

## Акустические приборы и системы

УДК 534.232

О.Н. Петрищев, д-р техн. наук, Т.А.Рябуш, А.П.Шпинь, д-р техн. наук

### Особенности интерпретации дисперсионного уравнения Рэлея-Лэмба в среде matlab

Рассмотрена новая компьютерная методика расчета дисперсионного уравнения Рэлея-Лэмба для продольных волн в упругом волноводе. Использованный пакет расширения Symbolic Math Toolbox программного комплекса MATLAB позволил создать компактную и эффективную программу построения стандартных для дисперсионных уравнений спектра нормальных волн и зависимости фазовой скорости распространения упругой волны от толщины волновода и частоты сигнала. Средствами MATLAB получены аналитические аппроксимации графических зависимостей в виде полиномов различного порядка, что позволяет оценивать уровень дисперсионных искажений переданных импульсных сигналов.

A new computer method of calculation of the Rayleigh-Lamb dispersion equation of longitudinal waves in elastic waveguides is considered. A compact and effective program for building a normal waves spectrum and phase velocity dependence of elastic waves propagation from a waveguide thickness and frequency for traditional dispersion equation is created by means Symbolic Math Toolbox in MATLAB environment. With using MATLAB analytical approximation graphical dependencies in the form of polynomials of various degrees, which allows to estimate the level of dispersion distortions of transmitted pulse signals, are obtained.

**Ключевые слова:** уравнение Рэлея-Лэмба, волновод, фазовая скорость

#### Введение

Упругие изотропные акустические волноводы в виде пластинки или стержня служат основой для построения значительного числа технических устройств. Высокая надежность, стабильность метрологических характеристик, компактность, технологичность делают акустические волноводные системы незаменимыми при решении целого ряда задач в области машино- и приборостроения, контроля и диагностики технологических процессов, при проведении научных экспериментов и т.д.

К числу базовых характеристик твердотельных акустических волноводов относится зависимость скорости распространения упругих волн от частотного состава передаваемых по ним сигналов и геометрии волновода. Как отмечается в работе [1], обобщающей по полноте освещения 125-летнюю историю вопроса, к настоящему времени имеется исчерпывающий набор научных исследований, описывающих характеристики изотропных акустических волноводов. Тем не менее, несмотря на имеющиеся решения фундаментальных для описания волноводов дисперсионных уравнений Рэлея-Лэмба для продольных и изгибных волн в пластинке и Похгаммера-Кри для волн в стержне, процедуры решения остаются не освещенными, а результаты решения приводятся в виде графиков так называемого спектра нормальных волн, который при перенесении на конкретный физический объект дает значительную погрешность. Таким образом, существует проблема получения прикладного (универсального) инструмента решения дисперсионных уравнений упругих волноводов для конкретных геометрических и частотных параметров акустической системы.

#### Основные положения

Объектом исследования является хорошо известное [2] дисперсионное уравнение Рэлея-Лэмба для продольных волн в упругом слое, образованном двумя параллельными поверхностями.

$$(\gamma^2 - \beta^2)^2 \cos \alpha b \sin \beta b + 4\gamma^2 \alpha \beta \sin \alpha b \cos \beta b = 0; \quad (1)$$

где  $b$  – толщина слоя;  $\alpha, \beta, \gamma$  – волновые числа, которые связаны между собой соотношениями:

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_l^2}; \quad \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c_s^2}; \quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2}; \quad (2)$$

где  $\omega$  – угловая частота;  $c_l, c_s$  – скорости распространения продольных ( $l$ ) и сдвиговых ( $s$ ) волн в неограниченной упругой среде;  $c$  – скорость распространения продольных волн в ограниченном слое.

Из первых двух соотношений (2) находим волновые числа  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha = \sqrt{\gamma_l^2 - \gamma^2}; \quad (3)$$

$$\beta = \sqrt{\gamma_s^2 - \gamma^2}; \quad (4)$$

где  $\gamma_l$ ,  $\gamma_s$  – соответственно волновые числа продольных и сдвиговых волн в неограниченной упругой среде.

