

# Застосування методу аналізу періодичних режимів для розрахунку перехідних процесів в електронних колах

Московко<sup>f</sup> А. О., ORCID [0000-0001-9432-7247](https://orcid.org/0000-0001-9432-7247)

Витязь<sup>s</sup> О. О., к.т.н. доц., ORCID [0000-0002-4252-342X](https://orcid.org/0000-0002-4252-342X)

Кафедра електронної інженерії [ee.kpi.ua](http://ee.kpi.ua)

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» [kpi.ua](http://kpi.ua)

Київ, Україна

Ванденбош<sup>s</sup> Гі, ORCID [0000-0002-5878-3285](https://orcid.org/0000-0002-5878-3285)

Кафедра телекомунікацій та мікрохвильової техніки [esat.kuleuven.be/telemic](http://esat.kuleuven.be/telemic)

Католицький університет Льовену [kuleuven.be](http://kuleuven.be)

Льовен, Бельгія

**Анотація**—В цій роботі представлена нова методика розрахунку перехідних процесів за допомогою метода дискретної згортки з використанням ряду Котельникова, який призначений для аналізу стаціонарних режимів нелінійних електронних кіл. Матрична форма апроксимації похідних дозволяє отримати прості матричні співвідношення для алгебраїзованих диференціальних рівнянь математичної моделі. Для розрахунку перехідної характеристики аперіодичний сигнал джерела повторюють з періодом, більшим за тривалість перехідних процесів у колі. В роботі наведено три приклади розрахунку перехідних процесів для ілюстрації застосування розробленої методики. Бібл. 15, рис. 10.

**Ключові слова** — перехідні процеси; дискретна згортка; стаціонарний режим; ряд Котельникова

## I. ВСТУП

Аналіз перехідних процесів електронних кіл є одним з найбільш складних типів аналізу з точки зору обчислювальних витрат. Класичні симулятори електронних кіл виконують чисельне інтегрування диференціальних рівнянь для знаходження перехідної характеристики кола. Точність обчислення перехідної характеристики обмежена точністю чисельного інтегрування.

Ціла низка методів аналізу перехідних процесів була запропонована задля підвищення ефективності і точності розрахунку перехідних характеристик.

У [1] описаний метод аналізу перехідних процесів лінійних кіл з періодичним джерелом збудження. Алгоритм базується на методі змінних стану. Задля знаходження розв'язку математичної моделі кола розв'язують рівняння у кінцевих різницях на рівномірній часовій сітці.

Метод аналізу перехідних процесів у нелінійних колах із частотно-залежними параметрами представлений у [2]. У цьому методі нелінійні компоненти кола заміщують джерелами, сигнали яких залежать від часу. Лінеаризоване коло далі моделюється у частотній області і перехідну характеристику отримують шляхом зворотного перетворення Лапласа.

Метод прямого ієрархічного символьного аналізу перехідних процесів у лінійних колах [3] дозволяє отримувати символьні вирази для перехідних характеристик великих лінійних кіл. Він використовує концепцію скороченої модифікованої вузлової матриці, що базується на вузловому методі.

У [4], [5] використовують ряд Вольтерри задля знаходження перехідних характеристик нелінійних кіл. Нелінійні компоненти кола представляють у вигляді декількох лінійних кіл Вольтерри. Далі коло аналізують за допомогою методу, описаному у [1] і розраховують перехідну характеристику на рівномірній часовій сітці.

Релаксаційні методи, описані у [6], базуються на методах Гауса-Якобі та Гауса-Зейделя. Ці методи, як правило, використовуються у більшості сучасних симуляторів електронних кіл у часовій області.

Основна проблема методів аналізу перехідних процесів полягає в тому, що розв'язок рівнянь математичної моделі кола шукають точка за точкою, тому похибка розв'язку накопичується. Ця проблема відсутня у більшості методів, призначених для аналізу стаціонарних режимів [7]–[15], однак ці методи не призначені для аналізу перехідних процесів.



У цій роботі пропонується використання методу дискретної згортки з використанням ряду Котельникова [14] для знаходження перехідної характеристики електронних кіл.

## II. МЕТОД ДИСКРЕТНОЇ ЗГОРТКИ З ВИКОРИСТАННЯМ РЯДУ КОТЕЛЬНИКОВА

### A. Основи

Математична модель кола у стаціонарному періодичному стані у часовій області представляється у вигляді системи рівнянь у повних похідних та рівнянь, що визначають періодичність сигналів (струмів і напруг):

$$\begin{cases} C_1 \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), \dots, x_L(t), t) \\ \dots \\ C_L \frac{dx_L(t)}{dt} = f_L(x_1(t), \dots, x_L(t), t), \\ x_1(t) = x_1(t+T) \\ \dots \\ x_L(t) = x_L(t+T) \end{cases} \quad (1)$$

де  $L$  – кількість невідомих сигналів у колі,  $x_1(t), \dots, x_L(t)$  – невідомі сигнали,  $f_1(x_1(t), \dots, x_L(t), t), \dots, f_L(x_1(t), \dots, x_L(t), t)$  – нелінійні функції цих сигналів,  $t$  – час,  $C_1, \dots, C_L$  – коефіцієнти, що можуть дорівнювати 1 або 0, в залежності від присутності похідної у відповідному рівнянні,  $T$  – період сигналів у колі.

