

Теория сигналов и систем

УДК 004.934

Об оценивании коэффициента эксцесса узкополосного процесса в частотной области

А.Н. Продеус, д-р техн. наук

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,
пр. Победы, 37, Киев-56, 03056, Украина.

Показано, что оценивание коэффициента эксцесса узкополосных процессов в частотной области позволяет сравнительно легко избежать эффекта «наложения частот», обусловленного возведением анализируемого процесса в четвертую степень. Оценивание в частотной области также позволяет обеспечить минимально возможное значение дисперсии оценки, которая не зависит от положения спектра анализируемого процесса на оси частот. При выполнении некоторых условий, рассмотренный в данной работе способ оценивания коэффициента эксцесса может быть намного экономнее способа-прототипа по объему вычислений. Библ. 4, рис. 3.

Ключевые слова: коэффициент эксцесса, узкополосный процесс, оценивание в частотной области.

Введение

Коэффициент эксцесса является весьма информативным параметром при классификации акустических сигналов различной природы [1, 2]. Вместе с тем, при использовании традиционного (во временной области) способа оценивания коэффициента эксцесса результаты оценивания не инвариантны к положению спектра сигнала на оси частот, что приводит к зависимости дисперсии оценки коэффициента эксцесса от положения спектра сигнала на оси частот [3]. Более того, если узкополосный сигнал содержит гармонический компонент, частота которого близка половине частоты Найквиста, оценка коэффициента эксцесса оказывается несостоятельной. При этом относительная погрешность измерений близка 30%. Если частота гармонического компонента сигнала близка нулю или частоте Найквиста, оценка коэффициента эксцесса также несостоятельна, при этом относительная погрешность измерений достигает 146% [3].

В этой связи представляет значительный интерес поиск способов оценивания коэффициента эксцесса, свободных от указанных недостатков. Одним из таких способов является предложенный в работе [4] способ оценивания коэффициента эксцесса, согласно которому в качестве исходных данных используются выборки дискретного преобразования Фурье (ДПФ) анализируемого сигнала.

В данной работе представлен другой, значительно более экономный в вычислительном плане, способ оценивания коэффициента эксцесса по выборкам ДПФ анализируемого процесса.

1. Оценивание коэффициента эксцесса во временной и частотной областях

Традиционно коэффициент эксцесса $\tilde{\gamma}$ стационарного случайного процесса (ССП) $X(t)$ оценивают во временной области [1,2], т.е. по N выборкам единственной реализации дискретного процесса $X[i] = X(i\Delta t)$:

$$\tilde{\gamma} = \frac{\tilde{M}_4}{(\tilde{M}_2)^2} - 3; \quad (1)$$

$$\tilde{M}_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X^4[i]; \quad \tilde{M}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X^2[i], \quad (2)$$

где i и Δt - номер выборки и период дискретизации ССП $X(t)$, соответственно.

Частоту дискретизации $F_s = 1/\Delta t$ процесса $X(t)$ обычно выбирают в соответствии с теоремой Найквиста-Котельникова, исходя из априорной информации о спектральном составе анализируемого сигнала $X(t)$. Поэтому при нелинейных преобразованиях процесса $X(t)$, имеющих место в соотношениях (2), возникают новые гармонические составляющие, приводящие к увеличению протяженности спектра. Это означает, что соотношение (1) некорректно в

том смысле, что в нем не учтены ошибки вычислений, обусловленные возможным эффектом «перепутывания» частот.

В силу равенства Парсеваля, оценка момента второго порядка

$$\tilde{D} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X^2[i] = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |F[k]|^2$$

центрированного ССП $X[i], i = \overline{0, N-1}$, с дискретным преобразованием Фурье $F[k]$ вида:

$$F[k] = F[k] \left\{ \text{rect} \left[\frac{k-p}{2d+1} \right] + \text{rect} \left[\frac{k+p}{2d+1} \right] \right\},$$

$$k = \overline{-N/2, N/2-1}$$

$$F[k] = \sum_{i=0}^{N-1} X[i] e^{-j \frac{2\pi}{N} ik}, \quad k = \overline{-N/2, N/2-1},$$

инвариантна к значению параметра $p \in [d+1, N/2-d-1]$, характеризующего поло-

жение центра полосы на оси частот (параметр d характеризует число спектральных выборок, соответствующих половине полосы частот анализируемого процесса).

