

# Лінійні функції на базі функцій Уолша

Мартинюк<sup>f</sup> В. І., ORCID [0000-0003-0882-5114](https://orcid.org/0000-0003-0882-5114)  
e-mail [martynyukvadum@gmail.com](mailto:martynyukvadum@gmail.com)

Клен<sup>s</sup> К. С., к.т.н., ORCID [0000-0002-6674-8332](https://orcid.org/0000-0002-6674-8332)  
e-mail [ekateryna.osypenko@gmail.com](mailto:ekateryna.osypenko@gmail.com)

Кафедра промислової електроніки [kaf-pe.kpi.ua](http://kaf-pe.kpi.ua)  
Факультет електроніки [fel.kpi.ua](http://fel.kpi.ua)

Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» [kpi.ua](http://kpi.ua)  
Київ, Україна

**Анотація**—В статті розглянуто метод побудови ортонормованої системи лінійних функцій для апроксимації функції зміни швидкості вітру лінійними наближеннями з метою оптимізації режиму роботи вітрогенератора і максимізації відбору енергії від відновлюваних джерел. При побудові вказаної системи за основу була взята система ортонормованих функцій Уолша. При застосуванні процесу Грама-Шмідта до базової системи функцій був отриманий аналітичний вираз для лінійних функцій на базі функцій Уолша. Система функцій, що розроблена, має ті ж властивості, що й система неперервних функцій Уолша. Дискретний варіант розроблених функцій має всі параметри базової системи функцій, а також такі самі графіки, що й система дискретних функцій Уолша. Було розглянуто різноманітні способи упорядкування функцій всередині системи. Встановлено, що похибка апроксимації функції зміни швидкості вітру не залежить від способу впорядкування функцій. Наведено приклад апроксимації функції зміни швидкості вітру протягом доби за допомогою лінійних функцій на базі функцій Уолша.

Бібл. 11, рис. 2, додат. 1.

**Ключові слова** — функції Уолша, апроксимація, процес Грама-Шмідта, вітрогенератор, ортонормована система функцій.

## I. ВСТУП

Частка електроенергії, яка виробляється відновлюваними джерелами енергії (ВДЕ) на території України, складає близько 2% від загальної кількості виробленої електроенергії [1]. За наближеними оцінками встановлена потужність відновлюваних джерел в Україні сягає 10 ГВт, з яких близько 420 МВт припадає на вітроелектростанції [2].

В автономних системах розосередженої генерації проблема відбору максимально можливої енергії від відновлюваних джерел набуває важливого значення [3]. Вирішення її в основному зводиться до забезпечення відповідного положення робочої точки на навантажувальній характеристиці [4]. В статичному режимі ця задача успішно вирішена, однак при динамічних змінах величини та напрямку вектора потоку первинної енергії керування, засноване на використанні статичних параметрів, не забезпечує відбору максимальної енергії. Динамічна зміна величини та напрямку швидкості вітрового потоку і, відповідно, внутрішнього опору еквівалентного джерела вітрогенератора призводить до зміни умов відбору максимальної енергії, отримання яких засноване на припущенні, що параметри джерела лінійно змінюються у часі. Це припущення обґрунтовується тим, що дані про швидкість вітру в районі розташування ВЕС отримуються дискретно, і за достатньо високої частоти отримання даних доцільно використовувати лінійну апроксимацію, яка здатна забезпечити високу

точність. У зв'язку з цим виникає задача представлення функції зміни швидкості вітру лінійними наближеннями.

Серед існуючих методів апроксимації найбільш часто вживаними при скороченні і передачі даних в автоматизованих системах управління є перетворення Фур'є, Уолша і Хаара [5, 6], кожне з яких має низку переваг. Наприклад, застосування перетворень Уолша дозволяє значно спростити і прискорити обробку інформації. Широке використання перетворень Уолша в прикладних задачах спирається на можливість їх обчислення за допомогою швидких алгоритмів, що мають істотно меншу обчислювальну складність в порівнянні з класичними алгоритмами перетворень [6, 7].