Відповідно до теореми відліків Котельникова, якщо спектр деякої неперервної функції  $x(t)$  задовольняє умові [15]:

$$\omega_{\max} \leq \frac{\pi}{h}, \quad (2)$$

де  $\omega_{\max}$  – верхня частота в спектрі функції,  $h$  – крок дискретизації по часу, то така функція може бути виражена у вигляді ряду Котельникова [15]:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_h(t-t_k) \cdot x(t_k), \quad (3)$$

де  $t_k = kh$ ,  $\delta_h(t-t_k)$  – функція кардинального синуса, або ядро ряду Котельникова [15]:

$$\delta_h(t-t_k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(t-t_k)\right)}{\frac{\pi}{h}(t-t_k)}. \quad (4)$$

В свою чергу, похідну функції  $x(t)$  можна представити у вигляді похідної ряду (3):

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta'_h(t-t_k) \cdot x(t_k), \quad (5)$$

де  $\delta'_h(t-t_k)$  – похідна ядра ряду Котельникова. Рівняння (5) справедливе для всіх моментів часу  $t_i = ih$ ,

тому ми можемо записати похідну функції  $x(t)$  у наступному вигляді:

$$x'(t_i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta'_h(t_i-t_k) \cdot x(t_k), \quad (6)$$

де

$$\delta'_h(t_i-t_k) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(t-t_k)\right)}{\frac{\pi}{h}(t-t_k)} \right) \Bigg|_{t=t_i} = \frac{\cos \pi(i-k)}{h(i-k)} - \frac{\sin \pi(i-k)}{h\pi(i-k)^2}. \quad (7)$$

Для випадку  $i \neq k$ , (7) набуває наступного вигляду:

$$\delta'_h(t_i-t_k) = \frac{\cos \pi(i-k)}{h(i-k)} = \frac{(-1)^{i-k}}{h(i-k)}. \quad (8)$$

Для випадку  $i = k$ , із використанням правила Лопітала, (7) набуває наступного вигляду:

$$\delta'_h(t_i-t_k) = \frac{\cos \pi(i-k) - 1}{h(i-k)} = 0. \quad (9)$$

Підставляючи (8) у (6), отримуємо:

$$x'(t_i) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty, k \neq i}^{\infty} \frac{(-1)^{i-k}}{i-k} x(t_k). \quad (10)$$

Підставляючи (10) у вихідну систему рівнянь (1), отримуємо алгебраїзовану математичну модель кола у момент часу  $t_i$ :

$$\begin{cases} \frac{C_1}{h} \sum_{k=-\infty, k \neq i}^{\infty} \frac{(-1)^{i-k}}{i-k} x_1(t_k) = f_1(x_1(t_i), \dots, x_L(t_i), t_i) \\ \dots \\ \frac{C_L}{h} \sum_{k=-\infty, k \neq i}^{\infty} \frac{(-1)^{i-k}}{i-k} x_L(t_k) = f_L(x_1(t_i), \dots, x_L(t_i), t_i). \end{cases} \quad (11)$$

У стійких колах, які збуджуються джерелом періодичного сигналу з періодом  $T$ , після закінчення перехідних процесів, всі струми і напруги мають такий самий період. Виходячи з цього, для практичного застосування формули (11), необхідно вибрати кількість еквідистантних відліків на періоді, наприклад,  $2M$ , що дає визначити крок дискретизації як  $h = \frac{T}{2M}$ . Тоді загальна кількість відліків у системі (11) дорівнює  $2ML$ . Записавши рівняння (11) для всіх  $2M$  моментів часу, отримуємо  $2ML$  рівнянь. Тоді кількість рівнянь у системі (11) співпадає з кількістю невідомих відліків, і система може бути розв'язана, наприклад, методом Ньютона-Рафсона.

