Теорія та засоби обробки сигналів і зображень

УДК 621.3.037.37 DOI: 10.20535/2312-1807.2017.22.4.105272

Використання вейвлет-перетворень Хаара та ОБ при аналізі сигналів

Ямненко Ю. С.. д.т.н., проф., ORCID 0000-0002-9796-6420
e-mail petergerya@yahoo.com
Тєлєга В. В., ORICD 0000-0001-5865-6027
e-mail ecenin09@gmail.com
Нємчінова К. С., ORCID 0000-0003-3096-6597
e-mail katya15021820@gmail.com
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» kpi.ua
Київ, Україна

***Реферат*—У даній статті представлені два математичні методи дискретного вейвлет-перетворення: вейвлет-перетворення Хаара та вейвлет в орієнтованому базисі, принцип яких полягає у використанні масштабованих та зсунених базисних функцій. Були розраховані коефіцієнти апроксимації та деталізації вищезазначених методів. Доведено переваги вейвлет-перетворення в орієнтованому базисі, яке дозволяє отримати більше інформації про досліджуваний сигнал за меншу кількість кроків розкладання та з меншими обчислювальними витратами.**

Бібл. 5, рис. 7

Ключові слова — вейвлет-перетворення Хаара; вейвлет в орієнтованому базисі; кратномасштабний аналіз; пряме та обернене вейвлет-перетворення; інтервал визначення; скейлінг функція; материнський вейвлет; коефіцієнти апроксимації та деталізації.

I. Вступ

Вейвлет-перетворення є одним із перспективних методів аналізу сигналів, які містять ділянки нестаціонарності та інтервали як повільно змінюваних значень, так і стрибкоподібних змін або високочастотних пульсацій [2,5]. Перевагами вейвлет-перетворень є можливість розрахунку функцій на різних інтервалах визначення, що є важливим з огляду на необхідність працювати з сигналами, визначеними на різних часових інтервалах або перетворених з різною частотою дискретизації. Використання вейвлетів дозволяє збільшити обсяг отриманої інформації за рахунок розглядання початкового сигналу на різних масштабах та отримання необхідної інформації про високочастотні складові різних рівнів деталізації [1].

II. Аналіз літературних даних і постановка проблем

Принцип вейвлет-перетворення полягає у використанні масштабованих та зсунених базисних функцій. Змінюючи масштаб розглядання початкового сигналу, можна виявити характерні особливості флуктуацій на різних шкалах, а шляхом зсувів – проаналізувати властивості сигналу в різних точках інтервалу дослідження.

Вейвлет-перетворення використовують у прямому та зворотному напрямках:

1) Аналіз початкового сигналу (розрахунок набору коефіцієнтів розкладання – апроксимації та деталізації).

2) Синтез сигналу (реконструкція функції-оригіналу за відомими коефіцієнтами розкладання).

Слід зазначити, що синтез початкового сигналу може бути виконаний на довільному рівні розкладання. Кількість рівнів обирається виходячи з необхідного ступеня стиснення початкового сигналу та рівня подібності початкового та апроксимованого сигналу [5].

Для базису вейвлет-перетворення повинні виконуватись наступні вимоги:

1) Функція материнського вейвлета *$\psi(x)$* повинна бути локалізованою (область визначення –

Copyright (c) 2017 Ямненко Ю. С.. Тєлєга В. В., Нємчінова К. С.

обмежена) як в часовому просторі, так і по частоті.

2) Функція $\psi(x)$ має бути знакозмінною навколо осі часу.

3) Скейлінг-функція $\varphi(x)$ та материнський вейвлет $\psi(x)$ мають задовольняти умови ортогональності.

4) Всі вейвлети конкретного сімейства повинні мати ту саму кількість осциляцій, що і базисний вейвлет (отримані за допомогою масштабних перетворень та зсувів).

Для подальшого аналізу обрано два методи дискретного вейвлет-перетворення:

1) Вейвлет Хаара [5].