Тому задача розробки системи ортонормованих лінійних функцій на базі функцій Уолша для апроксимації функції зміни швидкості вітру з метою оптимізації режиму роботи вітрогенератора і максимізації відбору енергії від відновлюваних джерел є актуальною.

## II. МЕТОДИКА ПОБУДОВИ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ НА БАЗІ ФУНКЦІЙ УОЛША

Оскільки необхідно забезпечити лінійну апроксимацію функції зміни параметрів потоку первинної енергії, доцільно підібрати ортогональні функції, що забезпечують таку апроксимацію. До таких функцій, зокрема, відносяться ортонормовані функції



Франкліна [8]. Але, враховуючи їх неперіодичність та несиметрію, доцільно побудувати систему ортонормованих лінійних функцій на базі функцій Уолша  $W_l$ . Таку систему можна отримати шляхом використання процесу Грама-Шмідта [9], – алгоритму ортогоналізації, в якому на основі лінійно-незалежної системи функцій  $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$  будується спрощена система ортогональних функцій  $\psi_0(t), \psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ , які надалі нормуються – система ортонормованих функцій  $R_1(t), R_2(t), \dots, R_n(t)$ , в якій кожна функція  $R_i(t)$  виражається через початкову систему  $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t)$ :

$$\psi_i(t) = \varphi_i(t) - \sum_{n=0}^{i-1} R_n(t) \int_0^1 \varphi_i(t) R_n(t) dt,$$

$$R_i(t) = \frac{\psi_i(t)}{\sqrt{\int_0^1 \psi_i^2(t) dt}}, \quad (1)$$

Позначимо лінійні функції Уолша в процесі Грама-Шмідта наступним чином -  $R_i(t) = W_{li}(t)$ .

Наведемо приклад використання процесу Грама-Шмідта для отримання аналітичного виразу лінійних функцій Уолша при розмірності системи  $N = 4$ . Вихідною системою функцій для даного процесу виступає сукупність кусково-лінійних функцій, які отримуються за таким правилом: для отримання вихідної системи необхідно побудувати систему функцій Уолша заданої розмірності і розбити її на таку ж кількість інтервалів, потім в рамках кожного інтервалу провести кусково-лінійну апроксимацію, як вказано на рис. 1. При цьому при кусково-лінійній апроксимації коефіцієнт  $k$  з аналітичного виразу лінійної функції  $y = W_i(kx + b)$  дорівнює розмірності системи  $N$ , а  $W_i$  приймає значення функції Уолша на інтервалі  $i$ .

На першому кроці алгоритму приймаємо, що  $\psi_0(t) = wal_0(t)$ .

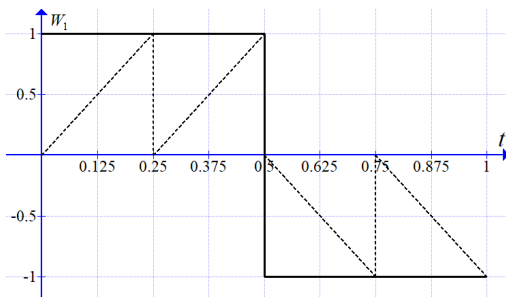


Рис. 1. Приклад отримання вихідних даних для процесу Грама-Шмідта. Суцільна лінія – функція Уолша, штрихова – кусково-лінійна апроксимація

$$W_{l0}(t) = \frac{\psi_0(t)}{\sqrt{\int_0^1 [\psi_0(t)]^2 dt}} = \frac{\psi_0(t)}{\sqrt{\int_0^1 dt}} = \psi_0(t) = wal_0(t).$$