### B. Матрична форма апроксимації похідних

Вводячи заміну  $m = k - i$ , можна переписати вираз (10) у наступному вигляді:



$$x'(t_i) = \frac{1}{h} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} x(t_{i+m}). \quad (12)$$

Виходячи з періодичності сигналів, ми знаємо, що  $x(t_i) = x(t_{i+2nM})$ , тож ми можемо переписати (12) наступним чином:

$$x'(t_i) = \frac{-1}{h} \sum_{m=-M, m \neq 0}^{M-1} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+2nM}}{m+2nM} \right) x(t_{i+m}). \quad (13)$$

Введемо позначення:

$$d_{i,i+m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+2nM}}{m+2nM}. \quad (14)$$

Із урахуванням (14), (13) набуває наступного вигляду:

$$x'(t_i) = \frac{-1}{h} \sum_{m=-M, m \neq 0}^{M-1} d_{i,i+m} \cdot x(t_{i+m}). \quad (15)$$

Співвідношення (15) для всіх  $i = 0, \dots, 2M - 1$  зручно представляти у матричній формі:

$$X' = \frac{-1}{h} D \cdot X, \quad (16)$$

де  $X'$  – вектор-стовпець, що складається з усіх відліків  $x'(t_i)$  для  $i = 0, \dots, 2M - 1$ ,  $X$  – вектор-стовпець, що складається з усіх відліків  $x(t_i)$  для  $i = 0, \dots, 2M - 1$ ,  $D$  – квадратна матриця розміром  $2M \times 2M$ , що складається з коефіцієнтів  $d_{i,i+m}$ , що обчислюються за формулою (14)

Виходячи з вимог точності, нескінченний ряд у (14) вкорочують до певної скінченної кількості членів.

Вибираючи  $2M$  відліків для розрахунку і виконуючи апроксимацію похідних у математичній моделі кола (1) за формулою (16), отримуємо кінцеву алгебраїзовану систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 \frac{-1}{h} D \cdot X_1 - F_1(X_1, \dots, X_L, T_{2M}) = 0 \\ \dots \\ C_L \frac{-1}{h} D \cdot X_L - F_L(X_1, \dots, X_L, T_{2M}) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

де  $F_1(X_1, \dots, X_L, T_{2M}), \dots, F_L(X_1, \dots, X_L, T_{2M})$  – вектор-функції, що вертають значення функцій  $f_1(X_1, \dots, X_L, T_{2M}), \dots, f_L(X_1, \dots, X_L, T_{2M})$  у кожен момент часу  $t_i$  для  $i = 0, \dots, 2M - 1$ ,  $T_{2M}$  – вектор-стовпець, що складається з усіх моментів часу  $t_i$  для  $i = 0, \dots, 2M - 1$ . При цьому періодичні граничні умови вже враховані при розрахунку коефіцієнтів матриці  $D$ .

*С. Застосування методу дискретної згортки з використанням ряду Котельникова для аналізу перехідних процесів*

Метод дискретної згортки з використанням ряду Котельникова призначений для обчислення сигналів у колі у стаціонарному періодичному режимі. Матрична форма апроксимації похідних математичної моделі кола базується на властивості періодичності сигналів, отже для застосування методу дискретної згортки з використанням ряду Котельникова для обчислення перехідних процесів необхідно забезпечити виконання умови періодичності сигналів.

Для обчислення перехідних процесів у колі, збудженому джерелом сигналу довільної форми, сигнал джерела необхідно повторювати з довільним періодом, що перевищує тривалість перехідних процесів в колі (див. рис. 1). Прикладом довільного сигналу джерела може служити одинична функція Хевісайда, прямокутний імпульс і т. п.

### III. ПРАКТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Далі наведені три приклади аналізу перехідних процесів для ілюстрації застосування методу дискретної згортки з використанням ряду Котельникова.

#### A. RL-коло

Розглянемо перехідний процес в RL-колі, представленому на рис. 2. Для знаходження перехідної характеристики цього лінійного кола задаємо сигнал джерела  $i_J(t) = H(t) - H(t - 7,5)$  з періодом 15 секунд, де  $H(t)$  – одинична функція Хевісайда. Перехідною характеристикою вважаємо, наприклад, струм  $i_L(t)$ .

Математична модель кола, отримана за другим законом Кірхгофа, має наступний вигляд:

$$i_J - L \frac{di_L}{dt} - I_L = 0. \quad (18)$$

Із використанням формули (16), (18) набуває наступного вигляду:

$$I_J + \frac{L}{rh} D \cdot I_L - I_L = 0, \quad (19)$$

де  $I_J$  – вектор-стовпець відліків  $i_J(t)$ ,  $I_L$  – вектор-стовпець відліків  $i_L(t)$ .

