

УДК 534.1

**К.А. Трапезон**, канд .техн. наукНациональный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”,  
пр. Победы 37, Киев-56, 03056, Украина.

## Вариант метода симметрий в задаче о колебаниях круговой пластинки с убывающей толщиной по закону вогнутой параболы

*Получено решение задачи о колебаниях круговой пластинки с убывающей толщиной по закону вогнутой параболы. Для решения дифференциальных уравнений IV порядка, которые описывают осесимметричные колебания пластинок переменной толщины использованы методы симметрий и факторизации. Найдены первые три собственные частоты и построены соответствующие им формы колебаний для кольцевой пластинки с жестким закреплением внутреннего контура. Результаты расчета подтвердили надежность разработанной методики и удовлетворительную точность предложенного подхода для задач о колебаниях пластинок дискового типа. Библ. 11, рис. 3, табл. 1.*

**Ключевые слова:** дисковая пластинка; факторизация; симметрия; переменная толщина; собственные частоты; формы колебаний.

### Введение

Круговые осесимметричные пластинки дискового типа широко применяются в различных отраслях техники в качестве рабочих элементов – в авиастроении, космической и оборонной промышленности, в гражданском строительстве. Следует обратить также особое внимание на использование таких пластинок в качестве днищ, резервуаров поршней двигателей внутреннего сгорания, турбинных дисков, гидроагрегатов, элементов ультразвуковых устройств.

Одной из важнейших задач теории колебаний и вытекающей из нее прикладной акустики является поиск спектра собственных частот и форм колебаний для пластинок переменного профиля. Практическое значение задачи заключается в том, что зная собственные частоты и формы колебаний акустического элемента, можно наглядно и более детально проанализировать процесс свободных колебаний и, если этот элемент входит в состав колебательной системы, то вследствие возможности его точного расчета появляется в свою очередь возможность проводить в режиме резонанса различного рода эксперименты, например, на цикличе-

скую прочность конструкций. Однако, как следует из анализа многочисленных литературных источников, замкнутого решения задачи для дисковых пластинок не найдено. На это, в частности, указывает автор работы [1] и предлагает, как выход из ситуации, использовать численную форму метода начальных параметров. Следует отметить, что такой подход и полученные результаты могут не отвечать заявленной точности и как правило, требуют предварительной экспериментальной проверки на модельных образцах. В работе [2] в дополнение к разным численным методам (метод Рунге, метод Бунднова-Галеркина, метод пристрелки, метод рядов) предлагается ввести дифференциальный оператор IV порядка с переменными коэффициентами, что по сути приводит к “ограничению” предлагаемой автором методики и к сложностям определения собственных частот и форм колебаний. В пособии [3] подтверждается известный факт, что решение краевой задачи даже при статическом изгибе круглой пластинки известно лишь для некоторых элементарных случаев. Для более сложных конфигураций пластинки предлагается опять-же использовать численные и вариационные методы. Таким образом, необходимость в разработке эффективных простых методик расчета колебаний пластинок переменного профиля является актуальной и практически важной задачей. Ее решение даже в частных случаях позволит расширить набор аналитических решений подобных задач. Ниже рассмотрена задача для осесимметричной пластинки переменной толщины дискового типа с толщиной, изменяющейся по вогнутой параболе  $h = H_0(1 - \mu\rho)^2$ , где  $H_0, \mu$  – постоянные,  $\rho$  – переменный радиус.

### Исходное дифференциальное уравнение и его преобразование

Дифференциальное уравнение IV порядка, описывающее осесимметричные колебания  $W = W(\rho)\cos\omega t$  круговой пластинки толщиной  $h = H_0H(\rho)$ , которое приведено в работе [4], имеет вид

$$W^{(4)} + 2 \frac{(\rho H^3)'}{\rho H^3} W''' + \left[ \frac{(H^3)''}{H^3} + \frac{(H^{6+3\nu} / \rho)'}{H^{6+3\nu}} \right] W'' + \frac{1}{\rho H^3} \left[ \nu (H^3)' - \frac{H^3}{\rho} \right]' W' - \frac{\lambda^4}{H^2} W = 0, \quad (1)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{\omega \cdot R^2}{H_0} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\gamma}{gE}}, \quad (2)$$

$\rho = \frac{r}{R}$  – относительный радиус;  $r$  – переменный радиус;  $R$  – постоянный радиус;  $\nu, E, \gamma$  – соответственно коэффициент Пуассона, модуль упругости и удельный вес материала пластинки;  $g$  – ускорение силы тяжести.

Если значение коэффициента Пуассона принять равным  $1/3$ , что допустимо для большинства конструкционных металлических материалов, то при законе  $H = (1 - \mu\rho)^2$  уравнение (1) согласно методу факторизации можно заменить двумя уравнениями II порядка

$$W'' + \frac{[(1 - \mu\rho)^4 \rho]}{(1 - \mu\rho)^4 \rho} W' + \frac{k_*^2}{(1 - \mu\rho)^2} W = 0, \quad (3)$$

где

$$k_*^2 = -2\mu^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4} = \mu^2 \left( -2 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4} \right).$$

И тогда общее решение уравнения (1) будет найдено как сумма общих решений этих двух уравнений  $W = W_1 + W_2$ , где  $W_1$  – решение уравнения (3) при знаке “плюс” перед  $\sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4}$ , а  $W_2$  – при знаке “минус”.

