкому концу – геликотреме. Полость улитки почти по всей ее длине разделена перегородкой. Одна половина, включающая стремечко, называется преддверной лестницей, другая половина – барабанной лестницей [1].

Если улитку развернуть и вытянуть, она будет иметь вид, схематически показанный на рис. 1.

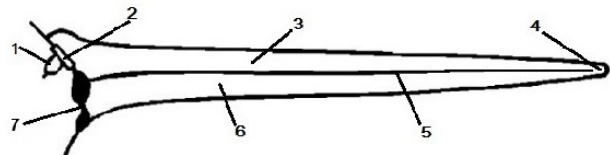


Рис. 1. Упрощенная схема развернутой улитки: 1 – стремечко, 2 – овальное окно, 3 – преддверная лестница, 4 – геликотрема, 5 – перегородка улитки, 6 – барабанная лестница, 7 – круглое окно

а) волновод с упругими стенками

Для получения качественной оценки процессов представим улитку в виде трубки переменного сечения (рис. 2) и разделим ее для простоты на две части – от овального окна до геликотремы и от геликотремы до круглого окна.

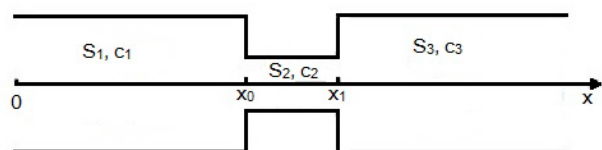


Рис. 2. Схематическая модель улитки: S_i – площади поперечных сечений, c_i – скорости звука в соответствующих областях трубки ($i=1,2,3$)

При наличии в волноводе локальных неоднородностей движение характеризуется наличием падающей, отраженной и прошедшей волн [3].

Движение жидкости в упругой трубке можно охарактеризовать системой, состоящей из уравнения, описывающего движение элемента в проекции на нормаль (1), уравнения неразрывности (2) и уравнения сохранения количества движения (3) [3]:

$$p_i = \frac{Eh\omega_i}{r_i^2}; \quad (1)$$

$$\frac{2}{r_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

где E - модуль упругости Юнга, h - толщина стенки, ω_i - радиальное перемещение стенки трубки, r_i - внутренний радиус трубки.

Начальные условия имеют следующий вид

$$v_i(x, 0) = \omega_i(x, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

а граничные условия можно представить как

$$\begin{aligned} p_1(0, t) = f_1(t), \quad S_1 v_1(x_0, t) = S_2 v_2(x_0, t), \\ p_1(x_0, t) = p_2(x_0, t), \quad p_2(x, t)|_{x \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} p_2(x_0, t) = f_2(t), \quad S_2 v_2(x_1, t) = S_3 v_3(x_1, t), \\ p_2(x_1, t) = p_3(x_1, t), \quad p_3(x, t)|_{x \rightarrow \infty} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ - функции, описывающие импульсы давления.

Рассмотрим сначала левую часть - от овального окна до геликотремы (рис. 3). Падающая и отраженная волны для этого случая распространяются в трубке с площадью поперечного сечения S_1 и скоростью c_1 , а прошедшая волна - в суженной части с соответствующими величинами S_2 и c_2 .

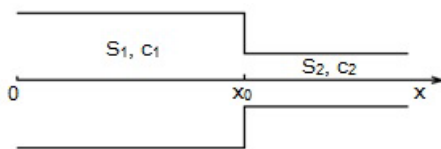


Рис. 3. Первый моделируемый участок трубки с сужением

Если предположить, что на входе давление описывается функцией $f_1(t)$, то, применив к уравнениям (1) - (5) интегральное преобразование Лапласа

$$\tilde{f}_1(s) = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt, \quad (7)$$

в пространстве изображений получаем следующие выражения

$$\tilde{p}_i = \frac{Eh\tilde{\omega}_i}{r_i^2}; \quad (8)$$

$$\frac{2}{r_i} s\tilde{\omega}_i + \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x} = 0; \quad (9)$$

$$s\tilde{v}_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

а граничные условия выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(0, s) = \tilde{f}_1(s), \\ \tilde{p}_1(x_0, s) = \tilde{p}_2(x_0, s), \\ S_1 \tilde{v}_1(x_0, s) = S_2 \tilde{v}_2(x_0, s), \\ \tilde{p}_2(x, s)|_{x \rightarrow \infty} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Скорость распространения волны выражаем с помощью формулы Моенса-Кортевега [4]:

$$c_i = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho r_i}}, \quad (12)$$

где ρ - плотность жидкости в трубке.

