

УДК 621.37

Підвищення ефективності розрахунку стаціонарних періодичних режимів електронних кіл на основі спектрального аналізу сигналів

Московко^f А. О., ORCID [0000-0001-9432-7247](https://orcid.org/0000-0001-9432-7247)Витязь^s О. О., к.т.н. доц., ORCID [0000-0002-4252-342X](https://orcid.org/0000-0002-4252-342X)Кафедра електронної інженерії ee.kpi.ua

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» kpi.ua

Київ, Україна

Ванденбош^s Гі, ORCID [0000-0002-5878-3285](https://orcid.org/0000-0002-5878-3285)Кафедра телекомунікацій та мікрохвильової техніки esat.kuleuven.be/telemicКатолицький університет Льовену kuleuven.be

Льовен, Бельгія

Анотація—Спектральні характеристики сигналів лежать в основі вибору кроку їх дискретизації у часі, якщо для обчислення цих сигналів застосовується метод аналізу стаціонарних періодичних режимів нелінійних електронних кіл на основі ряду Котельникова-Шеннона. Оскільки отримання самих сигналів і є метою застосування цього методу, виникає замкнене коло: щоб отримати сигнали, необхідно визначити крок дискретизації у часі, а щоб визначити крок дискретизації, необхідно знати спектральні властивості сигналу, а саме верхню граничну частоту, яка обмежує його частотний спектр. У роботі запропонований метод визначення кроку дискретизації сигналу на основі обчислення часткової реакції схеми на пробний сигнал у вигляді функції Хевісайда. Реакція визначається будь-яким чисельним методом, придатним для розв'язування систем нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку. За спектральною густиною енергії реакції визначається верхня гранична частота і крок дискретизації сигналу у часі, який визначає необхідну кількість відліків. Наведені приклад застосування запропонованого методу та його порівняльна ефективність.

Ключові слова — періодичний стаціонарний режим; дискретна згортка; нелінійне електронне коло; ряд Котельникова-Шеннона

I. ВСТУП

Основна проблема, що виникає під час аналізу стаціонарних періодичних режимів електронних кіл, полягає в тому, що тривалість перехідних процесів може значно перевищувати періоди сигналів у стаціонарному режимі. Внаслідок цього використання традиційних методів чисельного інтегрування диференціальних рівнянь в часовій області стає неефективним, оскільки інтервал інтегрування в цьому випадку значно перевищує період стаціонарного режиму.

Для аналізу періодичних стаціонарних режимів була запропонована ціла низка методів, які можна умовно розділити на декілька класів: методи, що аналізують математичні моделі в часовій [1]–[10], або частотній [11]–[14] областях, а також гомотопічні методи, в яких нелінійна частина математичної моделі апроксимується вкороченими рядами Тейлора [15], [16].

В методах, що аналізують математичні моделі в часовій області, періодичний стаціонарний режим представляється у вигляді крайової задачі. Різновидності таких методів включають в себе метод скінченних різниць [1], методи стрільби [2]–[6], метод балансу вейвлетів [7], а також методи дискретної згортки [8]–[10]. Частотні методи, як правило, базуються на методі гармонічного балансу [11]–[14].

Метод скінченних різниць апроксимує похідні математичної моделі кола за допомогою скінченних різниць і розв'язує отриману систему рівнянь відносно відліків невідомих сигналів. Необхідна точність досягається за рахунок збільшення кількості відліків, тобто зменшення кроку дискретизації часу. Внаслідок цього зростає кількість рівнянь, а отже збільшуються і обчислювальні витрати.

Методи стрільби трансформують крайову задачу у задачу Коші і ітераційно проводять моделювання до



знаходження початкових умов, за яких невідомі сигнали будуть задовольняти граничним умовам. Це призводить до значних обчислювальних витрат через чисельне інтегрування диференціальних рівнянь на кожній ітерації. У [4] пропонують використання проєкційного методу Гальоркіна для зменшення розмірності системи рівнянь, завдяки чому можна зменшити обчислювальні витрати.

Методи гармонічного балансу запропоновані для аналізу стаціонарних періодичних режимів у частотній області. У таких методах невідомі сигнали представляють у вигляді рядів Фур'є. Необхідна точність досягається за рахунок збільшення кількості гармонік у рядах Фур'є. Для сильно нелінійних кіл це призводить до великої кількості гармонік і, як наслідок, збільшенню обчислювальних витрат.

В методі балансу вейвлетів невідомі сигнали представляють у вигляді рядів вейвлетів замість рядів Фур'є. В гомотопічних методах невідомі сигнали розкладають у ряд Тейлора, нехтують секулярними членами та встановлюють гомотопічне відображення із лінійного розв'язку у бажаний нелінійний розв'язок.