Иначе обстоит дело с измерением момента четвертого порядка:

$$\tilde{M}_4 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Y^2[i] = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} |F_Y[k]|^2; \quad (3)$$

$$Y[i] = X^2[i]; \quad F_Y[k] = \sum_{k_1=-N/2}^{N/2-1} F[k_1] F[k-k_1].$$

При сдвиге спектра $F[k]$ по оси частот происходит изменение формы спектра $F_Y[k]$ (рис. 1), обусловленное «перепутыванием» частот. Форма функции $F_Y[k]$, а, следовательно, и числовые значения оценки (3), оказываются не инвариантными к изменению значений параметра $p \in [d+1, N/2-d-1]$.

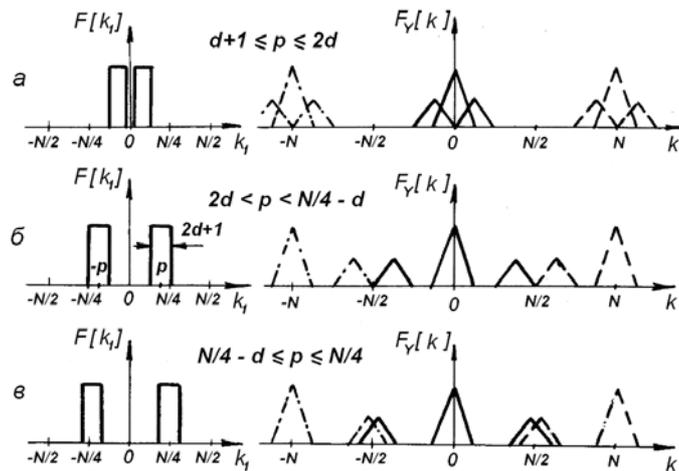


Рис. 1. Изменение формы спектра $F_Y[k]$ при сдвиге спектра $F[k]$: спектр $F[k]$ примыкает к нулевой частоте(а); спектр $F[k]$ примыкает к половине частоты Найквиста (б); спектр $F[k]$ содержит половину частоты Найквиста (в)

В работе [3] показано, что относительная погрешность измерений с использованием соотношения (1) может быть неприемлемо высокой, достигая 30% в окрестности половины частоты Найквиста, и достигая 146% в окрестностях нулевой частоты и частоты Найквиста.

$$\tilde{\gamma}_f = \frac{\tilde{\mu}_4}{(\tilde{\mu}_2)^2} - 3; \quad (4)$$

$$\tilde{\mu}_4 = 6\{\mu' + (1 - \text{rect}[d])\mu''\}; \quad (5)$$

$$\mu' = \sum_{k_1=p-d}^{p+d} \sum_{k_2=p-d}^{k_1} \sum_{k_3=k_1-k_2+p-d}^{p+d} A[k_1, k_2, k_3]; \quad d = \overline{0, N/4-1}, \quad p = \overline{d+1, N/4-d-1}; \quad (6)$$

В работе [4] предложена оценка $\tilde{\gamma}_f$ коэффициента эксцесса, свободная от указанного недостатка и отличающаяся тем, что исходными данными для нее служат не выборки $X[i]$, а выборки преобразования Фурье $F[k]$:

$$\mu'' = \sum_{k_1=p-d}^{p+d-1} \sum_{k_2=k_1+1}^{p+d} \sum_{k_3=p-d}^{k_1-k_2+p+d} A[k_1, k_2, k_3]; \quad d = \overline{0, N/4-1}, \quad p = \overline{d+1, N/4-d-1}; \quad (7)$$

$$A[k_1, k_2, k_3] = (R[k_1]R[k_2] + I[k_1]I[k_2]) \cdot (R[k_3]R[-k_1+k_2+k_3] + I[k_3]I[-k_1+k_2+k_3]) + \\ + (I[k_1]R[k_2] - R[k_1]I[k_2]) \cdot (I[k_3]R[-k_1+k_2+k_3] - R[k_3]I[-k_1+k_2+k_3]); \quad (8)$$

$$\tilde{\mu}_2 = 2 \sum_{k=p-d}^{p+d} (R^2[k] + I^2[k]); \quad R[k] = \operatorname{Re}\{F[k]\}; \quad I[k] = \operatorname{Im}\{F[k]\}.$$

Как следует из соотношений (5)-(8), вычисления производятся в частотной, а не во временной области.

Степень экономии памяти ЭВМ, при использовании оценки (4) вместо оценки (1) характеризуется величиной $B_n = \frac{N}{2(2d+1)}$. Этот выигрыш может быть значительным при $d \ll N/4$.

Выигрыш по количеству умножений и сложений, при использовании оценки (4) вместо оценки (1), равен:

$$B_y \approx B_c \approx 0,6 \frac{N}{(2d+1)[2(2d+1)^2+1]}. \quad (9)$$

Из соотношения (9) получаем условие получения выигрыша по количеству арифметических операций:

$$N > \frac{5}{3}(2d+1)[2(2d+1)^2+1]. \quad (10)$$

Таким образом, оценка (4) всегда экономнее оценки (1) по затратам памяти ЭВМ, однако не всегда экономнее по количеству вычислительных операций.

