

Підхід до розрахунку гармонічних коливань електропружних циліндрів

Безверхий О. І., д.ф.-м.н., ORCID [0000-0002-0834-6335](https://orcid.org/0000-0002-0834-6335)

e-mail o_bezver@ukr.net

Національний транспортний університет
Київ, Україна

Григор'єва Л. О., к.ф.-м.н., ORCID [0000-0001-7013-0327](https://orcid.org/0000-0001-7013-0327)

e-mail l_grigoryeva@ukr.net

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України
Київ, Україна

Реферат—В роботі запропоновано новий підхід до редукції рівнянь гармонічних електропружних осесиметричних коливань в циліндричних координатах, до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на основі гамільтонового формалізму по радіальній координаті і різницевої апроксимації по поздовжній координаті та зроблено чисельну реалізацію. Розвинуто чисельний метод інтегрування отриманої крайової задачі методом дискретної ортогоналізації. Проведено тестування отриманих результатів та порівняння з результатами, одержаними іншими авторами та іншими методами. Проведено дослідження гармонічних двовимірних коливань п'єзокерамічних поляризованих по товщині циліндрів при електричному навантаженні. Встановлено залежність характеру коливань від частоти для циліндрів різної довжини, визначено резонансні частоти. Досліджено динамічні характеристики електромеханічного стану циліндра при вимушених коливаннях з частотою, близькою до першої власної частоти. Проаналізовано зміну власних частот зі зростанням довжини циліндра, встановлено кількість та значення резонансних частот на певному частотному інтервалі.

Бібл. 12, рис. 2.

Ключові слова — п'єзокерамічний циліндр; гармонічні електричні навантаження; гамільтонова система; крайова задача електропружності; вимушені коливання; власні частоти; резонанс.

I. ВСТУП

Експериментальні і теоретичні дослідження зв'язаного деформування п'єзоелектричних елементів мають велике фундаментальне і прикладне значення. У зв'язку з цим актуальними є розробка і вдосконалення теоретичних та чисельних методів аналізу пружноелектричних гармонічних та нестационарних коливань на основі просторових континуальних рівнянь електропружності з використанням сіткових апроксимацій по просторовій координаті, реалізація розроблених алгоритмів і проведення аналізу коливань напружено-деформованого стану і електричного поля типових п'єзокерамічних елементів.

Для розв'язку задач електропружності широко застосовуються різні методи сіткових апроксимацій, які або безпосередньо алгебраїзують задачу, або зменшують її розмірність.

Раніше для дослідження усталених коливань п'єзокерамічних циліндрів застосовувався розклад розв'язку в ряди [1] або варіаційно-різницевий метод (ВРМ) [2], [3]. В роботі [4] для визначення власних частот поздовжньо поляризованих циліндрів за допомогою сплайн-апроксимації по поздовжній координаті отримано серію крайових задач на власні

значення по радіальній координаті. В [5] наводяться чисельні та експериментальні результати щодо вимушених коливань п'єзокерамічного циліндра з закріпленням торцем. На жаль, в роботі не описана математична постановка задачі. Інші роботи [6]–[9] присвячені аналізу гармонічних коливань п'єзоелектричних тіл, здійснюваному в рамках двовимірного підходу.

Описані вище підходи мають свої недоліки і далеко не завжди є зручними для реалізації для конкретного п'єзоелемента. Розклад розв'язку в ряди по просторовій координаті вимагає розв'язання набору крайових задач, при чому можуть виникнути проблеми зі збіжністю ряду та накладаються значні обмеження на крайові умови; ВРМ зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка досить часто є погано обумовленою; в багатьох наведених задачах визначається лише частотний спектр без дослідження напружено-деформованого стану, що, швидше за все, пов'язано зі складністю такого аналізу запропонованими методами. В зв'язку з цим актуальним є розвиток нових чисельно-аналітичних підходів до інтегрування систем рівнянь електропружних коливань п'єзоелементів різної форми.



В роботі [10] просторову систему рівнянь електропружності для радіально поляризованого циліндра шляхом розкладу розв'язку в ряди по поздовжній та окружній координаті зведено до набору систем рівнянь типу Гамільтона. В статті [11] використовуються рівняння гамільтонового типу по товщинній координаті для аналізу одномірних гармонічних коливань кулі, циліндру і плоского шару. Закладена в цій статті ідея узагальнюється у цій роботі для осесиметричної задачі електропружності для циліндру.