Другий крок:

$$\psi_1(t) = \varphi_1(t) - W_{l0}(t) \int_0^1 \varphi_1(t) W_{l0}(t) dt.$$

Знайдемо значення визначеного інтегралу:

$$\int_0^1 \varphi_1(t) W_{l0}(t) dt = \int_0^{0,25} 4t dt + \int_{0,25}^{0,5} (4t-1) dt +$$

$$+ \int_{0,5}^{0,75} (-4t+2) dt + \int_{0,75}^1 (-4t+3) dt =$$

$$= 0,125 + 0,125 - 0,125 - 0,125 = 0.$$

Таким чином, значення виразу:

$$W_{l0}(t) \int_0^1 \varphi_1(t) W_{l0}(t) dt = 0.$$

Звідси  $\psi(t) = \varphi(t)$ .

$$W_{l1}(t) = \frac{\psi_1(t)}{\sqrt{\int_0^1 [\psi_1(t)]^2 dt}} =$$

$$= \frac{\varphi_1(t)}{\sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}}} = \frac{\varphi_1(t)}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{3} \varphi_1(t).$$

Використовуючи метод математичної індукції, можна сказати, що в результаті використання процесу Грама-Шмідта отримана система ортонормованих лінійних функцій відрізнятиметься від системи функцій Уолша нормуючим множником  $\sqrt{3}$ , що необхідний для виконання умови нормованості. При цьому перша функція системи, яка характеризує постійну складову, залишається незмінною.

Отже, система лінійних функцій описується наступним виразом:

$$\begin{cases} W_{l0}(t) = 1 \\ W_{ln}(t) = \sqrt{3} wal_{nk}(nt - k) \end{cases}, \quad (2)$$

де  $n$  – номер функції;  $wal_{nk}$  – значення  $n$ -ої функції Уолша на  $k$ -му інтервалі розбиття,  $\{n, k\} = 0 \dots 2^m - 1$ .

Існує чимало способів упорядкування функцій Уолша. Найбільшого поширення набули наступні способи упорядкування функцій Уолша [9]:

- по Уолшу;

- по Пелі;
- по Адамару.

Аналогічним чином можна упорядкувати систему лінійних функцій на базі функцій Уолша.

В системі Пелі порядок описаних вище функцій визначається записом порядку функції у системі Уолша  $i$  в кодї Грея, який читається як запис числа в двійковому кодї. Систему Адамара  $pal_i(x)$  утворюють ті ж функції, порядок розташування яких в цій системі визначається також кодом Грея, який читається в зворотному порядку як двійковий код. У табл. 1 показано відповідність між номерами перших восьми функцій в системах, упорядкованих по Уолшу, Адамару і Пелі [10, 11].

### III. ДИСКРЕТНІ ФУНКЦІЇ НА БАЗІ ФУНКЦІЙ УОЛША

Для обробки сигналів, отриманих експериментальним шляхом, найбільший інтерес представляють дискретні функції Уолша. Розвинувши систему дискретних функцій аналогічно лінійним функціям Уолша, отримаємо дискретні функції на основі лінійних функцій на базі функцій Уолша.

$$W_{dn}(k) = \begin{cases} 1, & W_{ln}(k) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ -1, & W_{ln}(k) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0, & W_{ln}(k) \neq -\frac{\sqrt{3}}{2}, W_{ln}(k) \neq \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad (3)$$

де  $W_{ln}(k)$  – значення лінійної функції Уолша під номером  $n$  на  $k$ -тому інтервалі розбиття.

Виходячи з виразу (3), дискретні функції Уолша матимуть вид звичайних дискретних функцій Уолша. Кожен відлік дискретної функції буде розташований на початку зв'язаного з ним елементу неперервної функції. Також можливе довільне розташування відліку на інтервалі. Проте це доцільно робити в тому випадку, коли при інших розташуваннях відліку він потрапляє в точку розриву.

Таблиця 1. Порядок функцій при різних способах упорядкування

Номер функції $i$ в кодї Грея	Номер функції $i$ в системі Уолша	Номер $i$ функції в системі Пелі	Номер $i$ функції в системі Адамара
000	0	0	0
001	1	1	4
011	2	3	6
010	3	2	2
110	4	6	3
111	5	7	7
101	6	5	5
100	7	4	1

Вираз (3) підходить для побудови дискретних функцій, упорядкованих за будь-якою системою.