2) ОБ вейвлет [3].

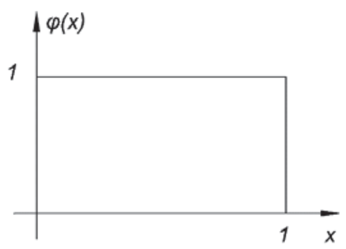

Рис. 1 Скейлінг-функція вейвлета Хаара

Вейвлет-перетворення Хаара визначається на інтервалі $N=2^n$, де n – позитивне ціле число.

Скейлінг-функція є кінцевою імпульсною характеристикою низькочастотного фільтра розкладання початкового сигналу (рис.1).

Материнський вейвлет Хаара являє собою кінцеву імпульсну характеристику високочастотного фільтру і визначається формулою:

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1, \frac{1}{2} < x \le 0 \\ 0, x < 0, x \ge 1 \end{cases} \quad (1)$$

Графік функції $\psi(x)$ наведено на рис.2.

Масштабування та зсув скейлінг-функції та материнського вейвлета Хаара відбувається згідно виразів:

$$\phi_{jk}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$$
$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad (2)$$

де j – рівень розкладання, значення якого змінюються від максимального до нульового ($j=j_{max}, j_{max}-1, \ldots, 0$); k – інтервал розгляду функції на поточному рівні.

Максимальний рівень розкладання визначається довжиною інтервалу визначення N як j_{max}=n. Отже, більша кількість відліків у початковому сигналі відповідає більшій кількості можливих рівнів розкладання.

Значення інтервалу розгляду k залежить від рівня j та змінюється k=0,1,...,2^{j-1}. Для найвищого рівня $j=j_{max}$ кожен інтервал k містить лише один дискретний відлік функції-оригіналу $y(x)$. Зі зменшенням j збільшується кількість відліків, які об'єднуються в одному інтервалі k, і, відповідно, зменшується кількість самих інтервалів розгляду.

Вейвлет-перетворення сигналу $y(x)$ здійснюється за принципом кратномасштабного аналізу, схему якого наведено на рис.3.

При кратномасштабному аналізі дискретна функція $y(x)$ за допомогою набору з двох фільтрів розкладається на одну низькочастотну складову (згладжену функцію апроксимації або тренд, що визначається коефіцієнтами апроксимації $s_{j,k}$) та одну високочастотну складову (функції деталізації або флуктуації, що визначаються коефіцієнтами деталізації $d_{j,k}$). На кожному наступному рівні отримана функція апроксимації в свою чергу розкладається на низькочастотну та високочастотну складову за допомогою того ж самого набору фільтрів, а її інтервал зменшується у два рази, що відображено блоком «2↓» на рис.2.

Коефіцієнти деталізації $d_{j,k}$ розраховуються починаючи з (j_{max}-1)-го рівня. Максимальна кількість коефіцієнтів деталізації становить $n-1$. На будь-якому рівні j, крім $j=j_{max}$, для розрахунку як коефіцієнтів апроксимації, так і коефіцієнтів деталізації використовують по два s-коефіцієнти з попереднього рівня ($j+1$).

На рівні j_{max} розраховуються лише коефіцієнти апроксимації:

$$S_{j\max,k} = \frac{y(\frac{k}{2^{j\max}})}{2^{j\max/2}} \quad (3)$$

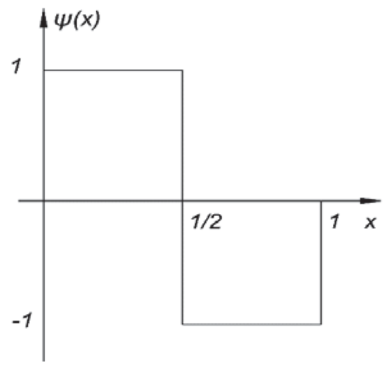

Рис. 2 Материнський вейвлет Хаара

Copyright (c) 2017 Ямненко Ю. С.. Тєлєга В. В., Нємчінова К. С.