Таким чином, метою роботи є розвиток чисельно-аналітичного підходу, що базується на представленні розв'язуючої системи рівнянь електропружності для радіально поляризованих циліндрів у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь по радіальній координаті та розв'язанні отриманої крайової задачі. Перевага даного підходу полягає в тому, що отримана система рівнянь відноситься до рівнянь типу Гамільтона, в зв'язку з чим процедура інтегрування є стійкою. Крім того, дана постановка значно спрощує запис граничних умов для напружень, оскільки вони не виключаються з рівнянь, а є функціями, які допомагають у розв'язку.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Система рівнянь електропружності осесиметричних гармонічних коливань в циліндричних координатах ($f(r, z, t) = \text{Re } f^a(r, z) \exp i\omega t$), при радіальній поляризації складається з рівнянь механічних коливань

$$\frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}^a}{r} + \rho \omega^2 u_z^a = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^a}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^a - \sigma_{rr}^a}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r^a = 0, \quad (1)$$

квазістатичного наближення рівнянь Максвелла

$$\frac{\partial D_z^a}{\partial z} + \frac{\partial D_r^a}{\partial r} + \frac{D_r^a}{r} = 0,$$

$$E_z^a = -\frac{\partial \phi^a}{\partial z}, \quad E_r^a = -\frac{\partial \phi^a}{\partial r} \quad (2)$$

і матеріальних залежностей для поляризованої вздовж осі r п'єзокераміки

$$\sigma_{\theta\theta}^a = c_{11}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{12}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \phi^a}{\partial r},$$

$$\sigma_{zz}^a = c_{21}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{11}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \phi^a}{\partial r},$$

$$\sigma_{rr}^a = c_{31}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{31}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{33}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{33} \frac{\partial \phi^a}{\partial r},$$

$$\sigma_{zr}^a = c_{55}^E \left(\frac{\partial u_r^a}{\partial z} + \frac{\partial u_z^a}{\partial r} \right) + e_{51} \frac{\partial \phi^a}{\partial z},$$

$$D_r^a = e_{31} \left(\frac{u_r^a}{r} + \frac{\partial u_z^a}{\partial z} \right) + e_{33} \frac{\partial u_r^a}{\partial r} - \varepsilon_{33}^K \frac{\partial \phi^a}{\partial r},$$

$$D_z^a = e_{51} \left(\frac{\partial u_z^a}{\partial r} + \frac{\partial u_r^a}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11}^K \frac{\partial \phi^a}{\partial z}. \quad (3)$$

Тут c_{ij}^E - модулі пружності матеріалу, e_{ij} - п'єзоелектричні модулі, ε_{ij}^K - діелектричні проникності, ρ - щільність матеріалу. Шуканими є напруження σ_{ij}^a , переміщення u_r^a , u_z^a , електричний потенціал ϕ^a . Далі верхні індекси « a » (амплітудні значення), « E » (стале електричне поле) і « K » (сталі деформації) будемо опускати.

Зведемо систему рівнянь (1)-(3) до операторної гамільтонової системи по радіальній координаті відносно функцій $\bar{\sigma}_{rr}$, $\bar{\sigma}_{rz}$, \bar{D}_r , u_r , u_z , ϕ ($\bar{\sigma}_{rz} = r\sigma_{rz}$, $\bar{\sigma}_{rr} = r\sigma_{rr}$, $\bar{D}_r = rD_r$) [10]. Після необхідних перетворень одержимо

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial r} = \left(\frac{1}{r} (c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*}) - \rho \omega^2 r \right) u_r +$$

$$+ \left(c_{12}^E - c_{13}^E \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{13}^* \bar{D}_r}{\varepsilon_{33}^* r} +$$

$$+ \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr} - \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial r} = - \left(c_{12}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z} -$$

$$- \left(c_{11}^E - \frac{c_{13}^E c_{13}^*}{c_{33}^*} + \frac{e_{31} e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial z} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial z} - \rho \omega^2 r u_z^a,$$

$$\frac{\partial \bar{D}_r}{\partial r} = - \frac{e_{42}}{c_{44}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z} + \varepsilon_{11}^* r \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^* c_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{u_r}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^* c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33}^* c_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_r}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\bar{\sigma}_{rz}}{r c_{44}^E} - \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{e_{42}}{c_{44}^E} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (4)$$