Способы точного решения такого типа уравнений неизвестны, однако исходя из метода симметрий, разработанного для уравнений второго порядка [5], можно получить решения достаточно приближающиеся к точным.

**Алгоритм использования метода симметрий для разрешающих уравнений**

Уравнения (3) путем замены переменной  $\rho = \frac{1}{\mu}(1 - e^{-x})$  преобразуем к виду

$$W_{xx} + \frac{F_x}{F} W_x \pm k^2 W = 0, \quad (4)$$

где  $W_x = \frac{dW}{dx}$ ;  $W_{xx} = \frac{d^2W}{dx^2}$ ;

$$k^2 = -2 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4}; \quad x = -\ln(1 - \mu\rho);$$

$$F = F_0(e^{-3x} - e^{-4x}). \quad (5)$$

Уравнение (4) по структуре аналогично уравнению форм продольных колебаний стержня переменного поперечного сечения площадью  $F(x)$ , решения которого легко построить методом симметрий. Поскольку величина  $F_x / F$  не зависит от  $F_0$ , то этот коэффициент является произвольным. Естественным границам переменной  $\rho = 0 \div 1$  уравнений (3) будут соответствовать границы переменной  $x = 0 \div 1$  уравнений (4) при любых  $\rho \geq 0$  и  $x \geq 0$ , не выходящих за отмеченные пределы.

Таким образом, основная часть решения задачи сводится к построению решений системы дифференциальных уравнений (4), записанных для удобства в виде

$$W_{xx} + 2 \frac{D_x}{D} W_x \pm k^2 W = 0, \quad (6)$$

где  $k^2$ , переменная  $x(\rho)$  и

$$D = \sqrt{F} = D_0 \sqrt{e^{-3x} - e^{-4x}} \quad (7)$$

отвечают выражениям (5).

Для решения задачи в целом необходимо удовлетворить функцией  $W = W_1 + W_2$  соответствующим граничным условиям при  $x_1$  и  $x_2$ . Очевидно, однако, что уравнения (6) не разрешимы в элементарных или известных табулированных функциях, поэтому найдем их решения используя аппроксимацию  $D(x)$  функцией  $D_1(x)$ , при которой решения этих уравнений могут быть получены в замкнутом виде. Другими словами, обеспечив точность решения уравнений (6) путем замены  $D(x)$  на  $D_1(x)$ , проблема точности решения задачи переносится на удачный выбор функции  $D_1(x)$  с точки зрения удовлетворительного приближения ее к  $D(x)$  на требуемом интервале ( $x_1 \div x_2$ ). Метод симметрий позволяет реализовать такой выбор, поскольку согласно методу выражение для  $D_1(x)$  может содержать целый ряд неопределенных коэффициентов, подбором которых становится возможной требуемая аппроксимация.

В работе [6] для аналогичной задачи аппроксимирующая функция предложена в виде

$$D^* = D_0^* \sqrt{x} [J_0(mx) - \chi Y_0(mx)], \quad (8)$$

где  $D_0^*, m, \chi$  – произвольные постоянные.

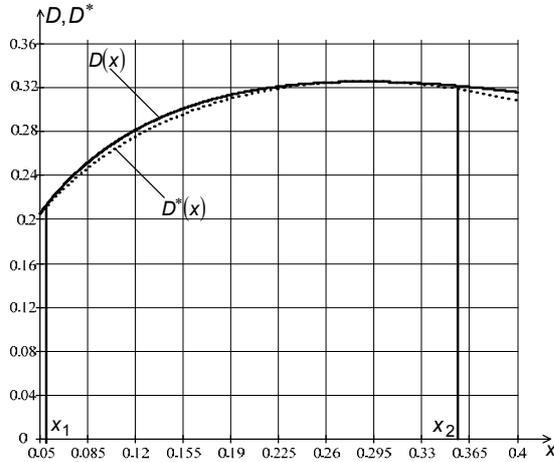


Рис. 1. Графическое изображение варианта аппроксимации функции  $D(x)$

Выражение (8) на принятом в задаче [6] интервале  $\rho = 0,1 \div 0,5$  ( $x = 0,0617 \div 0,3556$ ) при  $D_0 = 1$  вполне удовлетворительно соответствует (7), если положить  $D_0^* = 0,65605$ ;  $m = 2,5$ ;  $\chi = 0,2864$  (рис.1). Было показано на примере кольцевой пластинки, жестко закрепленной при  $\rho = 0,1$  и свободной при  $\rho = 0,5$ , что точность полученного решения на основе аппроксимирующей функции (8) является достаточной для технических приложений.