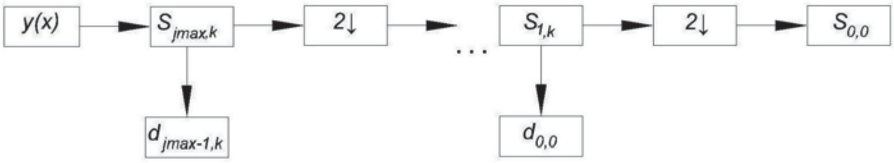

Рис. 3 Схема кратномасштабного аналізу вейвлет-перетворення Хаара

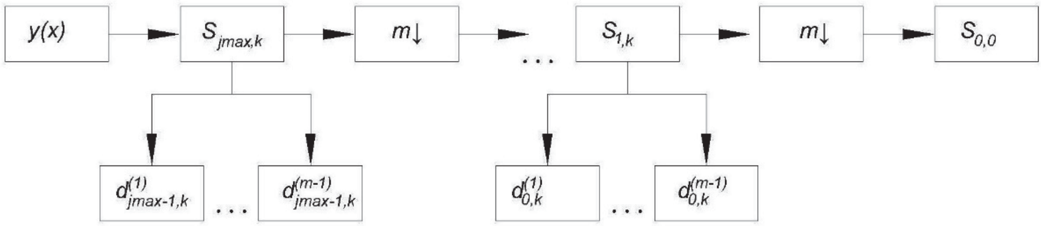

Рис. 4 Схема кратномасштабного аналіза для *m* фільтрів ОБ-вейвлета

При цьому функція-оригінал реконструюється за формулою:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{2^{j\max-1}} S_{j\max,k}\phi_{j\max,k}(x) \qquad (4)$$

Існує як пряме, так і зворотне вейвлет-перетворення (розкладання та реконструкція початкової функції $y(x)$).

Формули прямого вейвлет-перетворення Хаара для двох фільтрів мають вигляд:

$$s_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(x)\cdot S_j \qquad (5)$$

$$d_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(x)\cdot S_j\,, \qquad (6)$$

де $S_j = \begin{vmatrix} S_{j,2k} \\ S_{j,2k+1} \end{vmatrix}$ - вектор колонка *s*-коефіцієнтів *j*-го рівня.

Рекурентні формули (5), (6) на рівні (*j*-1) можна представити у матричному вигляді:

$$\Omega_{j-1} = \begin{vmatrix} S_{j-1,0} & S_{j-1,1} & S_{j-1,2} & \dots & S_{j-1,2^{j-1}-1} \\ d_{j-1,0} & d_{j-1,1} & d_{j-1,2} & \dots & d_{j-1,2^{j-1}-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\times \qquad (7)$$

$$\times\begin{vmatrix} S_{j,0} & S_{j,2} & \dots & S_{j,2k} & \dots & S_{j,2^j-2} \\ S_{j,1} & S_{j,3} & \dots & S_{j,2k+1} & \dots & S_{j,2^j-1} \end{vmatrix}$$

На максимальному рівні $j=j_{max}$ рекурентна формула (7) включає тільки коефіцієнти апроксимації та зводиться до вигляду вектор-рядка.

Для порівняння з вейвлетом Хаара розглянемо математичний апарат вейвлет-перетворення в орієнтованому базисі (ОБ-вейвлет). Він відрізняється від Хаара та інших традиційних дискретних вейвлет-перетворень, визначених на інтервалі $N=2^n$, тим, що на кожному рівні розкладання при кратномасштабному аналізі початкового сигналу обчислюється один *s*-коефіцієнт апроксимації та (*m-1*) *d*-коефіцієнтів деталізації (рис.4). На кожному наступному рівні отримана функція апроксимації в свою чергу розкладається на низькочастотну та (*m-1*) високочастотні складові за допомогою того ж самого набору фільтрів, але її інтервал визначається зменшенням вже у *m* разів, що відображено на рис.4 блоком «*m*↓».