В даній роботі розглядається метод дискретної згортки з використанням ряду Котельникова-Шеннона, який застосовується для розрахунку стаціонарних періодичних режимів нелінійних електронних кіл у часовій області. Застосування цього методу потребує визначення кількості відліків періодичних сигналів на основі верхньої граничної частоти їх спектрів, яка невідома "а priori". Тому кількість відліків можна визначити лише емпіричним шляхом, який призводить до надмірних обчислювальних витрат для забезпечення необхідної точності результату. Наша мета полягає у тому, щоб заздалегідь визначити верхню граничну частоту спектрів шуканих сигналів, а отже і мінімальну кількість відліків, що дозволить зменшити кількість рівнянь і, як наслідок, зменшити обчислювальні витрати, тобто підвищити ефективність реалізації методу дискретної згортки.

II. МЕТОД ДИСКРЕТНОЇ ЗГОРТКИ З ВИКОРИСТАННЯМ РЯДУ КОТЕЛЬНИКОВА-ШЕННОНА

A. Основи

Стаціонарний періодичний режим електронного кола у часовій області описується математичною моделлю у вигляді системи диференціальних рівнянь у повних похідних та рівнянь, що визначають періодичність сигналів (струмів і напруг) [9]:

$$\begin{cases} C_1 \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), \dots, x_L(t), t), \\ \dots \\ C_L \frac{dx_L(t)}{dt} = f_L(x_1(t), \dots, x_L(t), t), \\ x_1(t) = x_1(t+T), \\ \dots \\ x_L(t) = x_L(t+T); \end{cases} \quad (1)$$

де L – кількість невідомих сигналів у колі, $x_1(t), \dots, x_L(t)$ – невідомі сигнали, $f_1(x_1(t), \dots, x_L(t), t), \dots, f_L(x_1(t), \dots, x_L(t), t)$ – нелінійні функції цих сигналів, t – час, C_1, \dots, C_L – коефіцієнти, що можуть дорівнювати 1 або 0, в залежності від присутності похідної у відповідному рівнянні, T – період сигналів у колі.

Згідно з теоремою відліків Котельникова-Шеннона [10], якщо спектр деякої неперервної функції $x(t)$ задовольняє умові:

$$\omega_{\max} \leq \frac{\pi}{h}, \quad (2)$$

де ω_{\max} – верхня кругова частота в спектрі функції, h – крок дискретизації за часом, то така функція може бути виражена у вигляді ряду Котельникова-Шеннона [10]:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_h(t-t_k) \cdot x(t_k), \quad (3)$$

де $t_k = kh$, $\delta_h(t-t_k)$ – ядро ряду Котельникова-Шеннона, також відоме як функція кардинального синуса [10]:

$$\delta_h(t-t_k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(t-t_k)\right)}{\frac{\pi}{h}(t-t_k)}. \quad (4)$$

В свою чергу, похідну функції $x(t)$ можна представити у вигляді похідної ряду (3). Виконавши дискретизацію за часом, ми можемо записати вираз для похідної функції $x(t)$ для всіх моментів часу $t_i = ih$:

$$x'(t_i) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta'_h(t_i-t_k) \cdot x(t_k), \quad (5)$$

де $\delta'_h(t_i-t_k)$ – похідна ядра ряду Котельникова-Шеннона, що обчислюється наступним чином [9]:

$$\delta'_h(t_i-t_k) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(t-t_k)\right)}{\frac{\pi}{h}(t-t_k)} \right) \Bigg|_{t=t_i} =$$

$$= \begin{cases} \frac{(-1)^{i-k}}{h(i-k)}, & i \neq k; \\ 0, & i = k. \end{cases}$$

Підставляючи (6) у (5), отримуємо:

$$x'(t_i) = \frac{1}{h} \sum_{k=-\infty, k \neq i}^{\infty} \frac{(-1)^{i-k}}{i-k} x(t_k). \quad (7)$$

Підставляючи (7) у вихідну систему диференціальних та алгебраїчних рівнянь (1), отримуємо алгебраїзовану математичну модель кола у момент часу t_i :

$$\begin{cases} \frac{C_1}{h} \sum_{k=-\infty, k \neq i}^{\infty} \frac{(-1)^{i-k}}{i-k} x_1(t_k) = \\ = f_1(x_1(t_i), \dots, x_L(t_i), t_i), \\ \dots \\ \frac{C_L}{h} \sum_{k=-\infty, k \neq i}^{\infty} \frac{(-1)^{i-k}}{i-k} x_L(t_k) = \\ = f_L(x_1(t_i), \dots, x_L(t_i), t_i). \end{cases} \quad (8)$$

У стійких колах, які збуджуються джерелом періодичного сигналу з періодом T , після закінчення перехідних процесів, всі струми і напруги мають такий самий період. Виходячи з цього, для практичного застосування формули (8), необхідно вибрати кількість еквідистантних відліків на інтервалі $[0, T-h]$, наприклад, $2M$, що дозволяє визначити крок дискретизації як

$$h = \frac{T}{2M}. \quad (9)$$

Тоді загальна кількість відліків у системі (8) дорівнює $2ML$. Записавши рівняння (8) для всіх $2M$ моментів часу, отримуємо $2ML$ рівнянь [9]. Таким чином, кількість рівнянь у системі (8) співпадає з кількістю невідомих відліків, і система може бути розв'язана, наприклад, методом Ньютона-Рафсона.