Поскольку известно [2], что скорость продольных волн в слое  $c$  занимает промежуточное значение между скоростями продольных  $c_l$  и сдвиговых  $c_s$  волн в неограниченной упругой среде, причем в области длинных волн (низкие частоты)  $c \rightarrow c_s$ , а в области коротких волн (высокие частоты)  $c \rightarrow c_l$ , имеет место неравенство:  $c_s \leq c \leq c_l$ . Аналогичное, но противоположное по знакам неравенство получаем для значений волновых чисел:

$$\gamma_s \geq \gamma \geq \gamma_l. \quad (5)$$

Из неравенства (5) следует, что подкоренное выражение в (3) всегда является отрицательной величиной, и поэтому волновое число  $\alpha$  – величина мнимая. В противоположность этому, анализ выражения (4) с учетом неравенства (5), позволяет сделать вывод, что волновое число  $\beta$  – действительное для области длинных волн.

Имея в виду эти обстоятельства, можно преобразовать дисперсионное уравнение (1) к виду

$$(\gamma^2 - \beta^2)^2 \operatorname{ch} \tilde{\alpha} b \sin \beta b - 4\gamma^2 \tilde{\alpha} \beta \operatorname{sh} \tilde{\alpha} b \cos \beta b = 0, \quad (6)$$

где  $\alpha$  – волновое число, найденное из выражения (3) с учетом его мнимого характера:  $\alpha = i\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\alpha} = \sqrt{\gamma_l^2 - \gamma^2}$ ,  $i^2 = -1$ .

В выражении (6) также выполнено преобразование тригонометрических функций  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  в соответствующие им гиперболические функции  $\operatorname{sh} \tilde{\alpha}$  и  $\operatorname{ch} \tilde{\alpha}$ , так как это функции от чисто мнимых аргументов.

Дальнейшее преобразование уравнения (6) к виду, удобному для численных расчетов, требует приведения двух типов волновых чисел  $\gamma_l$  и  $\gamma_s$  (соответственно продольных и сдвиговых волн в неограниченной среде) к одному виду, например, к волновому числу сдвиговых волн  $\gamma_s$ . Для этого воспользуемся известным [2] соотношением между скоростями продольных и сдвиговых волн:

$$k^2 = \frac{c_l^2}{c_s^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{2 - 2\sigma}{1 - 2\sigma}, \quad (7)$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  – константы Ламэ;  $\sigma$  – коэффициент Пуассона материала волновода.

С учетом соотношения (7) можно выразить волновое число продольных волн  $\gamma_l$  через волновое число сдвиговых волн  $\gamma_s$

$$\gamma_l^2 = \frac{\gamma_s^2}{k^2}. \quad (8)$$

Подставляя соотношение (8) в выражение, описывающее  $\tilde{\alpha}$ , а также вводя безразмерные переменные:

- волновое число  $\tilde{\gamma}$ :

$$\tilde{\gamma} = \frac{\gamma \cdot b}{\pi} \quad (9)$$

- частоту  $\tilde{\omega}$ :

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega \cdot b}{\pi \cdot c_s}, \quad (10)$$

преобразуем дисперсионное уравнение (6) к удобному для расчетов виду

$$\begin{aligned} & (2\tilde{\gamma}^2 - \tilde{\omega}^2)^2 \operatorname{ch} \left( \frac{\pi}{2k} \sqrt{k^2 \tilde{\gamma}^2 - \tilde{\omega}^2} \right) \times \\ & \times \sin \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\gamma}^2} \right) - 4\tilde{\gamma}^2 \frac{1}{k} \sqrt{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\gamma}^2} \times \\ & \times \sqrt{k^2 \tilde{\gamma}^2 - \tilde{\omega}^2} \operatorname{sh} \left( \frac{\pi}{2k} \sqrt{k^2 \tilde{\gamma}^2 - \tilde{\omega}^2} \right) \times \\ & \times \cos \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\tilde{\omega}^2 - \tilde{\gamma}^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В уравнении (11) также использовано соотношение между безразмерными величинами  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\omega}$ , размерными волновыми числами  $\gamma$ ,  $\gamma_s$  и скоростями  $c$ ,  $c_s$ , полученное на основе выражений (9) и (10).

$$\frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\gamma}} = \frac{\gamma_s}{\gamma} = \frac{c}{c_s}. \quad (12)$$

С математической точки зрения дисперсионное уравнение относится к типу трансцендентных уравнений с двумя переменными  $x$ ,  $y$ , которое задано в неявном виде. Точного решения такого рода уравнений не существует. В практических же целях широко используется приближенные графические методы, основанные на анализе графика функции  $f(x,y)$ , построенного для выбранного значения  $y = y_1$ , и последующего определения значений  $x_i$ , при которых функция  $f(x,y_1)$  пересекает ось абсцисс, т.е.  $f(x,y_1) = 0$ . Наиболее эффективно выполнить расчет значений  $x_j$  как корней уравнения в пределах первой и последующих итераций, обусловленных количеством присваиваний соответствующих значений переменной  $y_j$ , можно с помощью пакета компьютерного математического анализа MATLAB [3].