Далее, выразив $\tilde{\omega}_i$ и \tilde{v}_i из (9), (10) и подставив их в (8), путем несложных преобразований, получаем уравнение

$$s^2 \tilde{p}_i - c_i^2 \frac{\partial^2 \tilde{p}_i}{\partial x^2} = 0, \quad (13)$$

общее решение которого записывается в виде [3]

$$\tilde{p}_i(x, s) = A_{2i-1}(s) e^{-\frac{s}{c_i} x} + A_{2i}(s) e^{\frac{s}{c_i} x}. \quad (14)$$

Первое слагаемое соотношения (14) описывает падающую составляющую волны давления, а второе - отраженную.

Неопределенные коэффициенты легко найти, используя граничные условия

$$\begin{aligned} A_1(s) = \tilde{f}_1(s), \\ A_2(s) = \frac{1 - \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} \tilde{f}(s) e^{\frac{2s}{c_1} x_0}, \\ A_3(s) = \frac{2}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} \tilde{f}(s) e^{-\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) s x_0}, \end{aligned}$$

$$A_4(s) = 0. \quad (15)$$

Перейдя обратно в пространство оригиналов, получаем выражения для падающей, отраженной и прошедшей составляющих волны давления:

$$p_1^+ = f_1 \left(t - \frac{x}{c_1} \right), \quad (16)$$

$$p_1^- = \frac{1 - \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} f_1 \left(t - \frac{2x_0 - x}{c_1} \right), \quad (17)$$

$$p_2^+ = \frac{2}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} f_1 \left(t - \frac{x_0}{c_1} - \frac{x - x_0}{c_2} \right). \quad (18)$$

Перейдем к правой части трубки - от геликотремы до круглого окна (рис. 4). Теперь в расширенной части трубки с величинами S_3 и c_3 распространяется прошедшая волна, а в суженной (площадь S_2 и скорость c_2) - падающая.

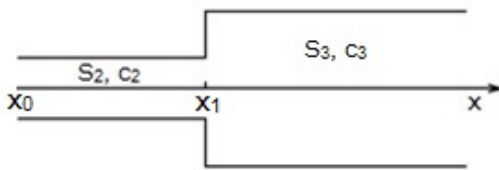


Рис. 4. Второй моделируемый участок трубки с расширением

Давление на входе в этом случае описывается функцией $f_2(t)$, которая соответствует прошедшей волне p_2^+ , представленной выражением (18). В пространстве изображений она имеет вид

$$\tilde{f}_2(s) = \frac{2}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} \tilde{f}_1(s) e^{-s \left(\frac{x_0}{c_1} + \frac{x - x_0}{c_2} \right)}; \quad (19)$$

Граничные условия в пространстве изображений

$$\tilde{p}_2(x_0, s) = \tilde{f}_2(s),$$

$$\tilde{p}_2(x_1, s) = \tilde{p}_3(x_1, s),$$

$$S_2 \tilde{v}_2(x_1, s) = S_3 \tilde{v}_3(x_1, s), \quad (20)$$

$$\tilde{p}_3(x, s)|_{x \rightarrow \infty} = 0.$$

Аналогично предыдущим выкладкам получаем уравнение (13), а его общее решение имеет вид

$$\tilde{p}_i(x, s) = A_{2i+1}(s) e^{-\frac{s}{c_i} x} + A_{2i+2}(s) e^{\frac{s}{c_i} x}. \quad (21)$$