У випадку автономного кола, тобто коли в схемі відсутнє джерело періодичного сигналу, період T невідомий. Тоді кількість невідомих у системі (8) дорівнює $2ML+1$, і для приведення її до узгодженого вигляду необхідно або додати одне рівняння, або позбутися однієї невідомої. Зафіксувавши значення одного з сигналів у певний момент часу, наприклад, $x_1(0) = 0$, ми зменшуємо кількість невідомих у системі (8) до $2ML$, і система може бути розв'язана, наприклад, методом Ньютона-Рафсона.

В. Матрична форма апроксимації похідних

Вводячи заміну $m = k - i$, можна переписати вираз (7) у наступному вигляді:

$$x'(t_i) = \frac{1}{h} \sum_{m=-\infty, m \neq 0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} x(t_{i+m}). \quad (10)$$

З умови періодичності сигналів випливає, що $x(t_i) = x(t_{i+2nM})$, де i – будь-яке ціле число, тож ми можемо переписати (10) наступним чином [9]:

$$x'(t_i) = \frac{-1}{h} \sum_{m=-M, m \neq 0}^{M-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m+2nM}}{m+2nM} \right) x(t_{i+m}). \quad (11)$$

Співвідношення (11) для всіх $i = 0, \dots, 2M-1$ зручно представляти у матричній формі:

$$X' = \frac{-1}{h} D \cdot X, \quad (12)$$

де X – вектор-стовпець, що складається з усіх відліків невідомих сигналів $x(t_i)$ для $i = 0, \dots, 2M-1$, X' – вектор-стовпець, що складається з усіх відліків похідних $x'(t_i)$ для $i = 0, \dots, 2M-1$, D – квадратна матриця розміром $2M \times 2M$, що складається з коефіцієнтів при $x(t_{i+m})$ у рівнянні (11). Більш детальний перехід до матричної форми рівняння (11) наведено у [9].

Виходячи з вимог точності, нескінченний ряд у (11) вкорочують до певної скінченної кількості членів. Виконуючи апроксимацію похідних математичної моделі кола (1) за формулою (12), отримуємо кінцеву алгебраїзовану систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 \frac{-1}{h} D \cdot X_1 - F_1(X_1, \dots, X_L, T_{2M}) = 0, \\ \dots \\ C_L \frac{-1}{h} D \cdot X_L - F_L(X_1, \dots, X_L, T_{2M}) = 0; \end{cases} \quad (13)$$

де $F_1(X_1, \dots, X_L, T_{2M}), \dots, F_L(X_1, \dots, X_L, T_{2M})$ – вектор-функції, що вертають значення функцій $f_1(X_1, \dots, X_L, T_{2M}), \dots, f_L(X_1, \dots, X_L, T_{2M})$ у кожен момент часу t_i для $i = 0, \dots, 2M-1$, T_{2M} – вектор-стовпець, що складається з усіх моментів часу t_i для $i = 0, \dots, 2M-1$. При цьому періодичні граничні умови вже враховані при розрахунку коефіцієнтів матриці D [9].

Як видно з алгебраїзованої системи рівнянь (13), її розмірність визначається не тільки кількістю сигналів L , але і кількістю відліків кожного з них $2M$. Тому, оскільки обчислювальні витрати на розв'язання системи (13) залежать від її розмірності, мінімізація необхідної кількості відліків може розглядатися як засіб підвищення ефективності методу.

С. Процедура вибору кількості відліків

Для застосування методу необхідно вибрати кількість відліків $2M$, від якої залежить крок дискретизації h . В свою чергу, крок дискретизації повинен задовольняти умові (2). Враховуючи (9), ми можемо переписати (2) наступним чином:

$$\omega_{\max} \leq \frac{2M\pi}{T}. \quad (14)$$

Із (14) отримуємо вираз для мінімально допустимого значення M :

$$M_{\min} = \frac{T \cdot \omega_{\max}}{2\pi} = T \cdot f_{\max}, \quad (15)$$

де f_{\max} – верхня гранична частота в спектрі сигналу.

Для визначення верхньої граничної частоти необхідно визначити спектральну характеристику сигналу, яку, в свою чергу, можна знайти розв'язавши систему рівнянь (1), що і є метою застосування

даного методу. Тому для виходу з цієї ситуації, проведемо обчислення реакції системи $y(t)$ на ступінчатий сигнал (функцію Хевісайда) $H(t)$, який зазвичай застосовується для визначення перехідної характеристики лінійної схеми. Знаючи реакцію, можна визначити її спектральну характеристику, використавши перетворення Фур'є. Реакцію можна розрахувати, наприклад, застосувавши метод Рунге-Кутти. При цьому виникає проблема визначення інтервалу інтегрування Δt , оскільки він безпосередньо впливає на обчислювальні витрати і, як наслідок, зменшує ефективність нашого методу. Тобто з точки зору підвищення ефективності ця тривалість має бути якомога меншою. З іншого боку, реакція схеми на початку перехідних процесів, викликаних ступінчатим збудженням, відображає частотні властивості схеми в області високих частот, які і є предметом нашого дослідження щодо визначення f_{\max} . Це дозволяє нам знаходити реакцію в невеликому інтервалі, значення якого можна обрати виходячи з оцінки діапазону частот, в якому має працювати схема.