Изложим решение этой же задачи на основе аппроксимирующей функции, отличной от (8). По-прежнему, рассматриваем случай пластинки, жестко закрепленной при  $\rho_1$  и свободной при  $\rho_2$ . Аппроксимирующая функция  $D_1(x)$ , при которой уравнения (6) имеют точные решения, получена методом симметрий в виде

$$D_1 = D_{01} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + C_0} \quad (9)$$

Эта функция, содержащая в отличие от (8) только две варьируемые постоянные  $D_{01}$  и  $C_0$ , в принципе должна быть хуже адаптируемой к  $D(x)$ , однако в отличие от  $D^*(x)$  при выбранных  $D_{01} = 0,21$  и  $C_0 = 0,2483$  она расширяет возможность удовлетворительной аппроксимации на всем интервале  $x = 0 \div 1$  (рис.2). Из анализа данных, полученных ниже, следует, что решение на основе (9) дает достаточно приемлемые для практического использования результаты. Ниже излагается общий ход решения задачи и ее завершение примерами практической реализации результатов решения.

Уравнения (3) после внесения в них функции (9) запишутся в виде

$$W_{1,2}'' + 2 \frac{\left[ \frac{\sqrt{x}}{x^2 + C_0} \right]'}{\left( \frac{\sqrt{x}}{x^2 + C_0} \right)} W_{1,2} + k_{1,2}^2 W_{1,2} = 0, \quad (10)$$

где  $C_0 = 0,2483$ ;

$$k_1^2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4 - 2}; \quad k_2^2 = -\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4 + 2}.$$

Их точные решения, полученные методом симметрий имеют вид

$$\begin{cases} W_1 = A \left[ \alpha (x^2 + C_0) J_0(\alpha x) - 2x J_1(\alpha x) \right] + B \left[ \alpha (x^2 + C_0) Y_0(\alpha x) - 2x Y_1(\alpha x) \right]; \\ W_2 = A_1 \left[ \beta (x^2 + C_0) I_0(\beta x) - 2x I_1(\beta x) \right] - B_1 \left[ \beta (x^2 + C_0) K_0(\beta x) + 2x K_1(\beta x) \right], \end{cases} \quad (11)$$

где  $\alpha^2 = k_1^2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4 - 2}$ ;  $\beta^2 = -k_2^2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4 + 2}$ .

Сумма этих решений  $W$  является искомым общим решением, в котором значения постоянных  $A, B, A_1, B_1$  зависят от граничных условий.

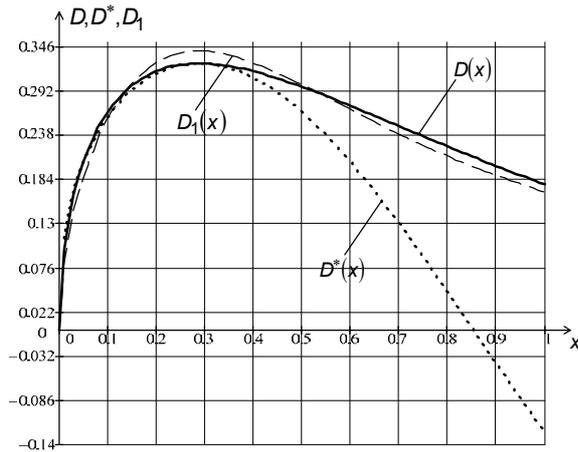


Рис. 2. Графическое изображение аппроксимации функции  $D(x)$

**Решение для кольцевой пластинки с жестким закреплением внутреннего контура**

При жесткой заделке внутреннего контура кольцевой пластинки ( $\rho = \rho_1$ ) прогибы и углы поворота элементов должны быть равны нулю, т.е.

$$(W)_{\rho=\rho_1} = 0; (W_{\rho})_{\rho=\rho_1} = 0. \quad (12)$$

На свободном крае ( $\rho = \rho_2$ ) при осесимметричном деформировании радиальные изгибающие моменты и перерезывающие силы равны нулю, т.е. [7]

$$\left( W_{\rho\rho} + \frac{\nu}{\rho} W_{\rho} \right)_{\rho=\rho_2} = 0;$$

$$\left( W_{\rho\rho\rho} + \frac{1}{\rho} W_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho^2} W_{\rho} \right)_{\rho=\rho_2} = 0. \quad (13)$$

При переходе к переменной  $x(\rho)$  условия (12) и (13) необходимо переписать, исходя из зависимости (5)  $x = -\ln(1 - \mu\rho)$   $[\mu\rho = 1 - e^{-x}]$ . Выполнив требуемые преобразования, при  $\nu = 1/3$  получим соответственно

$$(W)_{x=x_1} = 0; (W_x)_{x=x_1} = 0; \quad (14)$$

$$\left\{ W_{xx} + \left[ 1 + \frac{1}{3(e^x - 1)} \right] W_x \right\}_{x=x_2} = 0;$$

$$\left[ W_{xxx} + \frac{3e^x - 2}{e^x - 1} W_{xx} + \frac{2e^{2x} - 3e^x}{(e^x - 1)^2} W_x \right]_{x=x_2} = 0. \quad (15)$$

Последнее условие можно упростить после внесения в него  $W_{xx}$  из предпоследнего условия, в результате имеем

$$\left\{ W_{xxx} - \left[ 1 + \frac{3e^x + 1}{3(e^x - 1)^2} \right] W_x \right\}_{x=x_2} = 0.$$