В попередніх рівняннях використані позначення

$$c_{j3}^* = c_{j3} + e_{j3} \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}}, \quad e_{j3}^* = e_{j3} - c_{j3} \frac{e_{33}}{c_{33}}, \quad j = 1, 3;$$

$$\varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{11} + \frac{e_{42}^2}{c_{44}}, \quad \varepsilon_{33}^* = \varepsilon_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}.$$

Величини $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} , D_z , які не увійшли в систему (4), визначаються через основні функції σ_{rr} , u_z , D_r , u_r , σ_{rz} , ϕ формулами



$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr} + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ &- \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} D_r + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} \right) \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr} + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ &- \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} D_r + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} \right) \frac{u_r}{r}, \\ D_z &= \frac{e_{42}}{c_{44}} \sigma_{zr} - \epsilon_{11}^* \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обчислення проводяться в безрозмірних змінних

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{R}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R}, \quad \bar{\omega} = \omega R \sqrt{\frac{\rho}{c_{33}}}, \quad \bar{\rho} = 1, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{33}}, \\ \bar{e}_{ij} &= \frac{e_{ij}}{\sqrt{c_{33}\epsilon_{33}}}, \quad \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon_{33}}, \quad \bar{\sigma}_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{Rc_{33}}, \quad \bar{\sigma}_{rz} = \frac{\sigma_{rz}}{Rc_{33}}, \\ \bar{D}_r &= \frac{D_r}{R\sqrt{c_{33}\epsilon_{33}}}, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{R}, \\ \bar{\varphi} &= \frac{\varphi}{R} \sqrt{\frac{\epsilon_{33}}{c_{33}}}. \end{aligned} \quad (6)$$

В наведених формулах R – зовнішній радіус циліндра, ω – кругова частота. При цьому вигляд рівнянь (4) не зміниться. Надалі знаки безрозмірності будемо опускати.

Приведемо розв’язуючу систему (4) до системи звичайних диференціальних рівнянь на основі різницьких апроксимацій по поздовжній координаті.

Розглянемо п’єзокерамічний циліндр $r_0 < r < r_1$, $0 < z < l$. Введемо розбиття відрізка $(0, l)$ по осі z на інтервали точками $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ і в формулах (4) апроксимуємо похідні по z скінченними різницями. В результаті одержимо систему $6(n-1)$ звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr,i}}{\partial r} &= A_1(r_i) u_{r,i} + A_2 \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z} + \\ &+ A_3(r_i) \bar{D}_{r,i} + A_4 \sigma_{rr} - \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta z}, \\ \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz,i}}{\partial r} &= B_1 \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta z} + \frac{B_2(r_i)}{\Delta z^2} (u_{z,i+1} - \\ &- 2u_{z,i+1} + u_{z,i-1}) + B_3 \frac{\bar{D}_{r,i+1} - \bar{D}_{r,i-1}}{2\Delta z} + \\ &+ B_4 \frac{\bar{\sigma}_{rr,i+1} - \bar{\sigma}_{rr,i-1}}{2\Delta z} + B_5(r_i) u_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{D}_{r,i}}{\partial r} &= D_1 \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta z} + D_2 \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\Delta z^2}, \\ \frac{\partial u_{r,i}}{\partial r} &= C_1(r_i) \bar{D}_{r,i} + C_2(r_i) u_{r,i} + \\ &+ C_3 \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z} + C_4(r_i) \bar{\sigma}_{rr,i}, \\ \frac{\partial u_{z,i}}{\partial r} &= R_1 \bar{\sigma}_{rz,i} - \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta z} + R_2 \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta z}, \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} &= K_1(r_i) \bar{\sigma}_{rr,i} + K_2(r_i) \bar{D}_{r,i} + \\ &+ K_3(r_i) u_{r,i} + K_4 \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta z}, \end{aligned} \quad (7)$$