При виконанні дискретного перетворення Фур'є сигнал $y(t)$ повторюється з періодом, що дорівнює його тривалості, внаслідок чого на межах періодів виникають розриви першого роду, що спричиняє розширення спектру (ефект Гіббса [17]). Тому перед обчисленням спектру реакції системи $y(t)$ на ступінчатий сигнал, її необхідно доповнити для запобігання виникненню розривів. Ми доповнюємо сигнал $y(t)$ наступним чином:

$$y_{\text{доп}}(t) = \begin{cases} y(t), & 0 \leq t \leq \Delta t, \\ y(0) + y(\Delta t) - y(t - \Delta t), & \Delta t < t \leq 2\Delta t. \end{cases} \quad (16)$$

Застосування формули (16) схематично проілюстроване на рис. 1.

В такому випадку тривалість доповненої реакції становить $2\Delta t$.

Зміна інтервалу спостереження реакції Δt , а отже і тривалості доповненого сигналу впливає на його спектральну характеристику. Для прикладу, розглянемо схему однопівперіодного випрямляча розрахованого на частоту 1 кГц, представлену на рис. 2. Вольт-амперна характеристика діода D описується рівнянням $i_D = i_0(e^{\alpha u_D} - 1)$, де i_0 – зворотний струм діода, u_D – напруга на діоді, $\alpha = \frac{q}{\mu k_B T}$, де q – заряд електрона, μ – коефіцієнт неідеальності діода, k_B – стала Больцмана, T – температура в Кельвінах. Нехай $\mu = 1,1$ та $i_0 = 10^{-7}$ А. Реакція схеми на дію ступінчатого сигналу джерела V , що задається рівнянням $u_V(t) = H(t)$, де $H(t)$ – одинична функція Хевісайда, представлена на рис. 3.

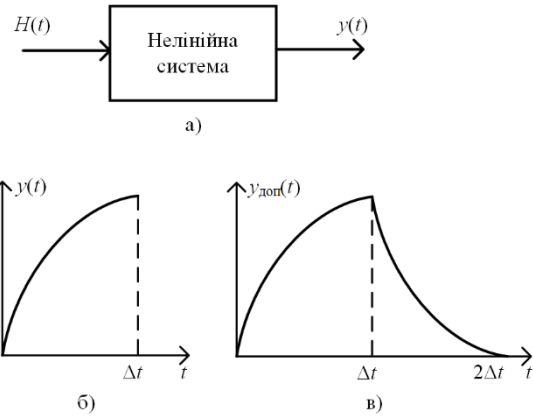


Рис. 1 Блок-схема спостереження реакції системи на функцію Хевісайда (а) та схематичний графік її вихідної (б) та доповненої (в) реакції

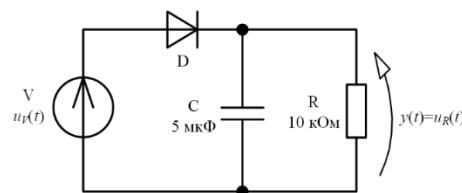


Рис. 2 Схема однопівперіодного випрямляча

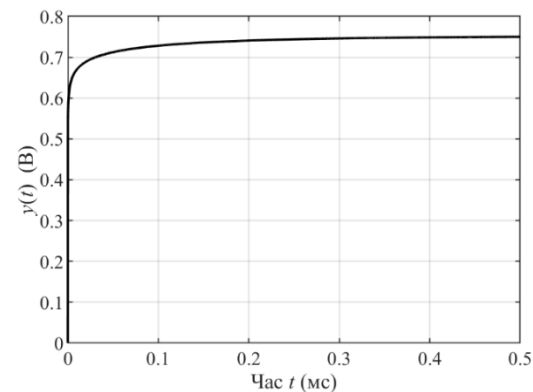


Рис. 3 Реакція випрямляча на одиничну ступінчасту напругу (функцію Хевісайда)

Оберемо декілька значень тривалості Δt , що не перевищують 10% від періоду сигналу (зادля мінімізації кількості обчислень) та обчислимо спектри відповідних реакцій. Оскільки за частоти 1 кГц період становить 1 мс, то обираємо наступні значення Δt : 50 мкс, 75 мкс та 100 мкс. Графіки доповненої за (16) реакції випрямляча на ступінчатий сигнал за різних значень Δt представлені на рис. 4.