Також можливе використання формул для звичайних дискретних функцій Уолша, оскільки дискретні функції повторюють їх вигляд. Наприклад, формула для дискретних функцій Уолша за нумерацією Адамара:

$$W_n(k) = (-1)^{\sum_{i=0}^{m-1} n_i k_i} = \prod_{i=0}^{m-1} (-1)^{n_i k_i},$$

де  $n$  — номер функції Уолша,  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$  — номер відліку,  $m = \log_2 N$  — рівень сигналу (двійковий логарифм з кількості функцій в системі),  $n_i$  —  $i$ -й розряд у двійковому представленні номеру функції,  $k_i$  —  $i$ -й розряд у двійковому представленні номеру відліку.

Аналітичні формули та графіки перших 8 функцій з систем неперервних та дискретних функцій на базі функцій Уолша (упорядкованих за кількістю знакозмін) наведені у додатку 1.

### IV. ПРИКЛАД АПРОКСИМАЦІЇ

Наведемо приклад апроксимації функції зміни швидкості вітру протягом доби за допомогою даних функцій. Дані про швидкість вітру в прикладі отримуються дискретно з інтервалом в три години. На рис. 2 дані про швидкість вітру відображаються за допомогою дискретних відліків. При цьому система функцій, незалежно від способу впорядкування, забезпечує однакову похибку апроксимації.

Загальний вигляд функції, наближеної за допомогою функцій Уолша:

$$y'(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i W_{li} \left( \frac{x}{T} \right),$$

де  $c_i = \frac{1}{T} \int_0^1 y(x) W_{li} \left( \frac{x}{T} \right) dx$  – коефіцієнт розкладання

для  $i$ -ої функції Уолша  $W_{li}(x)$ .

Коефіцієнти  $c_i$  для системи розмірністю 8 наведені в таблиці 2.

В результаті апроксимації отримаємо наступне наближення (рис. 2).

Середньоквадратична похибка апроксимації для наближення, зображеного на рис. 2, становить 88%, а середня відносна похибка апроксимації в вузлах апроксимації становить 40%.

Таблиця 2. Коефіцієнти розкладання функції

$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$
1,88	0,14	0,22	-0,36	0,22	0,07	-0,29	0,14



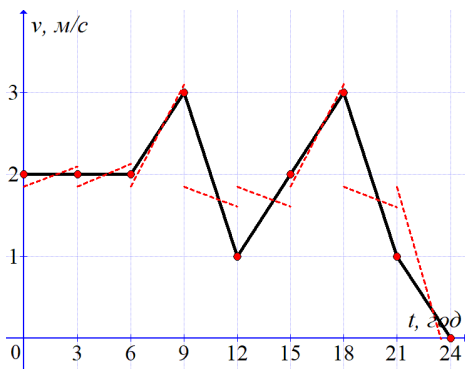


Рис. 2. Приклад апроксимації функції зміни швидкості вітру протягом доби. Суцільна лінія – кусково-лінійна апроксимація, штрихова – за допомогою лінійних функцій на базі функцій Уолша.

На кінцях інтервалу відхилення апроксимуючих значень є максимальними. Це пояснюється явищем Гібса. Враховуючи це, середньоквадратична похибка апроксимації зменшується до 33%, а середня відносна похибка апроксимації в вузлах апроксимації зменшується до 23%.

Отриману лінійну систему доцільно використовувати при апроксимації процесів, які мають лінійний або близький до лінійного характер. Також при збільшенні кількості функцій в спектрі апроксимуючої функції збільшується вміст високочастотних гармонік. Тому при збільшенні частоти сигналу, який підлягає апроксимації, доцільно збільшувати розмірність системи.