Выражения для неопределенных коэффициентов при $i = 2, 3$

$$A_5(s) = \tilde{f}_2(s) e^{s \left(\frac{x_0}{c_2} \right)} = \frac{2}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} \tilde{f}_1(s) e^{-s \left(\frac{x_0}{c_1} - \frac{x - 2x_0}{c_2} \right)};$$

$$A_6(s) = \frac{1 - \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}}{1 + \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}} \tilde{f}_2(s) e^{-s \left(\frac{x_0 + 2x_1}{c_2} \right)} = \frac{1 - \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}}{1 + \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} \tilde{f}_1(s) e^{-s \left(\frac{x_0}{c_1} - \frac{x - 2x_1}{c_2} \right)};$$

$$A_7(s) = \tilde{f}_2(s) e^{-s \left(\frac{x_1 - x_0}{c_2} - \frac{x_1}{c_3} \right)} + \frac{1 - \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}}{1 + \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}} \tilde{f}_2(s) e^{-s \left(\frac{x_1 + x_0}{c_2} - \frac{x_1}{c_3} \right)} = \frac{2}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} \tilde{f}_1(s) e^{-s \left(\frac{x_0}{c_1} + \frac{x - 2x_0 + x_1}{c_2} - \frac{x_1}{c_3} \right)} + \frac{2}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} \cdot \frac{1 - \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}}{1 + \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}} \tilde{f}_1(s) e^{-s \left(\frac{x_0}{c_1} - \frac{x_1 - x}{c_2} - \frac{x_1}{c_3} \right)}; \quad (22)$$

$$A_8(s) = 0.$$

В пространстве оригиналов падающая и прошедшая составляющие волны давления:

$$p_2^+ = \frac{2}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} f_1 \left(t - \frac{x_0}{c_1} - \frac{2x - x_0}{c_2} \right), \quad (23)$$

$$p_3^+ = \frac{2}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} f_1 \left(t - \frac{x_0}{c_1} - \frac{x - 2x_0 + x_1}{c_2} - \frac{x + x_1}{c_3} \right) + \frac{2}{1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}} \cdot \frac{1 - \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}}{1 + \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}} f_1 \left(t - \frac{x_0}{c_1} - \frac{x_1 - x}{c_2} - \frac{x - x_1}{c_3} \right). \quad (24)$$

Отношение амплитудного значения прошедшей волны давления к амплитудному значению падающей волны для системы в целом (рис. 2) выглядит следующим образом

$$\frac{p_3^+}{p_1^+} = \frac{4}{\left(1 + \frac{S_2 c_1}{S_1 c_2}\right) \left(1 + \frac{S_3 c_2}{S_2 c_3}\right)}. \quad (25)$$

б) волновод с жесткими стенками

Рассмотрим случай, когда стенки трубки жесткие. Тогда схематическая модель улитки будет иметь вид, представленный на рис. 5.

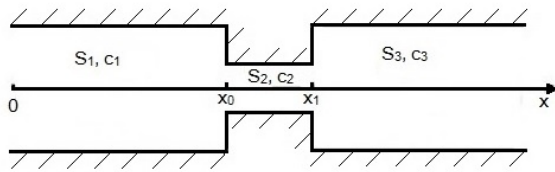


Рис. 5. Модель улитки с жесткими стенками

Движение жидкости в трубке с жесткими стенками охарактеризуем с помощью уравнения сохранения количества движения и уравнения неразрывности [5]:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -K_i \frac{\partial p_i}{\partial x}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{1}{K_i} \frac{\partial v_i}{\partial x}; \quad (27)$$

где введено обозначение $K_i = \frac{p_0 c_i}{E v_0}$, p_0, v_0 - начальные значения давления и скорости движения жидкости.

Начальные и граничные условия имеют вид (4)-(6).

Для левой части схемы на рис. 5 (от овального окна до геликотремы) предположим, что давление на входе описывается функцией $f_1(t)$. В пространстве изображений она имеет вид $\tilde{f}_1(s)$, граничные условия представим в виде (11), а уравнения (26)-(27) как

$$s \tilde{v}_i = -K_i \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial x}, \quad (28)$$

$$s \tilde{p}_i = -\frac{1}{K_i} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x}; \quad (29)$$

Выразив \tilde{v}_i из (28) и подставив его в (29), получаем уравнение

$$s^2 \tilde{p}_i - \frac{\partial^2 \tilde{p}_i}{\partial x^2} = 0, \quad (30)$$