#### Алгоритмы и результаты интерпретации

Несмотря на наличие мощного набора функций (более 1000-ти видов), в среде MATLAB пока отсутствует программный алгоритм прямого решения дисперсионных уравне-

ний. Поэтому нами использованы косвенные методы их решения.

Предлагаемый метод базируется на возможностях пакета расширения Symbolic Math Toolbox, ориентированного на выполнение *символьных* вычислений и преобразований, которые ранее были доступны в системах компьютерной алгебры, в частности, в символьной математической системе Maple. Несмотря на ограниченное, по сравнению с системой Maple, число символьных функций, в пакете Symbolic Math Toolbox существует функция **ezplot**, которая имеет существенные отличия от своего аналога **fplot**, применяемого к числовым функциям. Функция **ezplot** допускает использование символьной функции, зависящей от двух аргументов X и Y. При этом, она строит линию графика в декартовых координатах при условии, что исследуемое выражение равно нулю, т.е.  $f(x,y) = 0$ .

С учетом замены переменных, программа для построения графика спектра нормальных волн имеет следующую структуру:

```
%решение дисперсионного уравнения
Рэля-Лэмба
```

```
%коэффициент Пуассона 0,3
syms x y
f1=sqrt(3.5*x^2-y^2);
f2=sqrt(y^2-x^2);
z=((2*x^2-y^2)^2)*cosh(0.83*f1)*
*sin(pi/2*f2)-... (2.14*x^2)*f1*f2*
*cos(pi/2*f2)*sinh(0.83*f1);
ezplot(z,[0 2 0 5])
```

В результате выполнения этого файла в окне **Figure** выводится график спектра нормальных волн (рис. 1), из которого можно определить характеристики распространения первых четырех мод продольных волн в прямом ленточном упругом волноводе, изготовленном из материала с коэффициентом Пуассона  $\sigma=0.3$ .

Синтаксис команды **ezplot** предусматривает использование в качестве второго входного аргумента задание интервалов, которые занимает фигура по осям X и Y соответственно.

При введении дополнительной параметрической зависимости для описания многомодового характера распространения волны в зависимости от значений коэффициента Пуассона, программа будет выглядеть следующим образом:

```
%семейство решений дисперсионного уравнения
Рэля-Лэмба
%параметр s - коэффициент Пуассона
syms x y
for s = 0.25:0.01:0.35
k=sqrt((2-2*s)/(1-2*s));
f1=sqrt((2-2*s)/(1-2*s));
f2=sqrt(k^2*x^2-y^2);
```

```
f2=sqrt(y^2-x^2);
z=char((2*x^2-y^2)^2)*cosh(pi/(2*k)*f1)*
*sin(pi/2*f2)-((4/k)*x^2)*f1*f2*cos(pi/2*f2)*
*sinh(pi/(2*k)*f1);
hold on
ezplot(z,[0 2 0 4])
end
```

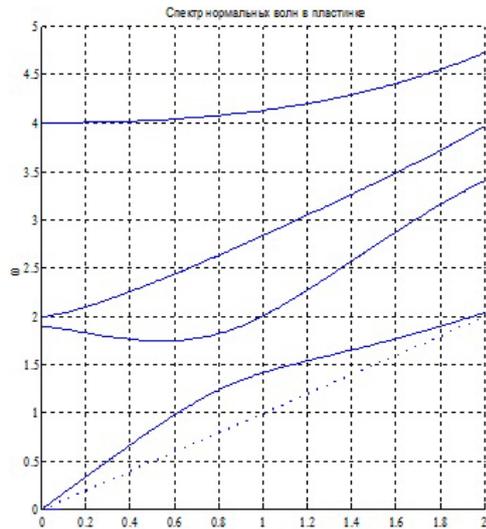


Рис. 1

В результате выполнения этой программы получаем семейство решений дисперсионного уравнения (рис. 2) при изменении коэффициента Пуассона в пределах  $\sigma=0.25 \dots 0.35$ .