#### ВИСНОВКИ

Таким чином, у статті запропоновано метод побудови ортонормованої системи лінійних та дискретних функцій на базі функцій Уолша. Розглянута система дозволяє проводити апроксимацію процесів, які мають лінійний або близький до лінійного характер, наприклад, функцію зміни швидкості вітру. При використанні цієї системи середня відносна похибка апроксимації у вузлах становить 23%. Зміна розмірності системи функцій впливає на частотний спектр

Надійшла до редакції 26 січня 2019 р.

УДК 621.314:519.6

## Линейные функции на базе функций Уолша

Мартынюк<sup>f</sup> В. И., ORCID [0000-0003-0882-5114](https://orcid.org/0000-0003-0882-5114)  
e-mail [martynyukvadum@gmail.com](mailto:martynyukvadum@gmail.com)

Клен<sup>s</sup> К. С., к.т.н., ORCID [0000-0002-6674-8332](https://orcid.org/0000-0002-6674-8332)  
e-mail [ekateryna.osypenko@gmail.com](mailto:ekateryna.osypenko@gmail.com)

Кафедра промышленной электроники [kaf-pe.kpi.ua](http://kaf-pe.kpi.ua)  
Факультет электроники [fel.kpi.ua](http://fel.kpi.ua)

Национальный технический университет Украины

«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» [kpi.ua](http://kpi.ua)

Киев, Украина

апроксимуючого сигналу, що, в свою чергу, також впливає на похибку апроксимації.

#### ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- [1] SUKHODOLYA O. M., SIDORENKO A. A., BEGUN S. V., and BELUHA A. A., "Suchasnyy stan, problemy ta perspektyvy rozvytku hidroenerhetyky Ukrayiny [Current state, problems and prospects of hydropower development in Ukraine.]," Kiev, 2014.
- [2] V. Baryakhtar, V. Kuhar, and G. Palshin, "Enerhetyka Ukrayiny u konteksti zahal'nosvitovykh tendentsiy [Power engineering of Ukraine in the context of global trends]," *Visnyk Natsional'noyi Akad. Nauk Ukrayiny*, vol. № 7, p. 14 — 26, 2000.
- [3] K. S. Osipenko та V. Y. Zhuikov, Linearization of the function of changing the parameters of the primary energy stream by the Franklin discrete functions.
- [4] F. Boico and B. Lehman, "Study of Different Implementation Approaches for a Maximum Power Point Tracker," in *2006 IEEE Workshops on Computers in Power Electronics*, 2006, pp. 15–21, DOI: 10.1109/COMPEL.2006.305646.
- [5] N. Ahmed and K. R. Rao, *Ortogonal'nyye preobrazovaniya pri obrabotke tsifrovyykh signalov [Orthogonal Transformations in Digital Signal Processing]*. Moscow: Svyaz', 1980.
- [6] E. E. Dagman and G. A. Kukharev, *Bystryye diskretnyye ortogonal'nyye preobrazovaniya [Fast discrete orthogonal transforms]*. Novosibirsk: Nauka, 1983.
- [7] Zulfikar, S. A. Abbasi, and A. R. M. Alamoud, "A Novel Complete Set of Walsh and Inverse Walsh Transforms for Signal Processing," in *2011 International Conference on Communication Systems and Network Technologies*, 2011, pp. 504–509, DOI: 10.1109/CSNT.2011.108.
- [8] P. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions," *Math. Ann.*, vol. 100, no. 1, pp. 522–529, 1928.
- [9] M. A. Trakhtman and V. A. Trakhtman, *Osnovy teorii diskretnyykh signalov na konechnyykh intervalakh [Fundamentals of the theory of discrete signals at finite intervals]*. Moscow: Sovetskoye radio, 1975.
- [10] F. SCHIPP, W. R. WADE, and P. SIMON, *An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*. CRC Press, 1990.
- [11] Gonorovskiy I.S., *Radiotekhnicheskiye tsepi i signaly [Radio circuits and signals]*. Moscow: Radio i svyaz', 1986.