Знайшовши доповнені реакції $y_{\text{доп}1}(t)$, $y_{\text{доп}2}(t)$, $y_{\text{доп}3}(t)$, визначаємо спектральні щільності їх енергії $W_1(f)$, $W_2(f)$, $W_3(f)$:

$$W(f) = |Y(f)|^2 = \left| \int_0^{2\Delta t} y_{\text{доп}}(t) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2, \quad (17)$$

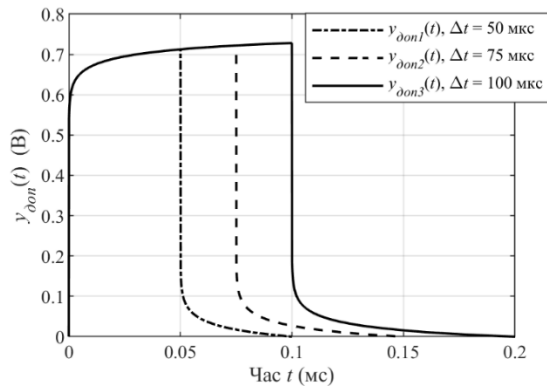


Рис. 4 Доповнена реакція випрямляча на ступінчатий сигнал за різних значень тривалості інтервалу спостереження Δt

де $j = \sqrt{-1}$, $|Y(f)|$ – спектральна щільність амплітуд відповідної доповненої реакції $y_{\text{доп}}(t)$ (див рис. 5).

Як видно з рис. 5, збільшення тривалості інтервалу спостереження Δt призводить до звуження спектральної щільності енергії. Для визначення її верхньої граничної частоти f_{max} застосуємо енергію сигналу, яка визначається у часовій та частотній областях наступним чином:

$$W = \int_0^{2\Delta t} y^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) e^{j2\pi ft} df \quad (18)$$

Вважаємо, що в інтервалі $[-f_{\text{max}}, f_{\text{max}}]$ знаходиться, $W_\epsilon = (1 - \epsilon) \cdot W$ енергії сигналу, де ϵ – коефіцієнт, що задає точність визначення f_{max} (чим менший ϵ , тим більша частина енергії знаходиться в інтервалі, обмеженому f_{max}). Тоді f_{max} знаходимо виходячи з наступного співвідношення:

$$\frac{W_\epsilon}{W} = 1 - \frac{1}{W} \int_{f=-f_{\text{max}}}^{f_{\text{max}}} W(f) df \leq \epsilon, \quad (19)$$

де енергія сигналу W визначається за (18) у часовій області.

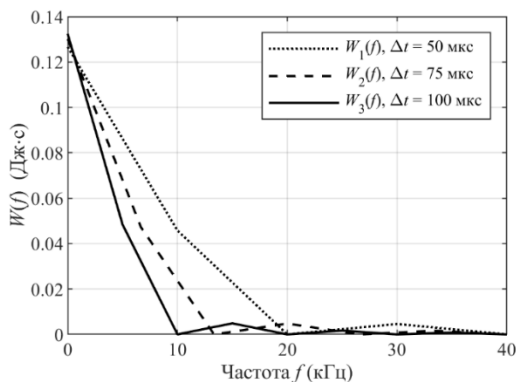


Рис. 5 Огинаюча спектральної щільності енергії доповненої реакції випрямляча на ступінчатий сигнал за різних значень тривалості інтервалу спостереження Δt

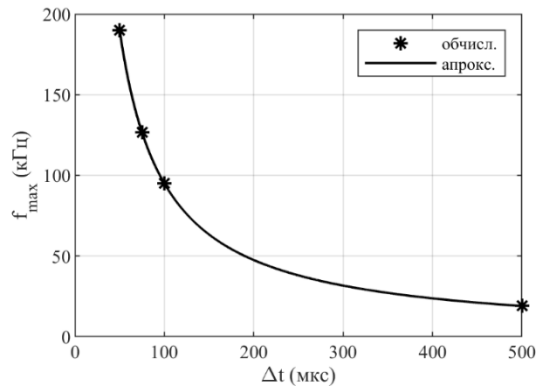


Рис. 6 Залежність верхньої частоти в спектрі від тривалості інтервалу спостереження

Для сигналів $y_{\text{доп1}}(t)$, $y_{\text{доп2}}(t)$, $y_{\text{доп3}}(t)$ за (19) та $\epsilon = 0,5\%$ отримали наступні значення f_{max} : $f_{\text{max1}} = 190$ кГц, $f_{\text{max2}} = 127$ кГц, $f_{\text{max3}} = 95$ кГц. На рисунку 6 ці частоти представлені у вигляді залежності від Δt . Ця залежність може бути апроксимована, наприклад, гіперболічною функцією вигляду

$$\tilde{f}_{\text{max}}(\Delta t) = \frac{a}{\Delta t} + b, \quad (20)$$

де a та b – деякі коефіцієнти, для обчислення яких виконаємо заміну $\tau = \frac{1}{\Delta t}$, тоді (20) набуває лінійного вигляду:

$$\tilde{f}_{\text{max}}(\tau) = a\tau + b. \quad (21)$$

Застосувавши обчислені значення f_{max} для кількох значень Δt , можна виконати лінійну апроксимацію (21) методом найменших квадратів та обчислити коефіцієнти a та b , які для зазначених вище значень f_{max} мають наступні значення: $a = 9,5$, $b = 1,5 \cdot 10^{-11}$ Гц. На рис. 6 представлені обчислені значення f_{max} за (20) та апроксимуюча крива $\tilde{f}_{\text{max}}(\Delta t)$.