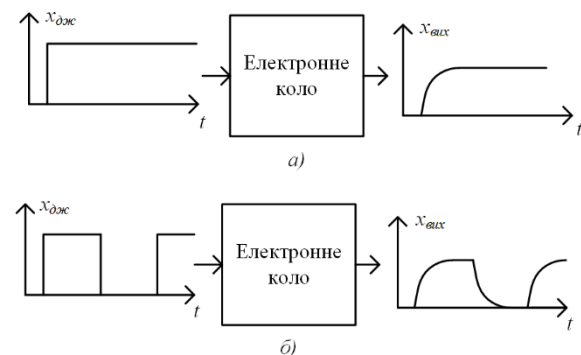


Рис. 1. Реакція кола хвих на сигнал джерела хдж: (а) – неперіодичний режим, (б) – періодичний режим

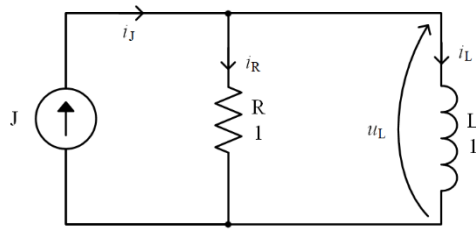


Рис. 2. Схема RL-кола

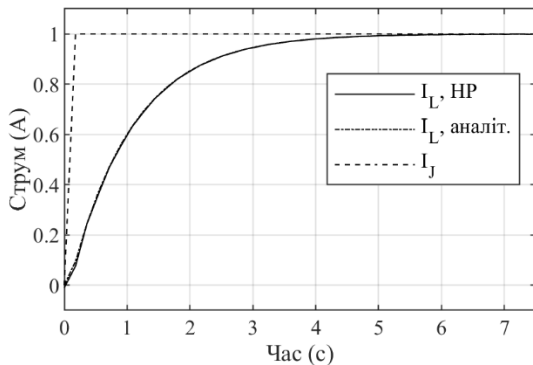


Рис. 3. Перехідна характеристика RL-кола, обчислена методом Ньютона-Рафсона (НР) та аналітично

Рівняння (19) було розв’язане методом Ньютона-Рафсона відносно відліків  $i_L(t)$ . Через різкі фронти сигналу джерела, розв’язок був знайдений лише при  $M = 50$ , тобто при 100 відліках. На рис. 3 представлені перехідні характеристики, знайдені аналітично та шляхом числового розв’язування рівняння (19). Обидва графіки візуально співпадають. Аналітичний вираз для перехідної характеристики має наступний вигляд:

$$i_L(t) = H(t) \cdot \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right). \quad (20)$$

Аналіз точності методу був проведений для  $M = 50, 100, 200, 400$ , у якому середня абсолютна похибка обчислювалася за формулою:

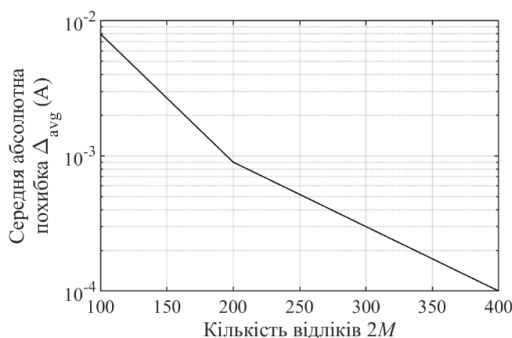


Рис. 4. Залежність середньої абсолютної похибки обчислення  $i_L(t)$  в RL-колі від кількості відліків

$$\Delta_{avg}^M = \frac{1}{2M} \sum_{i=0}^{2M-1} \left| i_L^M(t_i) - i_L^*(t_i) \right|, \quad (21)$$

де  $i_L^M(t_i)$  – значення  $i_L(t_i)$ , обчислене для певного значення  $M$ ,  $i_L^*(t_i)$  – значення  $i_L(t_i)$ , обчислене аналітично за формулою (20). Залежність середньої абсолютної похибки від кількості відліків представлена на рис. 4.

**В. RLC-коло**

Розглянемо перехідний процес в колі, представленому на рис. 5. Для знаходження перехідної характеристики цього кола задаємо сигнал джерела  $i_J(t) = H(t) - H(t-15)$  з періодом 30 секунд. Перехідною характеристикою кола вважаємо струм  $i_C(t)$ .

Математична модель кола, отримана за законами Кірхгофа, має наступний вигляд:

$$\begin{cases} i_J - i_{R1} - i_L - i_C = 0 \\ u_L - u_{R2} - u_C = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Після підстановки компонентних рівнянь, (22) набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} i_J - \frac{L}{r_1} \frac{di_L}{dt} - i_L - c \frac{du_C}{dt} = 0 \\ L \frac{di_L}{dt} - r_2 c \frac{du_C}{dt} - u_C = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Із застосуванням формули (16), (23) набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} I_J + \frac{L}{r_1 h} \cdot D \cdot I_L - I_L + \frac{c}{h} \cdot D \cdot U_C = 0 \\ -\frac{L}{h} \cdot D \cdot I_L + \frac{r_2 c}{h} \cdot D \cdot U_C - U_C = 0. \end{cases} \quad (24)$$

де  $I_J$  – вектор-стовпець, що складається з відліків  $i_J(t)$ ,  $I_L$  – вектор-стовпець, що складається з відліків  $i_L(t)$ ,  $U_C$  – вектор-стовпець, що складається з відліків  $u_C(t)$ .