*Аннотация*—В данной статье рассмотрен метод построения ортонормированной системы линейных функций для аппроксимации функции изменения скорости ветра линейными приближениями с целью оптимизации режима работы ветрогенератора и максимизации отбора энергии от возобновляемых источников. При построении указанной системы за основу взята система ортонормированных функций Уолша. При применении процесса Грама-Шмидта к базовой системе функций было получено аналитическое выражение для линейных функций на базе функций Уолша. Разработанная система функций обладает теми же свойствами, что и система непрерывных функций Уолша. Дискретный вариант разработанных функций обладает всеми параметрами базовой системы функций, а также имеет такие же графики, как и система дискретных функций Уолша. Были рассмотрены различные способы упорядочения функций внутри системы. Установлено, что погрешность аппроксимации функции изменения скорости ветра не зависит от способа упорядочения функций. Приведен пример аппроксимации функции изменения скорости ветра в течение суток с помощью линейных функций на базе функций Уолша.

Библ. 11, рис. 2, прил. 1

*Ключевые слова* - функции Уолша, аппроксимация, процесс Грама-Шмидта, ветрогенератор, ортонормированная система функций

UDC 621.314:519.6

## Linear Functions Based on Walsh Functions

V. M Martynyuk<sup>f</sup>, ORCID [0000-0003-0882-5114](https://orcid.org/0000-0003-0882-5114)

e-mail [martynyukvadum@gmail.com](mailto:martynyukvadum@gmail.com)

K. S. Klen<sup>s</sup>, PhD, ORCID [0000-0002-6674-8332](https://orcid.org/0000-0002-6674-8332)

e-mail [ekateryna.osypenko@gmail.com](mailto:ekateryna.osypenko@gmail.com)

Department of Industrial Electronics [kaf-pe.kpi.ua](http://kaf-pe.kpi.ua)

Faculty of electronics [fel.kpi.ua](http://fel.kpi.ua)

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute” [kpi.ua](http://kpi.ua)

Kyiv, Ukraine

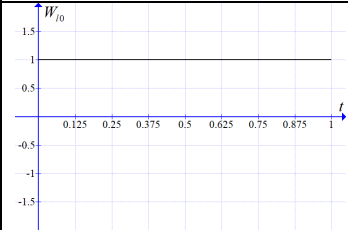
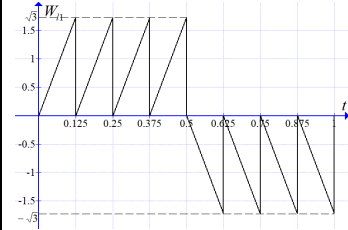
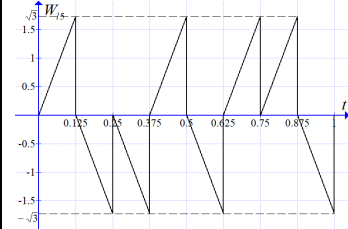
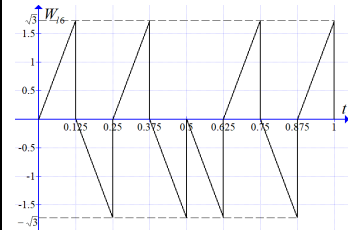
*Abstract*—In this paper, the method of constructing an orthonormal system of linear functions for approximating the function of changing the wind speed by linear approximations is considered in order to optimize the operation of the wind generator and to maximize energy recovery from renewable sources. In the construction of this system, the system of orthonormal Walsh functions was taken as the basis. In the application of the Gram-Schmidt process to the system of the basic system of functions an analytic expression for linear functions based on Walsh functions was obtained. The developed system of functions possesses all properties, such as the system of continuous Walsh functions. The discrete version of the developed functions has all the parameters of the base system of functions, and also has the same graphs as the system of discrete Walsh functions. Most common ways of organizing functions within the system were considered. It is established that the error of the approximation of the function of changing the speed of the wind does not depend on the way of the ordering of functions. An example of an approximation of the function of change in wind speed during the day is given with the help of linear functions based on Walsh functions with a dimension of 8, as well as errors of the approximation of the wind speed change function are calculated. The mean square error of approximation of linear processes does not exceed 88%, and the average relative error of approximation in knots is 40%. This system is subjected to the Gibbs effect. That is, the reduced accuracy of approximation at the ends of the approximation interval. Given the Gibbs effect, the developed system allows for the approximation of linear processes with a mean square error that does not exceed 33%, the relative error of approximation in units of approximation decreases to 23%. The choice of the dimension of the system affects the frequency spectrum of the approximating signal, which in turn affects the accuracy of the approximation. Namely, with the increase in the number of functions in the spectrum of the approximating function, the content of high-frequency harmonics increases. Therefore, when increasing the signal frequency, which is subject to approximation, it is expedient to increase the dimension of the system. In turn, for the low-frequency signal approximation, it is expedient to use as little as possible the dimensions of the system. Thus, by choosing the appropriate dimension of the system, we can minimize the error of approximation.