общее решение которого запишем в виде

$$\tilde{p}_i(x, s) = A_{2i-1} \cdot e^{-sx} + A_{2i} \cdot e^{sx}, \quad (31)$$

С помощью граничных условий (11) найдем коэффициенты

$$A_1(s) = \tilde{f}_1(s),$$

$$A_2(s) = \frac{1 - \frac{S_2}{S_1}}{1 + \frac{S_2}{S_1}} \tilde{f}(s) e^{-2sx_0},$$

$$A_3(s) = \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} \tilde{f}(s), \quad (32)$$

$$A_4(s) = 0.$$

В пространстве оригиналов выражения для падающей, отраженной и прошедшей составляющих волны давления следующие

$$p_1^+ = f_1(t - x), \quad (33)$$

$$p_1^- = \frac{1 - \frac{S_2}{S_1}}{1 + \frac{S_2}{S_1}} f_1(t - 2x_0 + x), \quad (34)$$

$$p_2^+ = \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} f_1(t - x). \quad (35)$$

Для правой части рис. 5 (от геликотремы до круглого окна) давление на входе выразим как функцию $f_2(t)$, соответствующую выражению (35), которая в пространстве изображений имеет вид

$$\tilde{f}_2(s) = \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} \tilde{f}_1(s) e^{-sx} \quad (36)$$

Описанным выше способом получаем уравнение (30), а его общее решение

$$\tilde{p}_i(x, s) = A_{2i+1}(s) e^{-sx} + A_{2i+2}(s) e^{sx}. \quad (37)$$

Выражения для неопределенных коэффициентов, найденные с учетом граничных условий (20)

$$\begin{aligned}
 A_5(s) = \tilde{f}_2(s) e^{sx_0} &= \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} \tilde{f}_1(s) e^{-s(x-x_0)}; A_6(s) = \frac{1 - \frac{S_3}{S_2}}{1 + \frac{S_3}{S_2}} \tilde{f}_2(s) e^{-s(x_1-x_0)} = \frac{1 - \frac{S_3}{S_2}}{1 + \frac{S_3}{S_2}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} \tilde{f}_1(s) e^{-s(x+x_1-x_0)}; \\
 A_7(s) = \tilde{f}_2(s) \cdot e^{-sx_0} &+ \frac{1 - \frac{S_3}{S_2}}{1 + \frac{S_3}{S_2}} \cdot \tilde{f}_2(s) \cdot e^{s(x_1+x_0)} = \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} \tilde{f}_1(s) e^{-s(x+x_0)} + \frac{1 - \frac{S_3}{S_2}}{1 + \frac{S_3}{S_2}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} \tilde{f}_1(s) e^{-s(x-x_1-x_0)}; \\
 A_8(s) &= 0.
 \end{aligned} \tag{38}$$

Падающая и прошедшая составляющие волны давления в пространстве оригиналов

$$p_2^+ = \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} f_1(t - 2x + x_0), \tag{39}$$

$$p_3^+ = \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} f_1(t - 2x - x_0) + \frac{1 - \frac{S_3}{S_2}}{1 + \frac{S_3}{S_2}} \cdot \frac{2}{1 + \frac{S_2}{S_1}} f_1(t - 2x + x_1 + x_0). \tag{40}$$

Для всей системы (рис. 5) отношение амплитудных значений прошедшей волны давления к падающей следующее

$$\frac{p_3^+}{p_1^+} = \frac{4}{\left(1 + \frac{S_2}{S_1}\right) \left(1 + \frac{S_3}{S_2}\right)}. \tag{41}$$

Представим выражения (25) и (41) графически (рис. 6). При этом учтем, что для улитки $S_3 \approx S_1$.

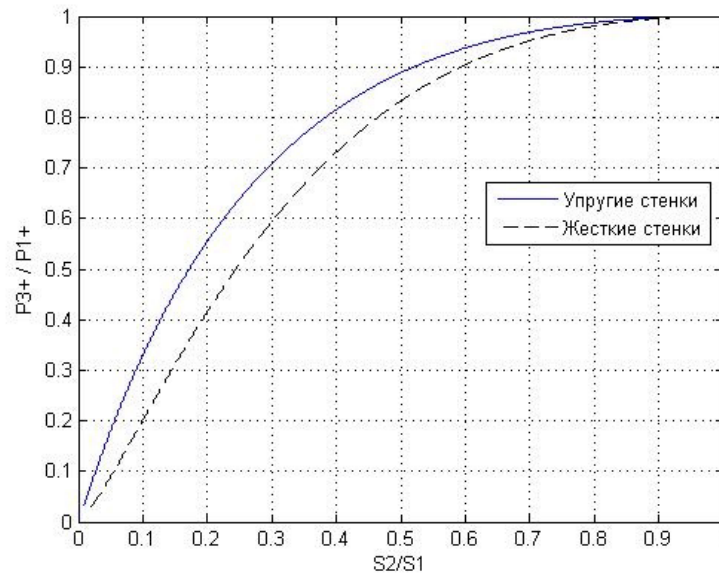


Рис. 6. Зависимость отношения амплитудных значений прошедшей волны давления к падающей волне от величины сужения