Из графиков (рис. 2) видно, что при заданном разбросе коэффициента Пуассона первая мода практически не изменяется по сравнению с высшими модами.

Вторым направлением исследований дисперсионного уравнения является анализ зависимости фазовой скорости распространения волны от толщины волновода и частоты сигнала.

Для этого в уравнении (11) выполним замену переменной  $\tilde{\gamma}^2$ . С учетом соотношений (9) и (10), представим безразмерное волновое число в виде

$$\tilde{\gamma}^2 = \tilde{\omega}^2 c_s / c = \tilde{\omega}^2 / q. \quad (12)$$

M-файл, составленный для преобразованного дисперсионного уравнения, имеет следующую структуру:

```
%фазовая скорость продольных волн
из дисперсионного уравнения Рэля-
Лэмба
%коэффициент Пуассона 0,3
syms x y
s = 0.3;
k=sqrt((2-2*s)/(1-2*s));
f1=sqrt(k^2/y^2-1);
f2=sqrt(1-1/y^2);
z=((2/y^2-1)^2)*cosh(pi/(2*k)*x*f1)*
```

```
*sin(pi/2*f2*x)-... (4/(k*y^2)*f1*f2*
*cos(pi/2*f2*x)*sinh(pi/(2*k)*f1*x));
ezplot(z,[0.001 2 0.8 2])
```

В результате выполнения этого файла в окне **Figure** выводится график зависимости относительной фазовой скорости первой распространяющейся моды продольной волны в ленточном волноводе от частоты сигнала (рис. 3).

Анализ зависимости, представленной на рис. 3 показывает, что в пределах низкочастотной части спектра сигнала ( $f/b/c_s = 0 \dots 0,8$ ), фа-

зовая скорость практически не диспергирует. Но, при дальнейшем повышении частоты, скорость сильно изменяется, постепенно приближаясь к скорости сдвиговой волны.

Очевидно, что неравномерность фазовой скорости распространения продольных волн вызывает искажения сигнала, переданного по волноводу. Особенно, это касается широкополосных сигналов, в частности импульсных.