$i = 1, 2, \dots, n-2, n-1.$

Коефіцієнти системи (7) співпадають з коефіцієнтами рівнянь (4). Очевидним плюсом системи (7) є присутність в розв’язуючих функціях напружень та електричної індукції, що значно спрощує постановку граничних умов, в тому числі імпедансних. При заданих напруженнях та електричному потенціалі матриця граничних умов буде діагональною. В цьому підході присутні лише перші похідні по просторових координатах, що теж є однією з переваг методу. Як і для всіх явних методів, для збіжності методу між кроком по r та по z повинна виконуватися певна залежність (пропорція), яка визначається в ході чисельного експерименту. При сучасних обчислювальних технологіях визначення адекватного відношення між цими кроками не є проблемою.

Для виконання граничних умов при $z = z_0 = 0$ і $z = z_n = l$ необхідно записати різницьвий аналог для σ_{zz} , D_z . Скориставшись формулами (5), одержимо

$$\begin{aligned} \sigma_{zz,0} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr,0} + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} \right) \times \\ &\times \frac{u_{z,1} - u_{z,0}}{\Delta z} - \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} D_{r,0} + \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \right. \\ &\left. + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} \right) \frac{u_{r,0}}{r}, \\ D_{z,0} &= \frac{e_{42}}{c_{44}} \sigma_{zr,0} - \epsilon_{11}^* \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta z}, \\ \sigma_{zz,n} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr,n} + \left(c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + \right. \\ &\left. + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} \right) \frac{u_{z,n} - u_{z,n-1}}{\Delta z} - \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} D_{r,n} + \\ &+ \left(c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\epsilon_{33}^*} \right) \frac{u_{r,n}}{r}, \\ D_{z,n} &= \frac{e_{42}}{c_{44}} \sigma_{zr,n} - \epsilon_{11}^* \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (8)$$



Користуючись формулами (8) і апроксимаціями необхідних величин з матеріальних залежностей (3), з граничних умов знайдемо невідомі значення функцій $\bar{\sigma}_{rr}$, $\bar{\sigma}_{rz}$, \bar{D}_r , u_r , u_z , φ на границях $z = z_0 = 0$

і $z = z_n = l$. В результаті отримаємо замкнену систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яка розв'язується методом дискретної ортогоналізації.