Тогда условия (15) можно переписать в виде

$$\left\{ W_{xx} + pW_x \right\}_{x=x_2} = 0;$$

$$\left\{ W_{xxx} - qW_x \right\}_{x=x_2} = 0, \quad (16)$$

где  $p = \left[ 1 + \frac{1}{3(e^x - 1)} \right]_{x=x_2}$  ;

$$q = \left[ 1 + \frac{3e^x + 1}{3(e^x - 1)^2} \right]_{x=x_2}.$$

Для удовлетворения граничным условиям (14) и (16) необходимо образовать соответствующие производные от функции  $W$ . Для удобства исходим из записи  $W = W_1 + W_2$  и уравнений (10), т.е.

$$W_1'' + \frac{F'}{F} W_1' + k_1^2 W_1 = 0;$$

$$W_2'' + \frac{F'}{F} W_2' + k_2^2 W_2 = 0. \quad (17)$$

Из (17) непосредственно следует

$$W_{1,2}'' = - \left( \frac{F'}{F} W_{1,2}' + k_{1,2}^2 W_{1,2} \right). \quad (18)$$

После дифференцирования этого выражения и внесения (18) в полученный результат имеем

$$\left( W_{1,2}'' \right)' = W_{1,2}' \left[ \frac{F'^2}{F^2} - \left( \frac{F'}{F} \right)' - k_{1,2}^2 \right] + k_{1,2}^2 \frac{F'}{F} W_{1,2}. \quad (19)$$

Отсюда для условий (16) получим

$$\left. \begin{aligned} W'' + pW' &= \left( p - \frac{F'}{F} \right) (W_1' + W_2') - \\ &- (k_1^2 W_1 + k_2^2 W_2) = 0; \\ (W'')' - qW' &= \left[ \frac{F'^2}{F^2} - \left( \frac{F'}{F} \right)' - q \right] (W_1' + W_2') - \\ &- (k_1^2 W_1' + k_2^2 W_2') + \frac{F'}{F} (k_1^2 W_1 + k_2^2 W_2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Второе из этих выражений можно упростить, если внести в него  $k_1^2 W_1 + k_2^2 W_2$  из первого. Получим в результате

$$(W'')' - qW' = \left[ p \frac{F'}{F} - \left( \frac{F'}{F} \right)' - q - k_1^2 \right] W_1' + \left[ p \frac{F'}{F} - \left( \frac{F'}{F} \right)' - q - k_2^2 \right] W_2' = 0. \quad (21)$$

Таким образом, условия при  $x = x_2$  в виде (20) и (21) позволяют при выводе соотношений ограничиться только первыми производными  $W_1'$ ,  $W_2'$ , что технически более удобно для последующих вычислений.

Поскольку  $F \approx D_1^2$ , то согласно (9)

$$F = D_1^2 \frac{x}{(x^2 + C_0)^2},$$

$$A^* = \left[ \left( \frac{F'}{F} \right)' - p \frac{F'}{F} + q \right]_{x=x_2} = \left[ q - p \frac{C_0 - 3x^2}{x(C_0 + x^2)} - \frac{C_0^2 + 6C_0x^2 - 3x^4}{x^2(C_0 + x^2)^2} \right]_{x=x_2};$$

$$B^* = \left( p - \frac{F'}{F} \right)_{x=x_2} = \left[ p - \frac{C_0 - 3x^2}{x(C_0 + x^2)} \right]_{x=x_2}. \quad (23)$$

После дифференцирования выражений (11) с учетом формул [8] их производные после соответствующих сокращений представляются в виде

$$\left. \begin{aligned} W_1' &= -\alpha^2 (x^2 + C_0) \cdot [A J_1(\alpha x) + B Y_1(\alpha x)]; \\ W_2' &= \beta^2 (x^2 + C_0) \cdot [A_1 I_1(\beta x) + B_1 K_1(\beta x)]. \end{aligned} \right\} (24)$$

После внесения (11) и (24) в условия (14) и (22) получим систему четырех однородных алгебраических уравнений относительно искомых постоянных  $A, B, A_1, B_1$

$$\left. \begin{aligned} Aa + Bb + A_1c + B_1d &= 0; \\ Aa_1 + Bb_1 + A_1c_1 + B_1d_1 &= 0; \\ Aa_2 + Bb_2 + A_1c_2 + B_1d_2 &= 0; \\ Aa_3 + Bb_3 + A_1c_3 + B_1d_3 &= 0, \end{aligned} \right\} (25)$$

где

и поэтому

$$\frac{F'}{F} = \frac{C_0 - 3x^2}{x(C_0 + x^2)};$$

$$\left( \frac{F'}{F} \right)' = -\frac{C_0^2 + 6C_0x^2 - 3x^4}{x^2(C_0 + x^2)^2}.$$

С учетом этих соотношений условия (20) и (21) окончательно переписуются в виде

$$\left. \begin{aligned} [B^* W_1' + B^* W_2' - \alpha^2 W_1 + \beta^2 W_2]_{x=x_2} &= 0; \\ [(A^* + \alpha^2) W_1' + (A^* - \beta^2) W_2']_{x=x_2} &= 0, \end{aligned} \right\} (22)$$