Дана система нелінійних рівнянь була розв’язана методом Ньютона-Рафсона відносно відліків шуканих сигналів. Через різкі фронти сигналу джерела, розв’язок був знайдений лише при  $M = 50$ , тобто при 100 відліках. Графік обчисленої перехідної характеристики представлений на рис. 6 разом із графіком, отриманим за допомогою симулятора електронних кіл PSPICE. Обидва графіки візуально співпадають.

Аналіз точності методу був проведений для  $M = 50, 100, 200, 400$ , у якому середня абсолютна похибка обчислювалася за формулою:

$$\Delta_{avg}^M = \frac{1}{2M} \sum_{i=0}^{2M-1} \left| i_C^M(t_i) - i_C^{400}(t_i) \right|, \quad (25)$$

де  $i_C^M(t_i)$  – значення  $i_C(t_i)$ , обчислене для певного значення  $M$ . Залежність середньої абсолютної похибки від кількості відліків представлена на рис. 7.



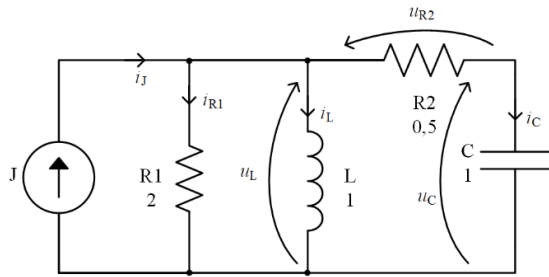


Рис. 5. Схема RLC кола

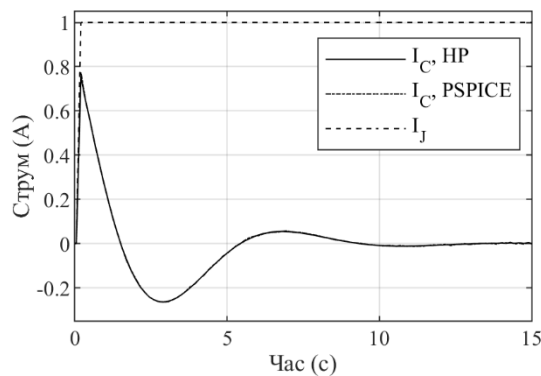


Рис. 6. Перехідна характеристика RLC кола, обчислена методом Ньютона-Рафсона (HP) та отримана за допомогою PSPICE

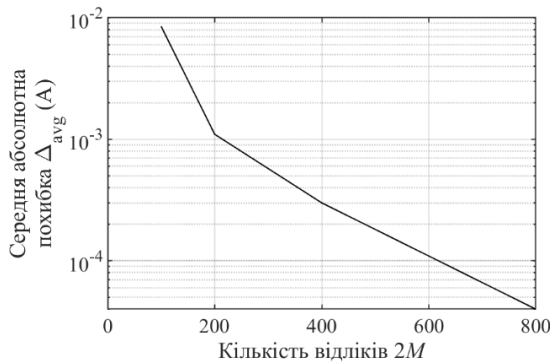
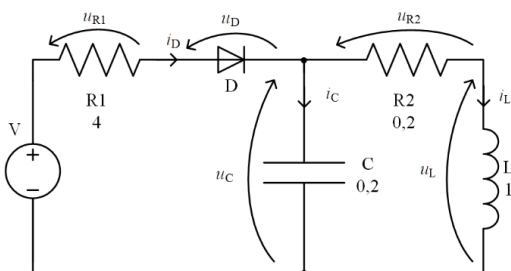
Рис. 7. Залежність середньої абсолютної похибки обчислення  $i_C(t)$  в RLC кола від кількості відліків

Рис. 8. Схема нелінійного кола

### С. Нелінійне коло

Розглянемо перехідний процес в нелінійному колі, представленому на рис. 8. Струм через діод задається рівнянням  $i_D = i_0(e^{\alpha u_D} - 1)$ , де  $i_0$  – зворотний струм діода,  $u_D$  – напруга на діоді,  $\alpha = \frac{q}{\mu k_B T}$ , де  $q$  – заряд електрона,  $\mu$  – коефіцієнт неідеальності діода,  $k_B$  – стала Больцмана,  $T$  – температура в Кельвінах. Нехай  $\mu = 1,1$  та  $i_0 = 10^{-7}$  А. Для знаходження перехідної характеристики кола задаємо сигнал джерела  $u_V(t) = H(t) - H(t - 17,5)$  із періодом 35 секунд. Реакцією кола на вхідний сигнал вважаємо напругу  $u_L(t)$ .