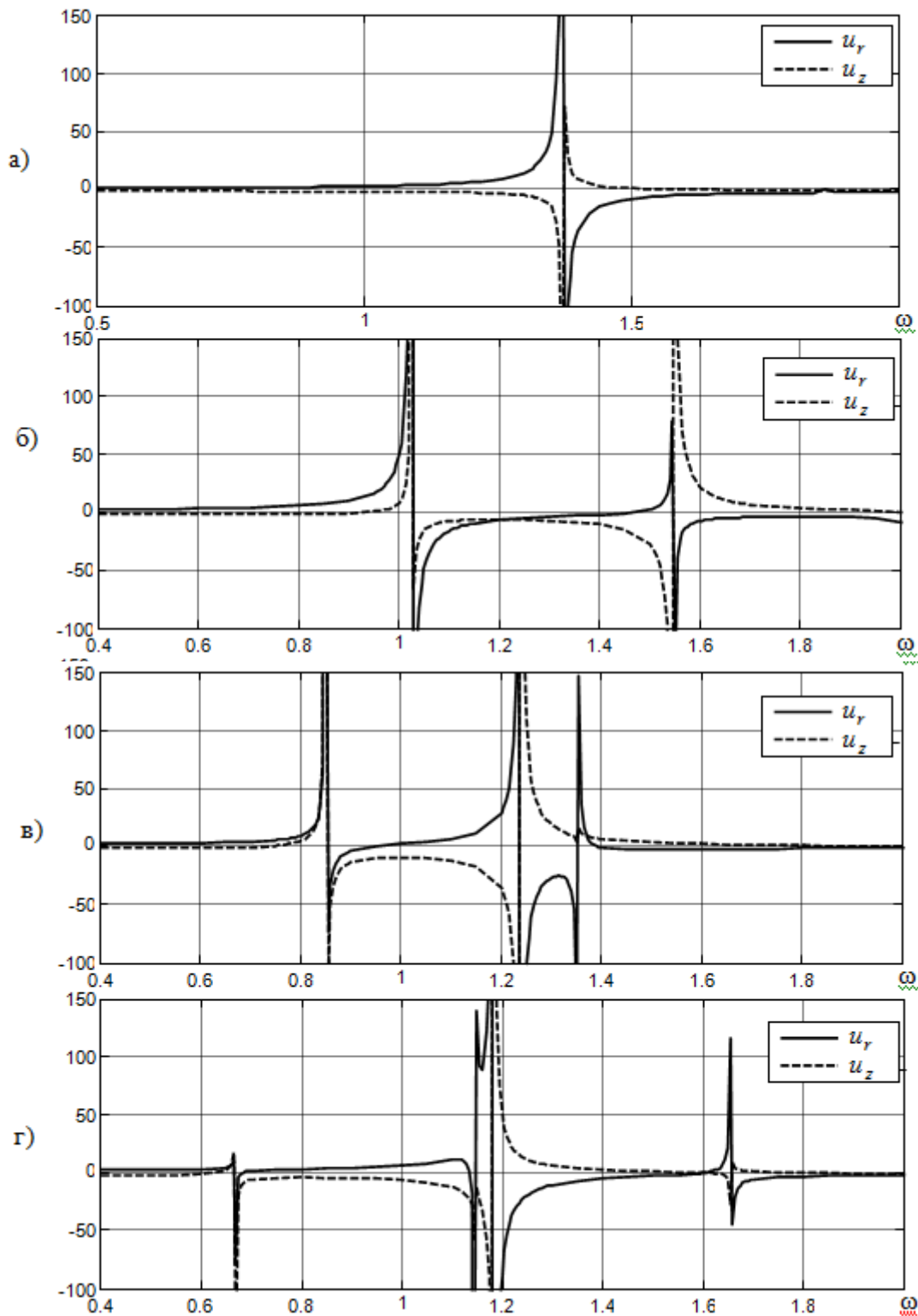


Рис. 1. Амплітудні значення радіальних переміщень $u_r(R_1, L/2, t)$ та поздовжніх переміщень $u_z(R_1, 0, t)$ для циліндрів різної довжини : а) $l_z = 1$, б) $l_z = 2$, в) $l_z = 3$, г) $l_z = 4$.

Достовірність отриманих результатів перевірялася шляхом порівняння розв'язків, отриманих на різних сітках розбиття, та іншими методами, наприклад, варіаційно-сплайновим методом [12]. В таблиці наведено результати, отримані для циліндра $l_z = 2$ на сітці $m = 30$, кількості точок ортогоналізації $c = 10$, кількості точок Рунге-Кутта $d = 5$ при $\omega = 1$. При збільшенні кількості точок розбиття результати візуально не відрізняються від наведених.

ω		ВСМ [14]	Система Гамільтона	$\Delta, \%$
1	$u_{r\max}$	57,2	56,3	1,6
	$u_{z\max}$	40,2	39,3	1,6
1,1	$u_{r\max}$	14,4 16,1	13,7 15,9	2 1,3
	$u_{z\max}$			
1,5	$u_{r\max}$	19,4	18,8	3,1
	$u_{z\max}$	22,2	22,9	3

Порівняння результатів обчислень, отриманих за допомогою запропонованої методики та представлених в роботі [1], де аналогічна задача розв'язувалася за допомогою степеневих рядів, показало відхилення по резонансних частотах в межах 3%.

III. ЧИСЕЛЬНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Досліджується радіально поляризований порожнистий циліндр з кераміки PZT-4 з матеріальними характеристиками

$$\begin{aligned}
 c_{11}^E &= 13,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, & c_{12}^E &= 7,78 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\
 c_{13}^E &= 7,43 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, & c_{33}^E &= 11,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\
 c_{44}^E &= 2,56 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, & e_{31} &= -5,2 \text{ Кл/м}^2, \\
 e_{33} &= 15,1 \text{ Кл/м}^2, & e_{42} &= 12,7 \text{ Кл/м}^2, \\
 \varepsilon_{11}^S &= 646 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}, & \varepsilon_{33}^S &= 562 \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}, \\
 \rho &= 7500 \text{ кг/м}^3.
 \end{aligned}$$

Внутрішній радіус циліндра R_0 , зовнішній R_1 , $R = R_1$, довжина L . При обчисленнях взято $R_0/R_1 = 0,6$, $l_z = L/R$.