Из (10) следует, что степень выигрыша в количестве вычислительных операций увеличи-

вается с ростом параметра N или с уменьшением параметра d . Факторы, ограничивающие возможность увеличения параметра N при решении практических задач, достаточно очевидны: это финитность отрезка анализируемого случайного процесса $X[i]$, а также ограниченность ресурсов средств ЦВТ. Вместе с тем, чрезмерное уменьшение параметра d также недопустимо, поскольку при малых значениях d становится затруднительным различение гармонического процесса и полосового белого шума [4].

2. Экономный способ оценивания коэффициента эксцесса в частотной области

В качестве альтернативы оценке (4) предложим более экономную в вычислительном плане оценку $\tilde{\gamma}_F$ коэффициента эксцесса:

$$\tilde{\gamma}_F = \frac{\tilde{m}_4}{(\tilde{\mu}_2)^2} - 3, \quad (11)$$

где

$$\tilde{m}_4 = F_Y[0] + 2 \sum_{k=1}^{2d} |F_Y[k]|^2 + 2 \sum_{k=2(p-d)}^{2(p+d)} |F_Y[k]|^2, \quad (12)$$

$$F_Y[k] = \begin{cases} 2 \sum_{k_1=p-d}^{p+d} |F[k_1]|^2, & k=0; \\ 2 \sum_{k_1=p-d+k}^{p+d} F[k_1]F[k-k_1], & k=\overline{1, 2d}; \\ F^2[p-d], & k=2(p-d); \\ F^2[k/2] + 2 \sum_{k_1=p-d}^{k/2-1} F[k_1]F[k-k_1], & k=\overline{2p-2d+1, 2p}; \\ F^2[k/2] + 2 \sum_{k_1=k/2+1}^{p+d} F[k_1]F[k-k_1], & k=\overline{2p+1, 2p+2d-1}; \\ F^2[p+d], & k=2(p+d). \end{cases} \quad (13)$$

Инвариантность результатов вычислений к изменению значений параметра p достигается дописыванием N нулей к спектру $F[k]$.

Оценка (11) не только алгоритмически проще по сравнению с оценкой (4), но и более эко-

номна в плане объема вычислений. Оценки степени выигрыша в количестве умножений и сложений при использовании оценки \tilde{m}_4 вместо оценки \tilde{M}_4 :

$$B_y \approx \frac{N}{(2d+1)[2(2d+1)+5]}; \quad (14)$$

$$B_c \approx \frac{N}{2(2d+1)[3(2d+1)+5]}, \quad (15)$$

откуда следует условие получения выигрыша по количеству операций:

$$N > 2(2d+1)[3(2d+1)+5]. \quad (16)$$

Сопоставляя соотношения (14)–(16) с соотношениями (9)–(10), приходим к выводу, что оценка \tilde{m}_4 может быть существенно экономнее оценки $\tilde{\mu}_4$ по объему вычислений (рис. 2), хотя обе эти оценки могут существенно проигрывать оценке \tilde{M}_4 .

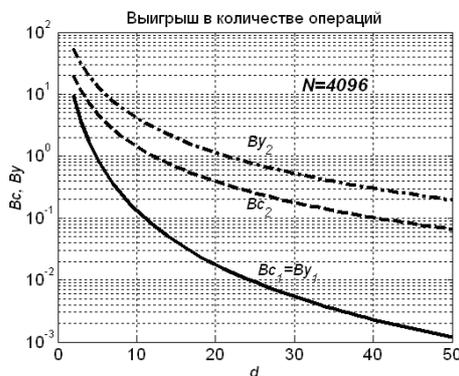


Рис. 2. Зависимость выигрыша в количества операций от значения d

На рис. 3 приведены зависимости максимальных значений параметра d , удовлетворяющего условиям (10) и (16), от величины параметра N . Из рис. 3 следует, что оценка \tilde{m}_4 сохраняет свои преимущества перед оценкой \tilde{M}_4 при ширине полосы частот анализируемого процесса, значительно превышающей таковую для оценки $\tilde{\mu}_4$.