где  $\alpha^2 = k_1^2$ ;  $\beta^2 = -k_2^2$ ;

$$\left. \begin{aligned} a &= \alpha J_0 - \frac{2x}{x^2 + C_0} J_1; \\ a_1 &= -\alpha^2 J_1; \\ b &= \alpha Y_0 - \frac{2x}{x^2 + C_0} Y_1; \\ b_1 &= -\alpha^2 Y_1; \\ c &= \beta I_0 - \frac{2x}{x^2 + C_0} I_1; \\ c_1 &= \beta^2 I_1; \\ d &= -\beta K_0 - \frac{2x}{x^2 + C_0} K_1; \\ d_1 &= \beta^2 K_1; \end{aligned} \right\} (26)$$

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= -\alpha^2 \left[ \alpha J_0 - \left( \frac{2x}{x^2 + C_0} - B^* \right) J_1 \right]; \\ a_3 &= -\alpha^2 (A^* + \alpha^2) J_1; \\ b_2 &= -\alpha^2 \left[ \alpha Y_0 - \left( \frac{2x}{x^2 + C_0} - B^* \right) Y_1 \right]; \\ b_3 &= -\alpha^2 (A^* + \alpha^2) Y_1; \\ c_2 &= \beta^2 \left[ \beta I_0 - \left( \frac{2x}{x^2 + C_0} - B^* \right) I_1 \right]; \\ c_3 &= \beta^2 (A^* - \beta^2) I_1; \\ d_2 &= -\beta^2 \left[ \beta K_0 + \left( \frac{2x}{x^2 + C_0} - B^* \right) K_1 \right]; \\ d_3 &= \beta^2 (A^* - \beta^2) K_1. \end{aligned} \right\} (27)$$

В соотношениях (26) и (27) функции Бесселя  $[J(\alpha x), Y(\alpha x)]$  условно обозначены как  $[J, Y]$ , а функции  $[I(\beta x), K(\beta x)]$  соответственно как  $[I, K]$ . При этом коэффициенты (26) необходимо вычислять при  $x = x_1$ , а (27) – при  $x = x_2$ . Входящие в (27) величины  $A^*, B^*$  соответствуют (23).

Из равенства нулю определителя системы (25) следует трансцендентное уравнение частот, из которого вычисляются параметры  $\alpha_j$  или  $\beta_j = \sqrt{\alpha_j^2 + 4}$ , связанные с частотой по-

средством соотношений  $\alpha_j^2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda_j}{\mu}\right)^4 - 4 - 2}$ ;

$\beta_j^2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda_j}{\mu}\right)^4 - 4 + 2}$ , представленных выше при выражениях (11).

Путем соответствующих преобразований системы (25) ее можно заменить более удобной для вычислений системой двух однородных уравнений относительно двух неизвестных постоянных, например  $A_1$  и  $B_1$ . В таком случае вместо частотного уравнения в виде определителя четвертого порядка получим эквивалентное уравнение частот, приравняв нулю определитель второго порядка следующей системы:

$$\begin{cases} A_1 L_1 + B_1 L_2 = 0; \\ A_1 L_3 + B_1 L_4 = 0. \end{cases}$$

В результате получим частотное уравнение в форме

$$L_1 L_4 - L_2 L_3 = 0, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{ca_1 - c_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{ca_2 - c_2 a}{ba_2 - b_2 a}; \\ L_2 &= \frac{da_1 - d_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{da_2 - d_2 a}{ba_2 - b_2 a}; \\ L_3 &= \frac{ca_1 - c_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{ca_3 - c_3 a}{ba_3 - b_3 a}; \\ L_4 &= \frac{da_1 - d_1 a}{ba_1 - b_1 a} - \frac{da_3 - d_3 a}{ba_3 - b_3 a}. \end{aligned}$$

После внесения корней уравнения (28) легко вычисляются отношение амплитудных коэффициентов по следующим равносильным формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} &= -\frac{L_2}{L_1} = -\frac{L_4}{L_3}; \\ \frac{B}{B_1} &= -\left( \frac{A_1}{B_1} \frac{ca_1 - c_1 a}{ba_1 - b_1 a} + \frac{da_1 - d_1 a}{ba_1 - b_1 a} \right) = -\left( \frac{A_1}{B_1} \frac{ca_2 - c_2 a}{ba_2 - b_2 a} + \frac{da_2 - d_2 a}{ba_2 - b_2 a} \right) = \\ &= -\left( \frac{A_1}{B_1} \frac{ca_3 - c_3 a}{ba_3 - b_3 a} + \frac{da_3 - d_3 a}{ba_3 - b_3 a} \right); \\ \frac{A}{B_1} &= -\left( \frac{B}{B_1} \frac{b}{a} + \frac{A_1}{B_1} \frac{c}{a} + \frac{d}{a} \right) = -\left( \frac{B}{B_1} \frac{b_1}{a_1} + \frac{A_1}{B_1} \frac{c_1}{a_1} + \frac{d_1}{a_1} \right) = \\ &= -\left( \frac{B}{B_1} \frac{b_2}{a_2} + \frac{A_1}{B_1} \frac{c_2}{a_2} + \frac{d_2}{a_2} \right) = -\left( \frac{B}{B_1} \frac{b_3}{a_3} + \frac{A_1}{B_1} \frac{c_3}{a_3} + \frac{d_3}{a_3} \right). \end{aligned} \right\} (29)$$

Корни уравнения (28) получим посредством последовательного вычисления величин  $\Delta_j = L_1 L_4 - L_2 L_3$  при произвольно выбираемых

$\alpha_j$ , добиваясь, чтобы  $\Delta_j = 0$ . Если это равенство имеет место при  $\alpha_j$ , то эти значения  $\alpha_j$  являются искомыми решениями уравнения (28).