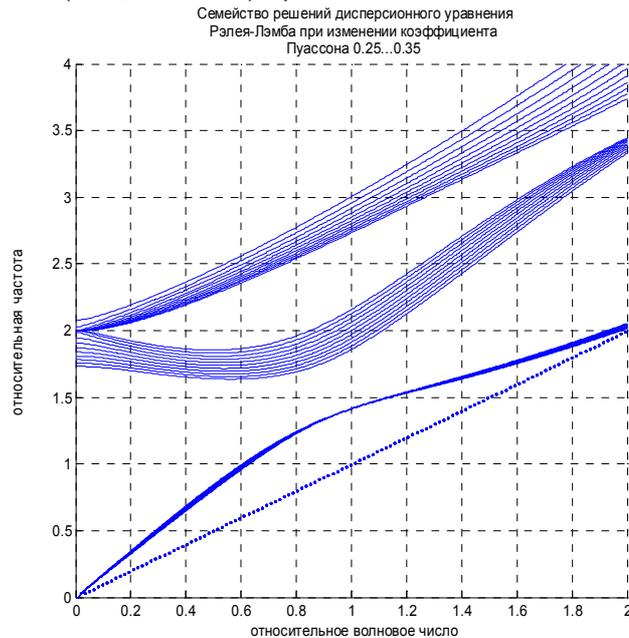


Рис. 2

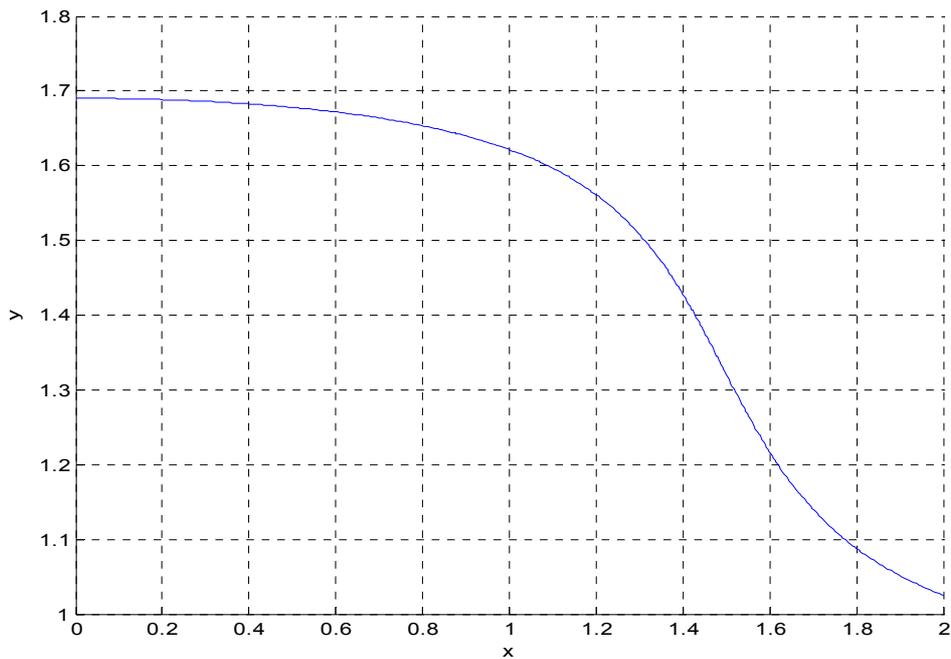


Рис. 3

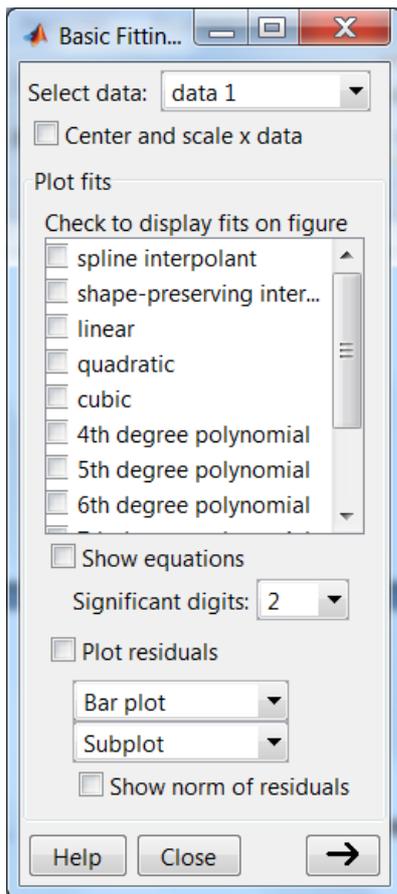


Рис. 4

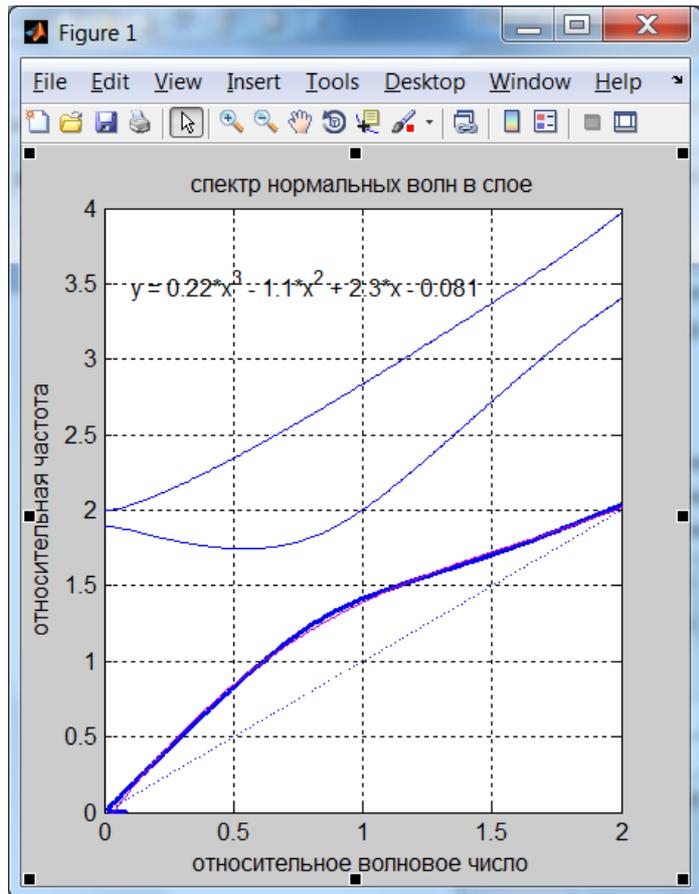


Рис. 5

Для аналитического расчета дисперсионных искажений необходимо иметь надежную аппроксимацию зависимости фазовой скорости от частоты в явном виде. Достаточно эффективно процедуру аппроксимации позволяют выполнить средства MATLAB.