На кожному рівні величина *k* змінюється від 0 до *m*-1. На останньому рівні *j*=0, як і у вейвлеті Хаара, існує лише один інтервал розгляду *k*=0, який об'єднує в собі всі відліки функції-оригіналу.

Коефіцієнти деталізації $d_{j,k}$ розраховуються починаючи з (j_{max}-1)-го рівня. Максимальна кількість коефіцієнтів деталізації становить m^n-1.

Формули прямого вейвлет-перетворення в орієнтованому базисі для *m* фільтрів мають вигляд:

$$S_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{m}}\phi_d(x)\cdot S_j \qquad (8)$$

$$d_{j-1,k} = \frac{1}{\sqrt{m}}\psi_d^{(1)}(x)\cdot S_j \qquad (9)$$

$$d_{j-1,k}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{m}}\psi_d^{(m-1)}(x)\cdot S_j \qquad (10)$$

де $\varphi_d(x)$ та $\psi_d^{(1)}(x),\dots,\psi_d^{(m-1)}(x)$ – відповідно скейлінг-функція та (*m*-1) материнських вейвлетів для ОБ

Copyright (c) 2017 Ямненко Ю. С.. Тєлєга В. В., Нємчінова К. С.

вейвлет-перетворення [2], $S_j = \begin{vmatrix} S_{j,mk} \\ S_{j,mk+1} \\ \dots \\ S_{j,mk+(m-1)} \end{vmatrix}$ - вектор-колонка s-коефіцієнтів рівня j.

Випадком, що заслуговує на окреме розглядання через ряд переваг формування вейлет-базису, є інтервал визначення початкового сигналу, кратний 3 ($N=3^n$). Тоді матриці базисних функцій складаються з цілих чисел, близько 1/3 яких становлять нулі. Очевидно, це скорочує кількість математичних обчислювальних процедур, необхідних для проведення вейвлет-аналізу та подальшої реконструкції сигналу.

При m=3 для вейвлет-аналізу використовується один s-коефіцєнт та два d-коефіцієнти на кожному рівні розкладання. Рекурентна формула у матричному вигляді для розрахунку коефіцієнтів вейвлет-перетворення в орієнтованому базисі для інтервалу $N=3^n$ на рівні j-1 має наступний вигляд:

$$\Omega_{j-1} = \begin{vmatrix} S_{j-1,0} & S_{j-1,1} & S_{j-1,2} & \dots & S_{j-1,3^{j-1}-1} \\ d^{(1)}{}_{j-1,0} & d^{(1)}{}_{j-1,1} & d^{(1)}{}_{j-1,2} & \dots & d^{(1)}{}_{j-1,3^{j-1}-1} \\ d^{(2)}{}_{j-1,0} & d^{(2)}{}_{j-1,1} & d^{(2)}{}_{j-1,2} & \dots & d^{(2)}{}_{j-1,3^{j-1}-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} S_{j,0} & S_{j,3} & \dots & S_{j,3k} & \dots & S_{j,3^j-3} \\ S_{j,1} & S_{j,4} & \dots & S_{j,3k+1} & \dots & S_{j,3^j-2} \\ S_{j,2} & S_{j,5} & \dots & S_{j,3k+2} & \dots & S_{j,3^j-1} \end{vmatrix} \quad (13)$$

Таким чином, при однакових рівнях розкладання застосування ОБ вейвлет-перетворення дозволяє отримати більше коефіцієнтів деталізації, ніж перетворення Хаара, а отже, і більше інформації про характерні особливості досліджуваного сигналу.