Таким чином, апроксимація (20) дозволяє визначити значення f_{max} для будь-якого значення Δt . Якщо $\Delta t = \frac{T}{2}$, то тривалість доповненої за (16) реакції системи на ступінчатий сигнал дорівнює T , тому обравши значення $\Delta t = \frac{T}{2}$ отримемо значення f_{max} , яке дає змогу визначити за (15) мінімальну кількість відліків для даного періоду. Описана процедура може бути реалізована програмно і застосовуватися для визначення необхідної кількості відліків невідомих сигналів у межах заданої точності.

III. ПРАКТИЧНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Розглянемо однопівперіодний випрямляч напруги, схема якого представлена на рис. 2. Математична модель кола в стаціонарному періодичному



режимі, укладена за законами Кірхгофа та компонентними рівняннями, має наступний вигляд:

$$-i_0 \left(e^{\alpha(u_V - u_R)} - 1 \right) + c \frac{du_R}{dt} + \frac{u_R}{r} = 0, \quad (22)$$

де $u_V = \sin(2\pi ft)$ – напруга джерела, частота якої $f = 1000$ Гц. В цьому випадку період сигналів у колі $T = 1$ мс.

Після використання формули (12), (22) набуває наступного вигляду:

$$-i_0 \begin{bmatrix} e^{\alpha(U_V[0] - U_R[0])} - 1 \\ e^{\alpha(U_V[1] - U_R[1])} - 1 \\ \dots \\ e^{\alpha(U_V[2M-1] - U_R[2M-1])} - 1 \end{bmatrix} - \left(-c \frac{1}{h} D \cdot U_R + \frac{U_R}{r} \right) = 0, \quad (23)$$

де U_V – вектор-стовпець відліків $u_V(t)$, U_R – вектор-стовпець відліків $u_R(t)$, $U_V[i] = u_V(t_i)$, $U_R[i] = u_R(t_i)$ – відліки сигналів $u_V(t)$ та $u_R(t)$, де $i = 0, \dots, 2M-1$.

Перед розв'язанням системи (23) необхідно вибрати кількість відліків $2M$ за процедурою, описаною в розділі 2.С. Обчисливши значення верхньої частоти $f_{\max}(\Delta t)$ для трьох значень тривалості інтервалу Δt та виконавши апроксимацію (21) за методом найменших квадратів, отримуємо значення $\tilde{f}_{\max}(\Delta t) \Big|_{\Delta t = \frac{T}{2}} = 18$ кГц. Відповідно, із (15) знаходимо значення $M_{\min} = 18$, тому обираємо значення $M = 18$. Система (23) розв'язана методом Ньютона-Рафсона відносно 36 відліків (тобто $M = 18$), а також відносно 72 відліків (тобто $M = 36$, що відповідає зменшенню кроку дискретизації сигналу вдвічі). Графіки напруги $u_R(t)$ за різних значень M представлені на рис. 7.

Абсолютна середня похибка обчислення напруги $u_R(t)$ при 36 відліках обчислювалася за формулою [9]:

$$\Delta_{cep} = \frac{1}{36} \sum_{i=0}^{35} |u_R^{36}(t_i) - u_R^{72}(t_i)|, \quad (24)$$

де $u_R^{36}(t_i)$ – відлік $u_R(t_i)$, обчислений при $M = 18$ (36 відліків), $u_R^{72}(t_i)$ – відлік $u_R(t_i)$, обчислений при $M = 36$ (72 відліки). Отримане значення $\Delta_{cep} = 2,2$ мВ, що у відношенні до найменшого значення напруги $u_R(t)$ складає 0,37%. У випадку, коли отримана похибка є більшою від допустимої, значення M необхідно збільшити вдвічі, розв'язати систему (23) та оцінити похибку розрахунку аналогічно до (24).

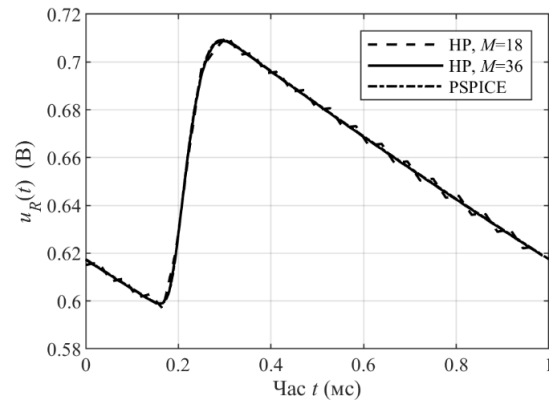


Рис. 7 Графік вихідної напруги випрямляча

Для знаходження розв'язку системи (23) запропонованим методом при 36 відліках знадобилося 81 мс реального часу, і 193 мс при 72 відліках.