### Пример расчета задачи для кольцевой пластинки

В качестве примера расчета на основе изложенных общих результатов рассмотрим пластинку, толщина которой изменяется по закону  $h = H_0(1 - \mu\rho)^2$ , где  $\mu = 0,5985$ , что соответствует изученному в статье [6] случаю с использованием аппроксимирующей функции (8). Если, как в [6],  $\rho_1 = 0,1$  и  $\rho_2 = 0,5$ , то для переменной  $x$  эти границы будут соответствовать  $x_1 = 0,0617$  и  $x_2 = 0,3556$ . Вычислив согласно (23) при  $C_0 = 0,2483$  вспомогательные коэффициенты  $A^* = 1,025635$ ;  $B^* = 2,764008$ .

Путем выполнения процедуры поиска корней уравнения (28) получим их первые три значения  $\alpha_i$ , т.е.  $\alpha_1 = 7,025671$ ;  $\alpha_2 = 16,218437$ ;  $\alpha_3 = 26,8182037$  им соответствуют согласно зависимости  $\lambda_i = \mu \left[ (\alpha_i^2 + 2)^2 + 4 \right]^{1/4}$  частотные параметры  $\lambda_i$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 4,2908; \\ \lambda_2 &= 9,74371; \\ \lambda_3 &= 16,07303. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} W_i = B_1 \left\{ \frac{A}{B_1} \left[ \alpha_i (x^2 + C_0) \cdot J_0(\alpha_i x) - 2x J_1(\alpha_i x) \right] + \frac{B}{B_1} \left[ \alpha_i (x^2 + C_0) \cdot Y_0(\alpha_i x) - 2x Y_1(\alpha_i x) \right] + \right. \\ \left. + \frac{A_1}{B_1} \left[ \beta_i (x^2 + C_0) \cdot I_0(\beta_i x) - 2x I_1(\beta_i x) \right] - \beta_i (x^2 + C_0) \cdot K_0(\beta_i x) - 2x K_1(\beta_i x) \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

В выражении (31) при известных  $\frac{A}{B_1}, \frac{B}{B_1}, \frac{A_1}{B_1}$  множитель  $B_1$  является свободно выбираемым и используется для данного расчета в качестве нормировки  $W_i$ , то есть чтобы выполнялось условие:  $W_i(\rho = 0,5) = 1$ . На рисунке 3 показаны первые три формы собственных колебаний кольцевой пластинки. Значения нормирующих коэффициентов  $B_1$  для  $W_1, W_2, W_3$  равны соответственно  $-0,351825$ ;  $0,46816159$ ;  $-0,67690997$ .

С помощью коэффициентов (26) и (27), вычисленных при найденных корнях  $\alpha_i$  и

$\beta_i = \sqrt{\alpha_i^2 + 4}$ , легко вычисляются амплитудные коэффициенты (29) и строятся формы колебаний пластинки.

Для первой собственной формы колебаний ( $\alpha_1 = 7,025671$ ) получим

$$\frac{A_1}{B_1} = -0,115045; \quad \frac{B}{B_1} = -1,097818; \quad \frac{A}{B_1} = 0,886463,$$

для второй ( $\alpha_2 = 16,218437$ ) –

$$\frac{A_1}{B_1} = 2,936587 \cdot 10^{-3}; \quad \frac{B}{B_1} = -0,413932;$$

$\frac{A}{B_1} = 0,638558$ , и для третьей ( $\alpha_3 = 26,8182037$ )

$$- \frac{A_1}{B_1} = -3,807543 \cdot 10^{-5}; \quad \frac{B}{B_1} = 0,02776;$$

$$\frac{A}{B_1} = 0,402608.$$

Для построения форм колебаний пластинки используем функцию прогибов, выраженную через переменную  $\rho$  согласно зависимости  $x = -\ln(1 - \mu\rho)$  и записанную в соответствии с (11) в виде

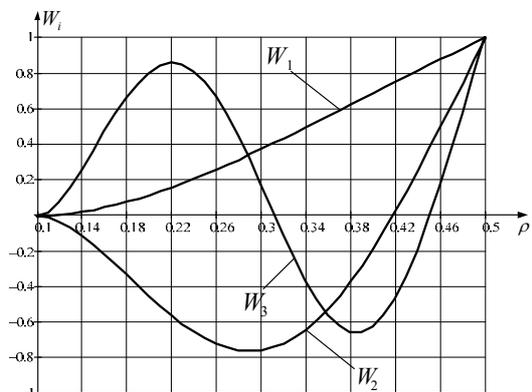


Рис. 3. Графическое изображение форм собственных колебаний кольцевой пластинки

### Сравнительный анализ полученных данных

Одной из основных целей настоящей работы является обоснование эффективности изложенных теоретических результатов с позиций их практического применения. Принципиальное значение в этой связи имеет сравнение представленных расчетных данных с теми, что получены ранее на основе аппроксимирующей функции (8). Для этого в таблице 1 приведены частотные параметры  $\lambda_i$ ; координаты  $\rho_{0i}$  узловых окружностей; координаты  $\rho_{mi}$  пучностей прогибов и абсолютные значения этих прогибов  $W_i(\rho_{mi})$ .