Последовательный переход в окне **Figure** по цепи: **Tools** → **Edit Plot** → **Basic Fitting** открывает одноименное окно (рис. 4), в рабочей области которого (*Check to display fits on figure*) предлагается 12 вариантов выбора закона аппроксимации. Выберем, например, для первой распространяющейся моды закон кубической аппроксимации (*cubic*) и запустим аппроксимацию на выполнение. В результате откроется расширенное окно **Basic Fitting** (рис. 6), где в области *Numerical results* будет представлено уравнение выделенной кривой в виде полинома третьей степени. Одновременно, в окне **Figure** (рис. 5) по траектории выделенной кривой появится график её аппроксимации, а в верхней части поля графика – уравнение аппроксимации, в данном случае уравнение вида:

$$y = 0,22x^3 - 1,1x^2 + 2,3x - 0,081.$$

Поскольку полученная аппроксимация выражает дисперсионную зависимость между частотой и постоянной распространения в явном виде, то открывается возможность применения

интегральных преобразований (Фурье, Лапласа и др.) для аналитического расчета и анализа передаточных характеристик акустической волноводной системы.

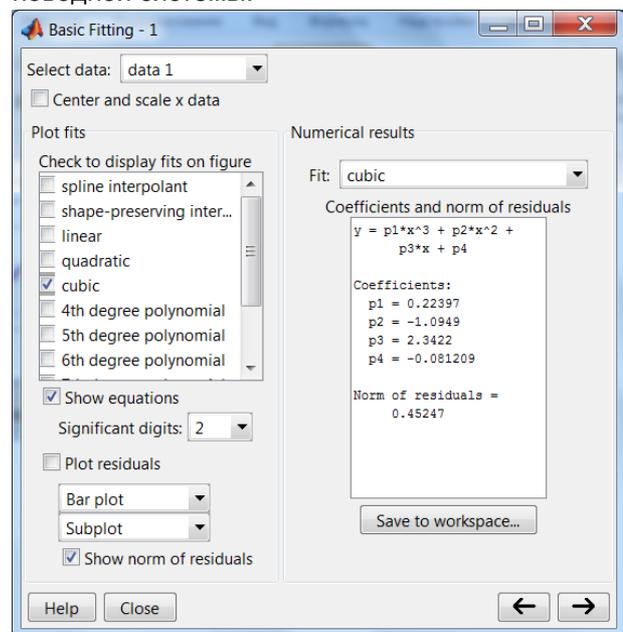


Рис. 6

Средства MATLAB позволяют также оценить точность аппроксимации путем построения графика погрешности в режиме *Plot residuals*. Вопросы более полного анализа погрешности

аппроксимации и сравнения эффективности предложенной методики расчета корней дисперсионного уравнения с другими алгоритмами, например, на основе функции *fzero*, составляют предмет отдельной статьи.

### Выводы

Результаты работы в очередной раз продемонстрировали высокий потенциал среды MATLAB для моделирования и анализа сложных математических структур, к которым, безусловно, относятся дисперсионные уравнения упругих волноводов. Предложенная методика может быть распространена и на другие виды дисперсионных уравнений: Рэлея-Лэмба для изгибных колебаний или уравнений Похгаммера-Кри, описывающих волновые процессы в стержневом волноводе. Показана высокая эффективность использования символических функций пакета расширения Symbolic Math Toolbox, которая распространяется на класс нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений, заданных в неявном виде. Очевидно, что перед использованием пакета, потребу-

ется предварительная подготовка уравнений с учетом комплексного характера переменных. Также с помощью MATLAB удалось решить проблему аналитической аппроксимации зависимости между частотой и постоянной распространения упругой волны определенной моды в явном виде. Полученный результат позволяет оценить характер и уровень дисперсионных искажений акустических импульсных сигналов, переданным по твердотельным волноводным структурам.

### Литература

1. Мелешко В.В., Бондаренко А.А., Довгий С. А., Трофимчук А. Н., Г. Я. Ф. ван Хейст Упругие волноводы: история и современность // Мат. методи та фіз. - мех. поля. 2008. – 51, № 2. – С. 86-104.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. - К.: Наукова думка, 1981. – 284 с.
3. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб.: БХВ – Петербург, 2003. – 736 с.