Розглянемо циліндр з закороченими торцями, мембранне закріплення

$$\begin{aligned}
 u_r(r,0) = \sigma_{zz}(r,0) = 0, & \quad u_r(r,L) = \sigma_{zz}(r,L) = 0, \\
 \varphi(r,0) = \varphi(r,L) = 0.
 \end{aligned}$$

Вважаємо, що циліндричні поверхні вільні від механічних навантажень

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}(R_0,z) = \sigma_{rz}(R_0,z) = 0, \\
 \sigma_{rr}(R_1,z) = \sigma_{rz}(R_1,z) = 0.
 \end{aligned}$$

Дана математична постановка задачі, враховуючи граничні умови, відноситься до систем з розподіленими параметрами. Дане закріплення моделюється жорсткими закороченими електропровідними

накладками на торцях, впливом зовнішнього середовища нехтуємо.

Нехай до електродів на циліндричних поверхнях прикладена різниця потенціалів, яка змінюється по гармонічному закону з частотою ω і амплітудою $2V_0$:

$$\varphi(R_0, z, t) = -V_0 \sin \omega t, \quad \varphi(R_1, z, t) = V_0 \sin \omega t.$$

На рис. 1 наведено залежність амплітудних значень переміщень для циліндрів різної довжини від частоти збурення. Зі зростанням довжини циліндра зменшуються значення резонансних частот та зростає їх кількість на розглянутому інтервалі, що відповідає фізичним закономірностям і пояснюється змінною резонансного розміру. Спостерігається ряд цікавих ефектів: для циліндра $l_z = 1$ на першому резонансі при зростанні радіальних переміщень поздовжні спадають. Така поведінка характерна для другого резонансу рис. б), в) та третього г). В інших випадках зростання амплітудних переміщень відбувається одночасно. При переході через резонанс відбувається зміна фаз. Перехід від другого до третього резонансу для випадків в), г) має екстремум, тоді як в інших циліндрів є точка перегину. При потребі описані властивості можуть бути досліджені детальніше.

Рис. 2 ілюструє розподіл по довжині основних електромеханічних характеристик поблизу першої власної частоти, що відповідає першій формі власних коливань. Перехід до розмірних значень виконується за допомогою співвідношень (6) пропорційно до безрозмірного значення V_0 .

Криві розподілу амплітудних значень переміщень, отриманих за допомогою запропонованої методики та за допомогою ВСМ [12], візуально не відрізняються між собою. Обчислення одночасно двома суттєво різними методами гарантують достовірність отриманих результатів, тому дійсно існує необхідність в розвитку обох методів.

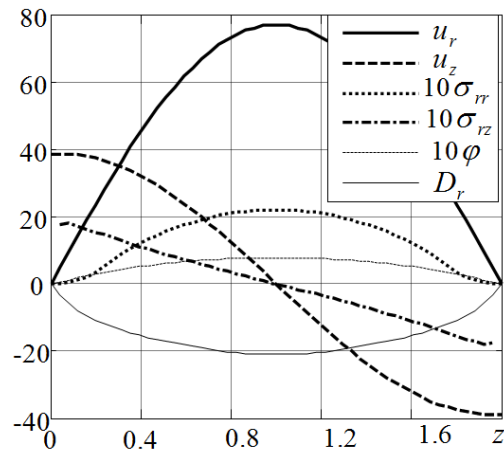


Рис. 2. Розподіл по довжині амплітудних значень на серединній поверхні $r = (R_0 + R_1)/2$ для циліндра $l_z = 2$ при $\omega = 1$



ВИСНОВКИ

Запропоновано новий метод редукції рівнянь гармонічних електропружних осесиметричних коливань в циліндричних координатах до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на основі гамільтонового формалізму по радіальній координаті і різницевої апроксимації по поздовжній координаті та зроблено чисельну реалізацію запропонованого методу. Тестування методики та аналіз отриманих результатів свідчать, що запропонований підхід дозволяє ефективно досліджувати гармонічні коливання п'єзокерамічних циліндричних перетворювачів при електричному навантаженні. Запропонований підхід дозволяє аналізувати напружений стан і рекомендується до застосування при заданих на зовнішніх поверхнях напруженнях та електричній індукції. Розвинена методика легко поширюється на випадок механічних навантажень, а саме тиску, прикладеного до поверхні, яким можна змоделювати вплив зовнішнього середовища, а також на випадок врахування дисипації енергії п'єзоелемента за допомогою комплексних модулів.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