Математична модель кола, отримана за законами Кірхгофа, має наступний вигляд:

$$\begin{cases} i_D - i_C - i_L = 0 \\ u_V - u_{R1} - u_D - u_C = 0 \\ u_C - u_{R2} - u_L = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Після підстановки компонентних рівнянь, (26) набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} i_0(e^{\alpha u_D} - 1) - c \frac{du_C}{dt} - i_L = 0 \\ u_V - r_1 \cdot i_0(e^{\alpha u_D} - 1) - u_D - u_C = 0 \\ u_C - i_L r_2 - L \frac{di_L}{dt} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Із застосуванням формули (16), математична модель (27) набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} i_0(\exp(\alpha U_D) - I) + c \frac{1}{h} D \cdot U_C - I_L = 0 \\ U_V - r_1 \cdot i_0(\exp(\alpha U_D) - I) - U_D - U_C = 0 \\ U_C - I_L r_2 + L \frac{1}{h} D \cdot i_L = 0, \end{cases} \quad (28)$$

де  $U_D$  – вектор-стовпець, що складається з відліків  $u_D(t)$ ,  $I$  – одинична матриця,  $U_C$  – вектор-стовпець, що складається з відліків  $u_C(t)$ ,  $I_L$  – вектор-стовпець, що складається з відліків  $i_L(t)$ ,  $U_V$  – вектор-стовпець, що складається з відліків  $u_V(t)$ .

Дана система нелінійних рівнянь була розв'язана методом Ньютона-Рафсона відносно відліків шуканих сигналів. Через різкі фронти сигналу джерела, розв'язок був знайдений лише при  $M = 60$ , тобто при 120 відліках. Графік обчисленої реакції кола представлений на рис. 9 разом із графіком, отриманим за допомогою симулятора електронних кіл PSPICE. Обидва графіки візуально співпадають.

Аналіз точності методу був проведений для  $M = 60, 120, 240, 480$ , у якому середня абсолютна похибка обчислювалася аналогічно до (25) Залежність середньої абсолютної похибки від кількості відліків представлена на рис. 10.



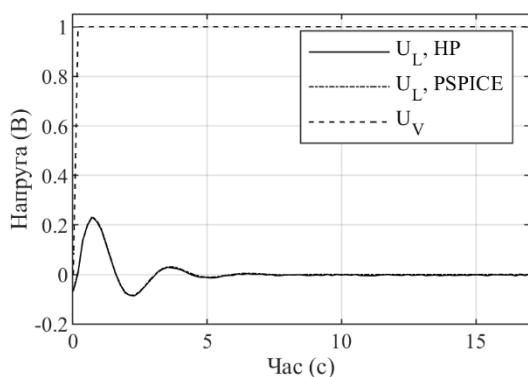


Рис. 9. Реакція нелінійного кола на одиничний ступінчастий сигнал, обчислена методом Ньютона-Рафсона (HP) та отримана за допомогою PSPICE

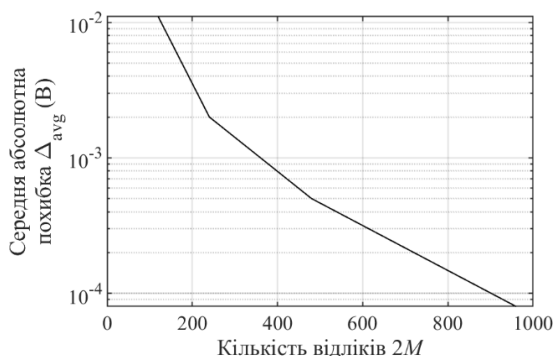


Рис. 10. Залежність середньої абсолютної похибки обчислення  $u_L(t)$  в нелінійному колі від кількості відліків

### ВИСНОВКИ

Для аналізу перехідних процесів в електронних колах запропонований метод дискретної згортки з використанням ряду Котельникова і матричної форми апроксимації похідних математичної моделі кола. Алгебраїзована система рівнянь укладається відносно невідомих відліків струмів та напруг на усьому інтервалі часу. Це дозволяє розрахувати їх одночасно, завдяки чому похибка розв'язку не накопичується, як це відбувається під час розв'язання диференціальних рівнянь для кожного наступного моменту часу.

Коефіцієнти матриці похідних обчислюються лише один раз до початку розв'язання алгебраїзованої системи рівнянь, оскільки їх значення не залежать від шуканих сигналів. Точність апроксимації похідних регулюється кількістю періодів сигналу, задіяних в апроксимації.

Наведені приклади застосування запропонованого методу для аналізу перехідних процесів ілюструють його точність та ефективність.

### ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- [1] A. Opal, "Sampled data simulation of linear and nonlinear circuits," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 15, no. 3, pp. 295–307, Mar. 1996, DOI: [10.1109/43.489100](https://doi.org/10.1109/43.489100).
- [2] R. Griffith and M. S. Nakhla, "Mixed frequency/time domain analysis of nonlinear circuits," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 11, no. 8, pp. 1032–1043, 1992, DOI: [10.1109/43.149774](https://doi.org/10.1109/43.149774).
- [3] S. E. Greenfield and M. M. Hassoun, "Direct hierarchical symbolic transient analysis of linear circuits," in *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems - ISCAS '94*, 1994, vol. 1, pp. 29–32, DOI: [10.1109/ISCAS.1994.408747](https://doi.org/10.1109/ISCAS.1994.408747).
- [4] F. Yuan, K. Raahemifar, and F. A. Mohammadi, "Efficient transient analysis of nonlinear circuits using Volterra series and piecewise constant interpolation," in *ISCAS 2001. The 2001 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (Cat. No. 01CH37196)*, 2001, vol. 2, pp. 819–822, DOI: [10.1109/ISCAS.2001.921458](https://doi.org/10.1109/ISCAS.2001.921458).
- [5] F. Yuan and A. Opal, "An efficient transient analysis algorithm for mildly nonlinear circuits," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 21, no. 6, pp. 662–673, Jun. 2002, DOI: [10.1109/TCAD.2002.1004310](https://doi.org/10.1109/TCAD.2002.1004310).
- [6] A. R. Newton and A. L. Sangiovanni-Vincentelli, "Relaxation-Based Electrical Simulation," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 3, no. 4, pp. 308–331, Oct. 1984, DOI: [10.1109/TCAD.1984.1270089](https://doi.org/10.1109/TCAD.1984.1270089).
- [7] K. S. Kundert and A. Sangiovanni-Vincentelli, "Simulation of Nonlinear Circuits in the Frequency Domain," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 5, no. 4, pp. 521–535, Oct. 1986, DOI: [10.1109/TCAD.1986.1270223](https://doi.org/10.1109/TCAD.1986.1270223).
- [8] Z. Chen, K. Batselier, H. Liu, and N. Wong, "An efficient homotopy-based Poincaré-Lindstedt method for the periodic steady-state analysis of nonlinear autonomous oscillators," in *2017 22nd Asia and South Pacific Design Automation Conference (ASP-DAC)*, 2017, pp. 283–288, DOI: [10.1109/ASPAC.2017.7858333](https://doi.org/10.1109/ASPAC.2017.7858333).
- [9] X. Cheng, Y. Chen, X. Chen, B. Zhang, and D. Qiu, "An extended analytical approach for obtaining the steady-state periodic solutions of SPWM single-phase inverters," in *2017 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, 2017, pp. 1311–1316, DOI: [10.1109/ECCE.2017.8095941](https://doi.org/10.1109/ECCE.2017.8095941).
- [10] Z. Mrcarica, T. Ilic, and V. B. Litovski, "Time-domain analysis of nonlinear switched networks with internally controlled switches," *IEEE Trans. Circuits Syst. I Fundam. Theory Appl.*, vol. 46, no. 3, pp. 373–378, Mar. 1999, DOI: [10.1109/81.751310](https://doi.org/10.1109/81.751310).
- [11] A. Brambilla, G. Gruosso, and G. S. Gajani, "FSSA: Fast Steady-State Analysis for the Analysis of Mixed Analog/Digital Circuits," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 29, no. 4, pp. 528–537, Apr. 2010, DOI: [10.1109/TCAD.2010.2042886](https://doi.org/10.1109/TCAD.2010.2042886).
- [12] T. Nakabayashi, M. Mochizuki, and S. Moro, "Analysis method of periodic solution using Haar wavelet transform for autonomous nonlinear circuits," in *2015 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems (ISPACS)*, 2015, pp. 252–256, DOI: [10.1109/ISPACS.2015.7432775](https://doi.org/10.1109/ISPACS.2015.7432775).
- [13] H. G. Brachtendorf, R. Melville, P. Feldmann, S. Lampe, and R. Laur, "Homotopy Method for Finding the Steady States of Oscillators," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 33, no. 6, pp. 867–878, Jun. 2014, DOI: [10.1109/TCAD.2014.2302637](https://doi.org/10.1109/TCAD.2014.2302637).
- [14] A. Moskovko, O. Vityaz, and G. A. E. Vandenbosch, "Analysis of Periodic Steady-States of Non-Linear Circuits Using the Discrete Singular Convolution Method," *IEEE Trans. Circuits Syst. II Express Briefs*, vol. 66, no. 6, pp. 1063–1067, Jun. 2019, DOI: [10.1109/TCSII.2018.2873189](https://doi.org/10.1109/TCSII.2018.2873189).
- [15] Xin Zhou, Dian Zhou, Jin Liu, Ruiming Li, Xuan Zeng, and Charles Chiang, "Steady-state analysis of nonlinear circuits using discrete singular convolution method," in *Proceedings Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*, pp. 1322–1326, DOI: [10.1109/DATE.2004.1269078](https://doi.org/10.1109/DATE.2004.1269078).