При сумірних інтервалах визначення функції-оригіналу (наприклад, $N=2^3=8$ для вейвлета Хаара та $N=3^2=9$ для ОБ-вейвлета) максимально можлива кількість рівнів розкладання для ОБ-вейвлет-перетворення буде меншою, ніж для вейвлет перетворення Хаара. Таким чином, вейвлет-аналіз виконується за меншу кількість кроків, що є важливим при аналізі великих масивів даних.

III. Мета і завдання дослідження

Метою дослідження було порівняння двох математичних методів вейвлет-перетворення Хаара та ОБ за такими характеристиками:

1) Кількість рівнів розкладання, що впливають на точність відтворення початкового сигналу.
2) Кількість ітерацій, що впливають на швидкість перетворення.

Завданням дослідження стало обрання довільного сигналу та порівняння його двома методами за вищезазначеними характеристиками.

IV. Основна частина

Аналізуючи сигнал, зображений на рис.5, було застосовано математичні методи аналізу вейвлет-перетворення Хаара та ОБ.

Розрахунок вейвлет-коефіцієнтів у матричному вигляді для кожного з рівнів розкладання потребує на 11% менше операцій множення, ніж за рекурентними формулами.

V. Приклад розрахунку коефіцієнтів вейвлета Хаара

Спочатку проаналізовано сигнал вейвлет-перетворенням Хаара. Досліджуваний сигнал розглядається на інтервалі $N=2^5=32$.

На кожному з рівнів було розраховано коефіцієнти деталізації та апроксимації (рис.6).

На графіках можна спостерігати зменшення інтервалу розкладання у два рази з кожним наступним рівнем розкладання.

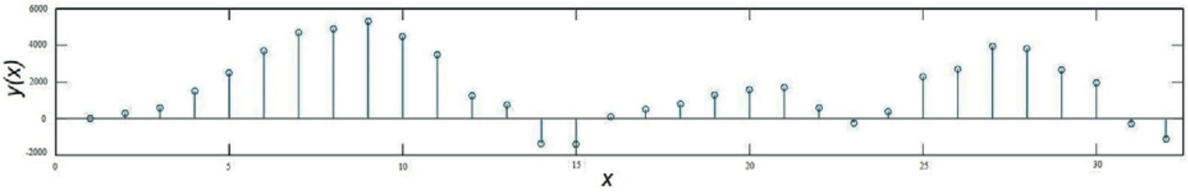

Рис. 5 Досліджуваний сигнал у дискретному вигляді

Copyright (c) 2017 Ямненко Ю. С.. Тєлєга В. В., Нємчінова К. С.