- [1] A. M. Bolkisev and N. A. Shulga, "Vyinzhdennyye kolebaniya pezoeramicheskogo pologo tsilindra (radialnaya polarizatsiya) [Forced Vibrations of Piezoceramic Hollow Cylinders (radial polarization)]," *Prikladnaya Mech.*, vol. 21, no. 5, pp. 118–121, 1985.
- [2] N. A. Shul'ga and A. M. Bolkisev, *Kolebaniya pezelektricheskikh tel [Vibrations of piezoelectric bodies]*. Kyiv: Naukova dumka, 1990.
- [3] N. A. Shulga and L. V. Borisenko, "Vibrations of an Axially Polarized Cylinder during Electrical Loading," *Int. Appl. Mech.*, vol. 25, no. 11, pp. 1070–1075, 1989, DOI: [10.1007/BF00888988](https://doi.org/10.1007/BF00888988).
- [4] Y. N. Grigorenko, T. I. Efimova, and I. A. Loza, "Free Vibrations of Axially Polarized Piezoceramic Hollow Cylinders of finite Length," *Int. Appl. Mech.*, vol. 46, no. 6, pp. 625–634, 2010, DOI: [10.1007/s10778-010-0350-0](https://doi.org/10.1007/s10778-010-0350-0).
- [5] R. Bansevicius, R. Rimašauskienė, D. Mažeika, and G. Kulvietis, "Analysis of cylindrical piezoelectric actuator used in flow control device," *Mechanika*, vol. 17, no. 4, pp. 395–399, 2011, DOI: [10.5755/j01.mech.17.4.568](https://doi.org/10.5755/j01.mech.17.4.568).
- [6] O. V. Korzhyk, O. M. Petrishchev, and N. V. Bogdanova, "Priem zvuka sfericheskim elektroprugim preobrazovatelem s razreznymi elektrodami (chast 3) [The transducing of sound wave by electroelastics piezo- receiver with dissected electrical electrodes (part 3)]," *Electron. Commun.*, vol. 20, no. 2 (85), pp. 66–70, 2015, DOI: [10.20535/2312-1807.2015.20.2.47741](https://doi.org/10.20535/2312-1807.2015.20.2.47741).
- [7] O. H. Leiko, Z. T. Husak, I. V. Kandrachuk, and M. A. Melnichenko, "Radiation field angled horn antenna with a piezoceramic transducer with radial polarization," *Electron. Commun.*, vol. 20, no. 2, pp. 71–78, 2015, DOI: [10.20535/2312-1807.2015.20.2.47742](https://doi.org/10.20535/2312-1807.2015.20.2.47742).
- [8] R. V. N. Melnik and K. N. Melnik, "Modelling dynamics of piezoelectric solids in the two-dimensional case," *Appl. Math. Model.*, vol. 24, no. 3, pp. 147–163, 2000, DOI: [10.1016/S0307-904X\(99\)00032-3](https://doi.org/10.1016/S0307-904X(99)00032-3).
- [9] S. Vidoli and R. C. Batra, "Coupled extensional and torsional deformations of a piezoelectric cylinder," *Smart Mater. Struct.*, vol. 10, no. 2, pp. 300–304, 2001, DOI: [10.1088/0964-1726/10/2/315](https://doi.org/10.1088/0964-1726/10/2/315).
- [10] V. M. Shul'ga, "Nonaxisymmetric Electroelastic Vibrations of a Hollow Cylinder with Radial Axis of Physicomechanical Symmetry," *Int. Appl. Mech.*, vol. 41, no. 7, pp. 766–769, 2005, DOI: [10.1007/s10778-005-0143-z](https://doi.org/10.1007/s10778-005-0143-z).
- [11] N. A. Shul'ga and L. O. Grigor'eva, "Comparative analysis of the electroelastic thickness vibrations of layers with curved boundaries," *Int. Appl. Mech.*, vol. 47, no. 2, pp. 177–185, 2011, DOI: [10.1007/s10778-011-0451-4](https://doi.org/10.1007/s10778-011-0451-4).
- [12] O. I. Bezverkhyi and L. O. Grigor'eva, "Metod issledovaniya osesimmetrichnykh kolebaniy pezoeramicheskikh tel [Research method of axially symmetric oscillations of piezoceramic bodies]," *Probl. Comput. Mech. strength Struct.*, vol. 24, pp. 5–17, 2015, URL: <https://pommk.dp.ua/index.php/journal/article/view/290>.