Из таблицы 1 следует, что частотные коэффициенты  $\lambda_i$  отличаются от тех, что получены в работе [6] на основе функции (8), соответственно на (2,5; 0,25; 0,18)%. Учитывая, что на принятом интервале ( $x_1 \div x_2$ ) аппроксимирующая функция (8) и исходная (эталонная) функция (7) практически совпадают (рис.1), то это дает основания полагать решение на основе (8) максимально приближенным к некоторому гипотетически точному решению. Отсюда заключаем, что параметры, приведенные во второй строке таблицы 1 для этого случая, являются достаточно достоверными и в принципе не должны отличаться от точных.

**Таблица 1. Параметры колебаний, полученные по двум вариантам решения задачи**

Аппроксимирующая функция, № формулы по тексту	Частотные параметры $\lambda_i$			Координаты узлов $\rho_{0i}$			Координаты пучностей $\rho_{mi}$			Прогибы при $\rho_{mi}$ , $W_i(\rho_{mi})$		
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\rho_{01}$	$\rho_{02}$	$\rho_{03}$	$\rho_{m1}$	$\rho_{m2}$	$\rho_{m3}$	$W_1(\rho_{m1})$	$W_2(\rho_{m2})$	$W_3(\rho_{m3})$
$D_1(x)$ , (11)	4,2980	9,7437	16,07 303	0,1	0,1 0,4173	0,1 0,3129 0,451	0,5	0,29 0,5	0,2212 0,3855 0,5	1	0,7586 1	0,856 0,6559 1
$D^*(x)$ , (10)	4,1837	9,7683	16,10 267	0,1	0,1 0,418	0,1 0,3131 0,4512	0,5	0,292 0,5	0,2226 0,3858 0,5	1	0,764 1	0,838 0,658 1

В связи с этим отклонения  $\lambda_i$ , приведенные выше, следует полагать как отклонения от своих точных значений. Имеющее здесь место отклонение параметра  $\lambda_1$ , являясь наибольшим из отклонений всех остальных, составляет 2,5%. Такое отклонение, как следует из многих примеров решения задач на собственные значения [9-11] является вполне допустимым для практических вычислений. Остальные характерные параметры, как следует из таблицы 1, отличаются несущественно или практически совпадают. Можно, следовательно, заключить, что решения данной задачи, полученные посредством использования аппроксимирующих функций (8) или (9) являются практически равносильными. Однако, функции (8) и (9) имеют существенные различия в своем поведении. Первая из них функция (8), совпадая на заданном интервале с исходной, чем обеспечивается повышенная точность решения, в дальнейшем, примерно при  $x > 0,4$  теряет свои адаптивные свойства (рис.2). Вторая – функция (9), как следует из этого же рисунка, несмотря на худшее по сравнению с (8) приближение к (7), пригодна для аппроксимации на всем интервале  $x = 0 \div 1$ , в чем и заключается ее достоинство. Что же касается несколько “пониженной” точности решения задачи, ожидаемой при изменении

интервала переменной  $x$ , то как показал пример, эта точность должна быть достаточной для технических приложений.

Новизна результатов, представленных в работе, заключается в реализованном предложении нового варианта применения метода симметрий для решения задачи о колебаниях пластинки с убывающей от центра толщиной по закону вогнутой параболы  $h = H_0(1 - \mu\rho)^2$ . Практическое значение теоретических результатов, представленных в работе, состоит в возможности непосредственного использования расчетной модели в технических приложениях, в частности, для рационального проектирования резонансных звуковых и ультразвуковых систем на основе пластинок как акустически активных элементов. Алгоритм решения проблемы в случае исходных параметров пластинки, задаваемых из практических соображений и отличающихся от принятых в расчетном примере, остается неизменным.

### Выводы

1. Решена методом симметрий в новом варианте его реализации задача о собственных осесимметричных колебаниях круговой пластинки с убывающей от ее центра толщиной по закону вогнутой параболы.

2. Получены уравнения частот и форм собственных колебаний для кольцевой пластинки с жестким закреплением внутреннего контура.

3. Вычислены первые три собственные частоты и построены соответствующие им собственные формы колебаний.

4. Подтверждена эффективность решения задачи методом симметрий, разработанного ранее для линейных уравнений второго порядка.

5. Показана гибкость метода симметрий при решении задач теории колебаний для пластинок переменной толщины на примере нового варианта его реализации.

6. Проиллюстрирована эффективность принятого подхода сравнением результатов, полученных по двум различным вариантам.