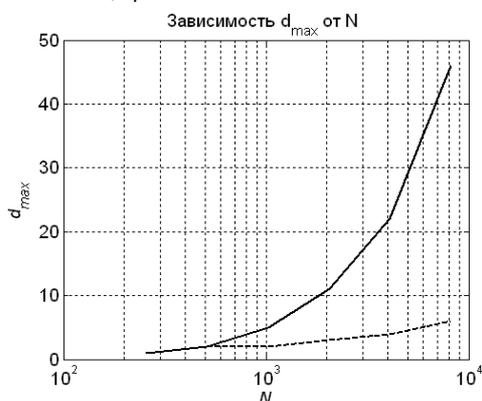


Рис. 3. Зависимость $d_{\max} = f(N)$

Выводы

При оценивании коэффициента эксцесса узкополосных процессов в частотной области сравнительно легко избежать эффекта «наложения частот», обусловленного возведением анализируемого процесса в четвертую степень. Кроме того, оценивание в частотной области позволяет минимизировать дисперсию оценки, одновременно обеспечивая ее инвариантность к положению спектра анализируемого процесса на оси частот.

Рассмотренный в данной работе способ оценивания момента четвертого порядка в частотной области значительно экономнее способа-прототипа в плане объема вычислений, что позволяет рекомендовать его для использования в системах обработки и классификации сигналов.

Литература

1. Продеус А.Н. Измерение коэффициента эксцесса при экспериментальных исследованиях рассеивающих свойств водной среды / Продеус А.Н., Чередниченко В.П. // Тезисы доклада на V Дальневосточной конференции "Акустич. методы и средства исслед. океана". – Владивосток, 1989. – С. 31.
2. Пилипенко К.П. Использование кумулянтных коэффициентов для определения пола диктора / Пилипенко К.П., Продеус А.Н. // Электроника и связь. – 2012. – Т. 66. – №1. – С. 13–17.
3. Продеус А.Н. Зависимость дисперсии оценки момента четвертого порядка полосового сигнала от выбора частоты дискретизации / Продеус А.Н. // Радиотехника. – 1991. – № 10. – С. 22–27.
4. Продеус А.Н. Повышение эффективности измерений коэффициента эксцесса при измерении гидроакустических сигналов / Продеус А.Н., Чередниченко В.П. // Судостроительная промышленность, сер. Акустика. – 1989. – Вып. 31. – С. 65–71.

УДК 004.934

Про оцінювання коефіцієнта ексцесу вузькосмугового процесу в частотній області

А.М. Продеус, д-р техн. наук

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
пр. Перемоги, 37, Київ-56, 03056, Україна.

Показано, що оцінювання коефіцієнта ексцесу вузькосмугових процесів у частотній області дозволяє порівняно легко уникнути ефекту «накладення частот», обумовленого зведенням аналізованого процесу в четвертий ступінь. Оцінювання в частотній області також дозволяє забезпечити мінімально можливе значення дисперсії оцінки, що не залежить від положення спектра аналізованого процесу на осі частот. При виконанні деяких умов, що розглянуті у даній роботі, спосіб оцінювання коефіцієнта ексцесу може бути набагато ошадливішим за спосіб-прототип за обсягом обчислень. Бібл. 4, рис. 3.

Ключові слова: *коэффициент эксцесса, узкополосный процесс, оценивание в частотной области.*

UDC 004.934

On estimation of narrowband process excess coefficient in frequency domain

A.N. Prodeus, Dr.Sc.

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",
Peremogy Avenue, 37, Kyiv-56, 03056, Ukraine.

It is shown in the paper that estimation of excess coefficient of narrowband processes in the frequency domain makes it relatively easy to avoid the effect of "aliasing" caused by the exponentiation process analyzed in the fourth degree. Assessment in the frequency domain also enables to minimize possible value of the variance estimates, which is independent of the spectrum location on the frequency axis. Under some conditions considered in this paper, a method for estimating the excess coefficient can be much more economical way of the prototype in terms of computing. Reference 4, figures 3.

Keywords: *excess coefficient, narrowband process, estimation in the frequency domain.*

Reference

1. A. Prodeus. (1989), "Assessment of coefficient of excess on experimental investigations of scattering properties of the water environment," in *Proc of V Far Eastern Conference "Acoust. Methods and Tools of Ocean Investigation"*, Vladivostok, Russia, pp. 31. (Rus)
2. K. Pilipenko, and A. Prodeus. (2012), "Usage of cumulant coefficients for dictator's gender determination," *Electronics and Communication*, Vol. 66, No. 1, pp. 13–17. (Rus)
3. A. Prodeus. (1991), "Dependency of estimator variance of 4-th moment of bandpass signal on sample frequency selection," *Radio Engineering*, No. 10, pp. 22–27. (Rus)
4. A. Prodeus, and V. Cherednichenko. (1989), "Improving the measurements efficiency of the coefficient of excess upon sonar signals processing," *Shipbuilding Industry, ser. Acoustics*, No. 31, pp. 65–71. (Rus)