Таким образом, чем больше сужение в трубке, тем меньше отношение прошедшей волны к падающей, а это, соответственно, вызывает уменьшение коэффициента передачи в улитке.

Полученные выражения свидетельствуют о том, что при рассмотрении движения идеальной

жидкости в трубке переменного сечения, вид стенок (упругие или жесткие) имеет существенное влияние на коэффициент передачи. Наибольшее расхождение между кривыми, характеризующими вид стенки (рис. 6), наблюдается

при сужении трубки более чем в половину исходной площади.

Выводы

Рассмотрена модель улитки в виде волновода переменного сечения, заполненного идеальной жидкостью.

Проанализировано волноводы с упругими и жесткими стенками.

С помощью применения интегрального преобразования Лапласа к системе дифференциальных уравнений, получено зависимости от отношений амплитудных значений волн давления от величины сужения трубки.

Графически показано, что вид стенок трубки, при рассмотрении идеальной жидкости, имеет влияние на отношение амплитудных значений прошедшей волны давления к падающей.

Список использованных источников

1. Дж. Л. Фланаган Анализ, синтез и восприятие речи. – М.: Связь, 1968. – 396 с.
2. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
3. Селезов И.Т. Каплун Х.Н. Влияние сужения кровеносного сосуда на распространение пульсового давления крови // Бионика. – 1991. – 24. – С.50-54.
4. Я.А. Альтман, Г.А. Таварткиладзе Руководство по аудиологии.- М.: ДМК Пресс, 2003. – 360 с.
5. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. - М.: ГИТТЛ, 1951. – 432 с.

Поступила в редакцию 16 октября 2013 г.

УДК 534.141

В.С. Дідковський, д-р техн. наук, **Я.В. Пламаділ**

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

Деякі особливості поширення хвиль тиску у завитку внутрішнього вуха людини

Запропоновано спрощену модель завитка у вигляді циліндричної трубки змінного перерізу, яка заповнена ідеальною рідиною. Шляхом використання диференціальних рівнянь руху рідини в трубці, проаналізовано моделі з пружними або жорсткими стінками.

Вплив звуження в трубці показано відношенням амплітудних значень хвилі, що пройшла, та падаючої хвилі тиску. Бібл. 5, рис. 6.

Ключові слова: пружна стінка, жорстка стінка, хвилевод, хвиля тиску, завиток, звуження.

UDC 534.141

V.S. Didkovskyi, Dr. Sc., **Y.V. Plamadil**

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute»,
16 Politekhnichna St., building 12, Kyiv, 03056, Ukraine.

Some peculiarities of propagation pressure waves in the cochlea of the human inner ear

A simplified model of the cochlea as the cylindrical tube with variable sections, which consists of the perfect fluid, are presented. The models with elastic or rigid walls were analyzed by using differential equations of fluid motion in the tube.

Influence of constriction in the tube is shown by the ratio of the amplitude values of the transmitted and incident pressure wave. Reference 5, figures 6.

Keywords: elastic wall, rigid wall, waveguide, pressure wave, cochlea, restriction.

References

1. *James L. Flanagan* (1968), "Speech analysis, synthesis and perception". Moskva, Svyaz. P. 396. (Rus)
2. *Pedley T.* (1983), "Hydrodynamics of large blood vessels". Moskva, Mir. P. 400. (Rus)
3. *Selezov Y.T., Kaplun H.N.* (1991), "The influence of blood vessel narrowing on the distribution of blood pulse pressure". Bionyka. Vol. 24, pp. 50-54. (Rus)
4. *Y. Altman, G. Tavartkiladze* (2003), "Audiology guide". Moskva, DMK Press. P. 360. (Rus)
5. *Lurie A.I.* (1951), «The operational calculus and its application to problems of mechanics». Moskva, GITTL. P. 432. (Rus)