Стационарний стан кола також визначався на симуляторі PSPICE, в якому застосовується метод покрокового інтегрування системи (1). Інтервал інтегрування склав 5 мс, впродовж якого схема досягла стаціонарного стану (відповідний графік наведений на рис. 7). При цьому було витрачено 397 мс реального часу. Обидва числові експерименти проводилися на віртуальній машині Windows XP із 4 ГБ оперативної пам'яті та одноядерним процесором з тактовою частотою 3 ГГц. Таким чином, розглянутий метод показав більшу ефективність у порівнянні із симулятором PSPICE.

ВИСНОВКИ

В роботі запропоновано метод програмного вибору кількості відліків невідомих сигналів, відносно яких укладається система нелінійних диференціальних рівнянь, які моделюють електронну схему у часовій області. Він дозволяє визначити такий початковий крок дискретизації невідомих сигналів у часі, за якого система рівнянь відносно невідомих відліків струмів та напруг у схемі має найменшу розмірність і в той же час дозволяє отримати результат з необхідною точністю вже на першій ітерації. У разі, якщо точність розв'язку є незадовільною, отримані результати не відкидаються, а застосовуються для оцінки точності розв'язку, отриманого під час виконання наступної ітерації з залученням більшої кількості відліків. Метод продемонстрував свою ефективність у порівнянні з симулятором PSPICE, який застосовується у сучасних комп'ютерних системах математичного моделювання електронних кіл.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- [1] T. Aprille and T. Trick, "A computer algorithm to determine the steady-state response of nonlinear oscillators," *IEEE Trans. Circuit Theory*, vol. 19, no. 4, pp. 354–360, 1972, DOI: [10.1109/TCT.1972.1083500](https://doi.org/10.1109/TCT.1972.1083500).
- [2] T. J. Aprille and T. N. Trick, "Steady-state analysis of nonlinear circuits with periodic inputs," *Proc. IEEE*, vol. 60, no. 1, pp. 108–114, 1972, DOI: [10.1109/PROC.1972.8563](https://doi.org/10.1109/PROC.1972.8563).
- [3] J. R. Parkhurst and L. L. Ogborn, "Determining the steady-state output of nonlinear oscillatory circuits using multiple shooting," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 14, no. 7, pp. 882–889, Jul. 1995, DOI: [10.1109/43.391735](https://doi.org/10.1109/43.391735).



- [4] F. Bizzarri, A. Brambilla, and L. Codecasa, "Shooting by a Two-Step Galerkin Method," *IEEE Trans. Circuits Syst. I Regul. Pap.*, vol. 66, no. 1, pp. 383–390, Jan. 2019, DOI: [10.1109/TCSI.2018.2859309](https://doi.org/10.1109/TCSI.2018.2859309).
- [5] A. Brambilla, G. Grusso, and G. S. Gajani, "FSSA: Fast Steady-State Algorithm for the Analysis of Mixed Analog/Digital Circuits," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 29, no. 4, pp. 528–537, Apr. 2010, DOI: [10.1109/TCAD.2010.2042886](https://doi.org/10.1109/TCAD.2010.2042886).
- [6] X.-X. Liu, H. Yu, and S. X.-D. Tan, "A GPU-Accelerated Parallel Shooting Algorithm for Analysis of Radio Frequency and Microwave Integrated Circuits," *IEEE Trans. Very Large Scale Integr. Syst.*, vol. 23, no. 3, pp. 480–492, Mar. 2015, DOI: [10.1109/TVLSI.2014.2309606](https://doi.org/10.1109/TVLSI.2014.2309606).
- [7] T. Nakabayashi, M. Mochizuki, and S. Moro, "Analysis method of periodic solution using Haar wavelet transform for autonomous nonlinear circuits," in *2015 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems (ISPACS)*, 2015, pp. 252–256, DOI: [10.1109/ISPACS.2015.7432775](https://doi.org/10.1109/ISPACS.2015.7432775).
- [8] A. Moskovko, O. Vityaz, and G. A. E. Vandenbosch, "Analysis of Periodic Steady-States of Non-Linear Circuits Using the Discrete Singular Convolution Method," *IEEE Trans. Circuits Syst. II Express Briefs*, vol. 66, no. 6, pp. 1063–1067, Jun. 2019, DOI: [10.1109/TCSII.2018.2873189](https://doi.org/10.1109/TCSII.2018.2873189).
- [9] A. O. Moskovko, O. O. Vytiaz, and G. Vandenbosch, "Application of the Method of Analysis of Periodic Modes for the Calculation of Transients in Electronic Circuits," *Microsystems, Electron. Acoust.*, vol. 24, no. 3, pp. 64–71, Jun. 2019, DOI: [10.20535/2523-4455.2019.24.3.171312](https://doi.org/10.20535/2523-4455.2019.24.3.171312).
- [10] Xin Zhou, Dian Zhou, Jin Liu, Ruiming Li, Xuan Zeng, and Charles Chiang, "Steady-state analysis of nonlinear circuits using discrete singular convolution method," in *Proceedings Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*, pp. 1322–1326, DOI: [10.1109/DATE.2004.1269078](https://doi.org/10.1109/DATE.2004.1269078).
- [11] K. S. Kundert and A. Sangiovanni-Vincentelli, "Simulation of Nonlinear Circuits in the Frequency Domain," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 5, no. 4, pp. 521–535, Oct. 1986, DOI: [10.1109/TCAD.1986.1270223](https://doi.org/10.1109/TCAD.1986.1270223).
- [12] A. Ushida and L. Chua, "Frequency-domain analysis of nonlinear circuits driven by multi-tone signals," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 31, no. 9, pp. 766–779, Sep. 1984, DOI: [10.1109/TCS.1984.1085584](https://doi.org/10.1109/TCS.1984.1085584).
- [13] X. Cheng, Y. Chen, X. Chen, B. Zhang, and D. Qiu, "An extended analytical approach for obtaining the steady-state periodic solutions of SPWM single-phase inverters," in *2017 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, 2017, pp. 1311–1316, DOI: [10.1109/ECCE.2017.8095941](https://doi.org/10.1109/ECCE.2017.8095941).
- [14] H. Liu, K. Batselier, and N. Wong, "A novel linear algebra method for the determination of periodic steady states of nonlinear oscillators," in *2014 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design (ICCAD)*, 2014, pp. 611–617, DOI: [10.1109/ICCAD.2014.7001416](https://doi.org/10.1109/ICCAD.2014.7001416).
- [15] H. G. Brachtendorf, R. Melville, P. Feldmann, S. Lampe, and R. Laur, "Homotopy Method for Finding the Steady States of Oscillators," *IEEE Trans. Comput. Des. Integr. Circuits Syst.*, vol. 33, no. 6, pp. 867–878, Jun. 2014, DOI: [10.1109/TCAD.2014.2302637](https://doi.org/10.1109/TCAD.2014.2302637).
- [16] Z. Chen, K. Batselier, H. Liu, and N. Wong, "An efficient homotopy-based Poincaré-Lindstedt method for the periodic steady-state analysis of nonlinear autonomous oscillators," in *2017 22nd Asia and South Pacific Design Automation Conference (ASP-DAC)*, 2017, pp. 283–288, DOI: [10.1109/ASP-DAC.2017.7858333](https://doi.org/10.1109/ASP-DAC.2017.7858333).
- [17] H. S. CARSLAW, "Gibbs' Phenomenon in Fourier's Integrals," *Nature*, vol. 116, no. 2913, pp. 312–313, Aug. 1925, DOI: [10.1038/116312c0](https://doi.org/10.1038/116312c0).