Ref. 11, fig. 2, add. 1.

*Keywords* — Walsh functions, approximation, Gram-Schmidt process, wind generator, orthonormal system of functions



ДОДАТОК 1. АНАЛІТИЧНІ ВИРАЗИ ТА ГРАФІКИ ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ СИСТЕМИ РОЗМІРНОСТЮ 8

Номер функції	Лінійні неперервні функції	
	Інтервал розбиття функції	Графік лінійних неперервних функцій
0	$1, 0 \leq t \leq 1$	
1	$8\sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 0,125$ $\sqrt{3}(8t-1), 0,125 \leq t \leq 0,25$ $\sqrt{3}(8t-2), 0,25 \leq t \leq 0,375$ $\sqrt{3}(8t-3), 0,375 \leq t \leq 0,5$ $-\sqrt{3}(8t-4), 0,5 \leq t \leq 0,625$ $-\sqrt{3}(8t-5), 0,625 \leq t \leq 0,75$ $-\sqrt{3}(8t-6), 0,75 \leq t \leq 0,875$ $-\sqrt{3}(8t-7), 0,875 \leq t \leq 1$	
⋮	⋮	⋮
5	$8\sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 0,125$ $-\sqrt{3}(8t-1), 0,125 \leq t \leq 0,25$ $-\sqrt{3}(8t-2), 0,25 \leq t \leq 0,375$ $\sqrt{3}(8t-3), 0,375 \leq t \leq 0,5$ $-\sqrt{3}(8t-4), 0,5 \leq t \leq 0,625$ $\sqrt{3}(8t-5), 0,625 \leq t \leq 0,75$ $\sqrt{3}(8t-6), 0,75 \leq t \leq 0,875$ $-\sqrt{3}(8t-7), 0,875 \leq t \leq 1$	
6	$8\sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 0,125$ $-\sqrt{3}(8t-1), 0,125 \leq t \leq 0,25$ $\sqrt{3}(8t-2), 0,25 \leq t \leq 0,375$ $-\sqrt{3}(8t-3), 0,375 \leq t \leq 0,5$ $-\sqrt{3}(8t-4), 0,5 \leq t \leq 0,625$ $\sqrt{3}(8t-5), 0,625 \leq t \leq 0,75$ $-\sqrt{3}(8t-6), 0,75 \leq t \leq 0,875$ $\sqrt{3}(8t-7), 0,875 \leq t \leq 1$	
7	$8\sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 0,125$ $-\sqrt{3}(8t-1), 0,125 \leq t \leq 0,25$ $\sqrt{3}(8t-2), 0,25 \leq t \leq 0,375$ $-\sqrt{3}(8t-3), 0,375 \leq t \leq 0,5$ $\sqrt{3}(8t-4), 0,5 \leq t \leq 0,625$ $-\sqrt{3}(8t-5), 0,625 \leq t \leq 0,75$ $\sqrt{3}(8t-6), 0,75 \leq t \leq 0,875$ $-\sqrt{3}(8t-7), 0,875 \leq t \leq 1$	