#### Список использованных источников

1. Бичиашвили З. Д. Определение собственных частот и форм свободных колебаний осесимметричных пластинок методом начальных параметров: дис. ... кандидата тех. наук : 01.02.03 / Бичиашвили Зураб Джондоевич. – М., 1983. – 186 с.
2. Аникина Т.А., Ватульян А.О., Углич П.С. Об определении переменной жесткости круглой пластины // Вычислительные технологии. — 2012. — Т. 17. — № 6. — С. 26—35.
3. Кузнецова Е.В. Изгиб пластин: учебно-методическое пособие к решению задач к лабораторному практикуму по исследованию прогибов при нагружении прямоугольных и круглых пластин. — Пермь: ПГТУ, 2006. — 32 с.
4. Трапезон К.А. Метод симметрий при колебаниях круговых пластинок переменной толщины // Электроника и связь. — 2012. — № 6. — С. 66—76.
5. Трапезон К.А. Обобщенный метод симметрий при изучении колебаний упругих элементов // Электроника и связь. — 2012. — № 2. — С. 31—34.
6. Трапезон К.А. Решение задачи о собственных осесимметричных колебаниях круговой пластинки с толщиной, убывающей от центра по вогнутой параболе // Электроника и связь. — 2014. — Т. 19. — № 5. — С. 98—106.
7. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. — М.: Физматгиз, 1963. — 636 с.
8. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
9. Бабаков И.М. Теория колебаний. — М.: Дрофа, 2004. — 591 с.
10. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями. — М.: Наука, 1968. — 504 с.
11. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. — М.: Наука, 1967. — 444 с.

Поступила в редакцию 23 января 2015 г.

УДК 534.1

К.О. Трапезон, канд. техн. наук

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”,  
пр. Перемоги 37, Київ-56, 03056, Україна.

### Вариант метода симметрий для задачи про колебания круглой пластинки, толщина которой уменьшается от центра по выпуклой параболе

Отримано розв'язок задачі про коливання круглої пластинки, товщина якої зменшується від центру по випуклій параболі. Задля розв'язання диференціальних рівнянь IV порядку, які описують вісесиметричні коливання пластинок змінної товщини використано методи симетрії і факторизації. Знайдено перші три власні частоти та побудовано відповідні їм форми коливань для кільцевої пластинки з жорстким закріпленням за внутрішнім контуром. Результати розрахунку підтвердили тезу про надійність розробленої методики та задовільну точність запропонованого підходу для задач про коливання пластинок дискового типу. Бібл. 11, рис. 3, табл. 1.

**Ключові слова:** *дискова пластинка; факторизація; симетрія; змінна товщина; власні частоти; форми коливань.*

UDC 534.1

**K.A. Trapezon**, Ph.D.

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",  
Peremogy Avenue, 37, Kyiv-56, 03056, Ukraine.

## **Variant of method of symmetries in a task about the vibrations of circular plate with a decreasing thickness by law of concave parabola**

*The decision of task is got about the vibrations of circular plate with a decreasing thickness by law of concave parabola. For the decision of differential equalizations of IV of order, that describe the axisymmetric vibrations of plates of variable thickness the methods of symmetries and factorization are used. The first are found three natural frequencies and the corresponding to them forms of vibrations are built for a circular plate with the hard fixing of internal contour. The results of calculation confirmed reliability of the worked out methodology and satisfactory exactness offered approach for tasks about the vibrations of plates of disk-type. Reference 11, figures 3, tables 1.*

**Keywords:** *disk plate; factorization; symmetry; variable thickness; natural frequencies; forms of vibrations.*

### **References**

1. *Bichashvili Z. D. (1983), "Opredelenie sobstvennich chastot i form svobodnich kolebaniy osesimmetrichnich plastinok metodom nachalnich parametrov : dis. kandidata nauk". M., P. 186 (Rus)*
2. *Anikina T.A., Vatuljan A.O., Uglich P.S. (2012), "Ob opredelenii peremennoj gestkosti krugloj plastini" Computing Technology, Vol. 17, No. 6, pp. 26-35. (Rus)*
3. *Kuznecova E.V. (2006), "Izhib plastin : uchebno-metodicheskoe posobie k recheniju zadach k laboratornomu praktikumu po issledovaniju progibov pri nagrugenii prjamougolnich i kruglich plastin". Perm PGU, P. 32. (Rus)*
4. *Trapezon K.A. (2012) "Method of symmetries at the vibrations of circular plates of variable thickness" Electronics and Communications, No. 6, pp. 66-76. (Rus)*
5. *Trapezon K.A. (2012) "Generalized method of symmetries at the study of vibrations of resilient elements" Electronics and Communications, No. 2, pp. 31-34. (Rus)*
6. *Trapezon K.A. (2014) "The decision of task about the axisymmetric natural vibrations of circular plate with a thickness decreasing from a center on a concave parabola" Electronics and Communications, Vol. 19, No. 5, pp. 98-106. (Rus)*
7. *Timoshenko S.P., Vojnovskiy-Kruger S. (1963), "Plates and shells". M. Phisimatgiz, P. 636. (Rus)*
8. *Abramoviz M., Stigan I. (1979), "Reference book on the special functions". M. Nauka, P. 832. (Rus)*
9. *Babakov I.M. (2004), "Teorija kolebanij". M. Drofha, P. 591. (Rus)*
10. *Kollatz L. (1968), "Zadachi na sobstvennie znachenija s technicheskimi prilogenijami". M. Nauka, P. 504. (Rus)*
11. *Timoshenko S.P. (1967), "Kolebanija v ingenernom dele". M. Nauka, P. 444. (Rus)*