Надійшла до редакції 06 червня 2019 р.

УДК 621.37

## Применение метода анализа периодических режимов для расчета переходных процессов в электронных цепях

Московко<sup>f</sup> А. О., ORCID [0000-0001-9432-7247](https://orcid.org/0000-0001-9432-7247)  
Витязь<sup>s</sup> О. А., к.т.н. доц., ORCID [0000-0002-4252-342X](https://orcid.org/0000-0002-4252-342X)

Кафедра электронной инженерии [ee.kpi.ua](http://ee.kpi.ua)  
Национальный технический университет Украины  
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» [kpi.ua](http://kpi.ua)  
Киев, Украина

Ванденбош<sup>s</sup> Ги, ORCID [0000-0002-5878-3285](https://orcid.org/0000-0002-5878-3285)  
Кафедра телекоммуникаций и микроволновой техники [esat.kuleuven.be/telemic](http://esat.kuleuven.be/telemic)  
Католический университет Льовена [kuleuven.be](http://kuleuven.be)  
Льовен, Бельгия

**Аннотация**—В данной работе представлена новая методика моделирования переходных процессов с помощью метода дискретной свёртки с использованием ряда Котельникова, который предназначен для моделирования стационарных режимов нелинейных электронных цепей. Матричная форма аппроксимации производных позволяет получить простые матричные соотношения для алгебраизованных дифференциальных уравнений математической модели. Для расчёта переходной характеристики апериодический сигнал источника повторяют с периодом, большим, чем длительность переходных процессов в цепи. В работе приведено три примера расчёта переходных процессов для иллюстрации применения разработанной методики.

Библ. 15, рис. 10.

**Ключевые слова** — переходные процессы; дискретная свёртка; стационарный режим; ряд Котельникова.



UDC 621.37

# Application of the Method of Analysis of Periodic Modes for the Calculation of Transients in Electronic Circuits

A. O. Moskovko<sup>f</sup>, ORCID [0000-0001-9432-7247](https://orcid.org/0000-0001-9432-7247)

O. A. Vytiaz<sup>s</sup>, PhD Assoc.Prof., ORCID [0000-0002-4252-342X](https://orcid.org/0000-0002-4252-342X)

Electronic Engineering Lab [ee.kpi.ua](http://ee.kpi.ua)

National technical university of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute" [kpi.ua](http://kpi.ua)  
Kyiv, Ukraine

Guy Vandenbosch<sup>s</sup>, ORCID [0000-0002-5878-3285](https://orcid.org/0000-0002-5878-3285)

Telecommunications and Microwaves Lab [esat.kuleuven.be/telemic](http://esat.kuleuven.be/telemic)

KU Leuven [kuleuven.be](http://kuleuven.be)

Leuven, Belgium

**Abstract**—Transient analysis is one of the most computationally intensive types of electronic circuits' analysis. Typically, circuit simulators perform a numerical integration of the mathematical model of a circuit, which consists of a set of differential and algebraic equations, in order to find the transient response of a circuit. The maximum achievable accuracy of the transient solution is limited to the accuracy of the numerical integration method. The integration is performed point-by-point, so the error of the solution is accumulated. This is not the issue for most of the methods of periodic steady-state analysis, however these methods are not suited for the transient analysis.

In our paper we develop a transient analysis technique with usage of the discrete singular convolution method, that is intended for periodic steady-state analysis. Discrete singular convolution method decomposes unknown signals in a circuit into Shannon's series, and the derivatives of these signals are represented by the derivatives of the series. In this way, the mathematical model of a circuit is transformed into a set of nonlinear algebraic equations, which can be solved using, for example, Newton-Raphson method. The expression for the derivatives approximation can be presented in a matrix form, which leads to simple matrix equations in the mathematical model of the circuit. The derivatives matrix is independent of the unknown signals in the circuit, and it is defined only by the derivative of the Shannon kernel. The coefficients of this matrix do not change through the iterative process for a fixed number of samples. The matrix should be calculated only once, before starting the Newton-Raphson iterative procedure. It should be recalculated only if the number of samples was changed in order to improve accuracy.

In order to apply the discrete singular convolution to the transient analysis problem, an arbitrary aperiodic waveform of the input source is repeated with the period that exceeds the duration of the transient processes in a circuit. In this way, the transient solution is found simultaneously in all time points, so the error is not accumulated as if the solution is calculated point-by-point. As an example of an arbitrary waveform, the Heaviside step function can be used.

As far as the discrete singular convolution method is suitable for nonlinear circuits, the proposed technique is suitable for transient analysis of nonlinear circuits either.

Three examples are given to illustrate the application of the new technique.

Ref. 15, fig. 10.

**Keywords** – transient processes; discrete singular convolution; steady state; Shannon's series.