Надійшла до редакції 24 березня 2016 р.

УДК 539.3

Подход к расчету гармонических колебаний электроупругих цилиндров

Безверхий О. И., д.ф.-м.н., ORCID [0000-0002-0834-6335](https://orcid.org/0000-0002-0834-6335)
e-mail o_bezver@ukr.net

Национальный транспортный университет
Киев, Украина

Григорьева Л. О., к.ф.-м.н., ORCID [0000-0001-7013-0327](https://orcid.org/0000-0001-7013-0327)
e-mail l_grigoryeva@ukr.net

Институт механики им. С.П.Тимошенка НАН Украины
Киев, Украина



Реферат—В работе предложен новый способ редукции уравнений гармонических электроупругих осесимметричных колебаний в цилиндрических координатах к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка на основе формализма Гамильтона по радиальной координате и разностных аппроксимаций по осевой координате. Выполнена численная реализация интегрирования полученной краевой задачи методом дискретной ортогонализации. Проведено тестирование полученных результатов и сравнение с результатами, полученными другими авторами и другими методами. Проведено исследование гармонических двумерных колебаний пьезокерамических поляризованных по толщине цилиндров при электрической нагрузке. Установлена зависимость характера колебаний от частоты для цилиндров различной длины, определены резонансные частоты. Исследованы динамические характеристики электромеханического состояния цилиндра при вынужденных колебаниях с частотой, близкой к первой собственной частоте. Установлено, что с ростом длины цилиндра уменьшаются значения собственных частот и растет количество резонансных частот на рассматриваемом интервале.

Библ. 12, рис. 2.

Ключевые слова — пьезокерамический цилиндр; гармонические электрические нагрузки; система уравнений гамильтонового типа; краевая задача электроупругости; вынужденные колебания; собственные частоты; резонанс.

UDC 539.3

The approach to the calculation of harmonic oscillations of electroelastic cylinders

O. I. Bezverkhyi, Dr.Sc.(Phys.-Math.), ORCID [0000-0002-0834-6335](https://orcid.org/0000-0002-0834-6335)

e-mail o_bezver@ukr.net

National Transport University

Kyiv, Ukraine

L. O. Hryhorieva, PhD, ORCID [0000-0001-7013-0327](https://orcid.org/0000-0001-7013-0327)

e-mail l_grigoryeva@ukr.net

S. P. Tymoshenko Institute of Mechanics of NAS of Ukraine

Kyiv, Ukraine

Abstract—The paper presents a new approach to the reduction of harmonic equations of electromechanical axially symmetric oscillations in cylindrical system of coordinates to first order ordinary differential equations based on the Hamiltonian formalism by radial coordinate and difference approximations by axial coordinate. Numerical implementation is executed for cylinders with membranes on ends. Integrating of boundary problem is developed by discrete orthogonalization method. Testing of results and comparison with obtained by other authors and other methods results is done. A study of two-dimensional harmonic oscillations of polarized by thickness piezoceramic cylinders at electric load is developed. The dependence of the oscillations nature from the frequency and resonant frequencies for cylinders of different length are defined. The dynamic characteristics of the electromechanical cylinder state at forced oscillations with a frequency close to the first natural frequency are studied. It is established, that with increasing of cylinder length natural frequencies are reduced and the number of resonant frequencies in the considered frequency range increases.

Ref. 12, fig. 2.

Keywords — piezoceramic cylinder; harmonical electrical loads; equations system of Hamiltonian type; electroelastic boundary problem; forced vibrations; natural frequencies; resonance.