Надійшла до редакції 08 березня 2020 року



Improving Efficiency of the Periodic Steady-State Analysis of Electronic Circuits Using Spectral Analysis

A. O. Moskovko^f, ORCID [0000-0001-9432-7247](https://orcid.org/0000-0001-9432-7247)

O. A. Vytiaz^s, PhD Assoc.Prof., ORCID [0000-0002-4252-342X](https://orcid.org/0000-0002-4252-342X)

Electronic Engineering Lab ee.kpi.ua

National technical university of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute” kpi.ua
Kyiv, Ukraine

Guy Vandenbosch^s, ORCID [0000-0002-5878-3285](https://orcid.org/0000-0002-5878-3285)

Telecommunications and Microwaves Lab esat.kuleuven.be/telemic

KU Leuven kuleuven.be

Leuven, Belgium

Abstract—A key problem in the periodic steady-state analysis of electronic circuits is that the duration of transient processes in a circuit might be much larger than the period of a steady-state response. Thus, application of traditional transient methods becomes ineffective due to a huge amount of redundant computations, and special periodic-steady state methods should be used. The method for periodic steady-state analysis using the Kotelnikov-Shannon series is a time-domain method that has proved to be effective for a such type of circuits. In this method the unknown signals are expanded in the Kotelnikov-Shannon series and the derivatives of these signals are calculated as the derivatives of the series. A matrix form of the derivatives approximation leads to simple matrix expressions in a mathematical model.

When using the method for periodic steady-state analysis of non-linear circuits using the Kotelnikov-Shannon series to find the steady-state response of a circuit, a time discretization step is chosen based on the spectral characteristics of the signals. As far as the goal of the method is to calculate the unknown signals in a circuit, a vicious circle occurs: to calculate the signals, the time discretization step has to be chosen, and to choose the time discretization step, the spectral characteristics of the signals have to be known, namely the upper frequency in these characteristics.

In order to choose the time discretization step, we propose to calculate a partial transient response of a circuit for an input signal of the form of the Heaviside step function, which is usually used to obtain a step response of a linear circuit. The response is calculated with any method, suitable for solving a system of non-linear ordinary differential equations, which usually represents the mathematical model of a circuit. The upper frequency in the spectral characteristic of the partial transient response depends on the duration of the computational domain. The upper frequency versus the duration of the computational domain dependency can be approximated with a hyperbolic function. Thus, calculating few values of the upper frequency at different durations of the computational domain, the value of the upper frequency when the duration of the computational domain is equal to the period of a steady-state response can be forecasted using the hyperbolic approximation.

Keywords — *periodic steady-state; discrete singular convolution; non-linear circuit; Kotelnikov-Shannon series*