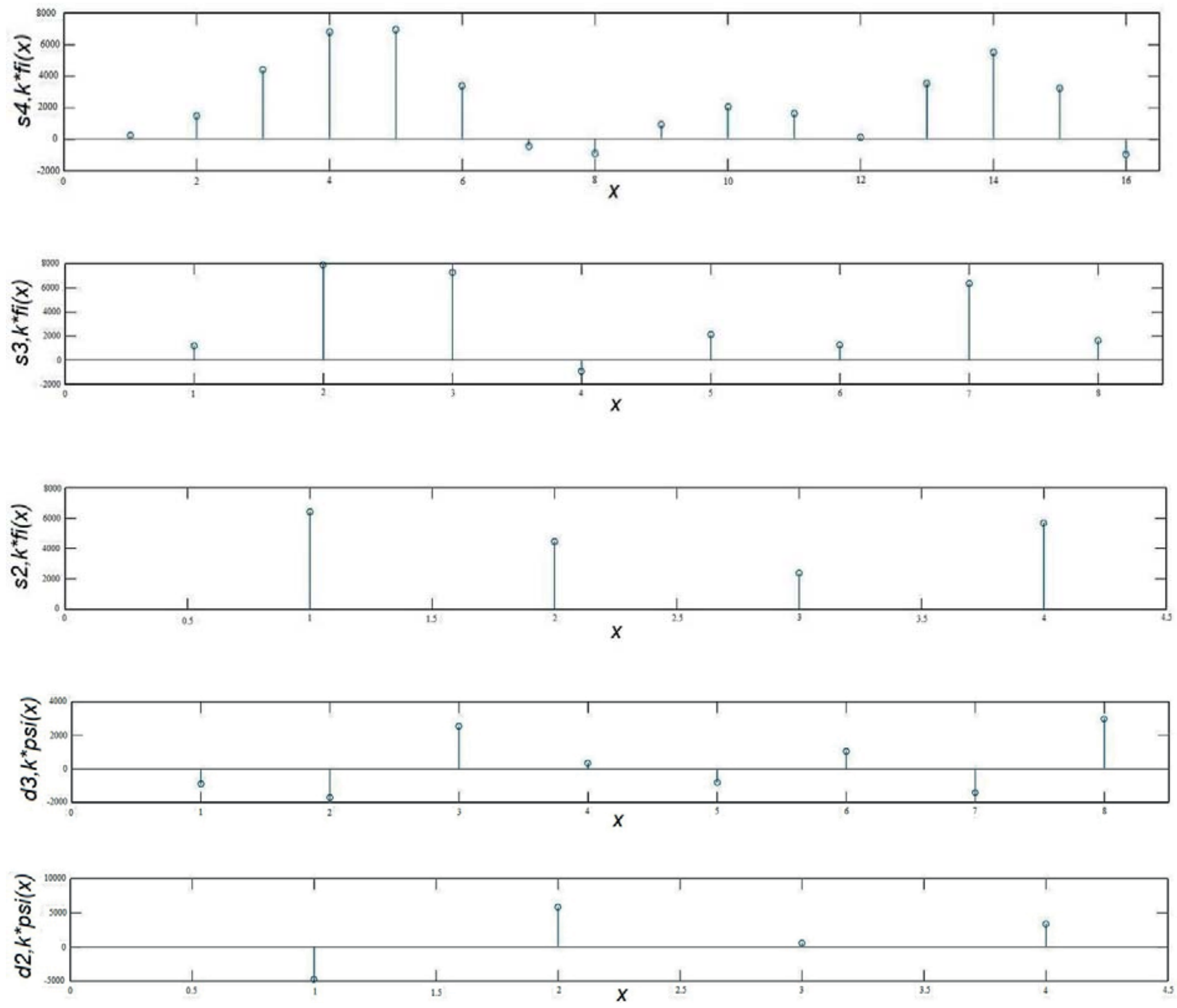

Рис. 6 Коефіцієнти вейвлет-перетворення Хаара

VI. Приклад розрахунку коефіцієнтів вейвлета ОБ

Аналізуючи сигнал методом вейвлет-перетворення в орієнтованому базисі, слід обрати сумірний інтервал визначення. Найближчий сумірний інтервал визначення досліджуваного сигналу становить $N=3^3=27$.

На рис.7 зображено апроксимовані сигнали (тренди) та функції флуктуацій, отримані на базі розрахунку *s*-, $d^{(1)}$- та $d^{(2)}$-коефіцієнтів на кожному з рівнів розкладання для вейвлет-перетворення ОБ:

Функція апроксимації кожного рівня в свою чергу розкладається на низькочастотну та дві високочастотні складові наступного рівня, інтервали визначення яких зменшено у 3 рази (в загальному випадку – у *m* разів).

Висновок

Використання вейвлет-перетворення в орієнтованому базисі дозволяє отримати більшу кількість інформації про особливості початкового сигналу в порівнянні з вейвлет-перетворенням Хаара за рахунок більшої кількості фільтрів розкладання. При цьому кількість обчислювальних операцій, необхідна для розкладання та стиснення сигналу, зменшується.

Матричний спосіб розрахунку вейвлет-коефіцієнтів спрощує розкладання початкового сигналу і має перевагу перед безпосереднім обчисленням за рекурентними формулами.

Copyright (c) 2017 Ямненко Ю. С.. Тєлєга В. В., Нємчінова К. С.

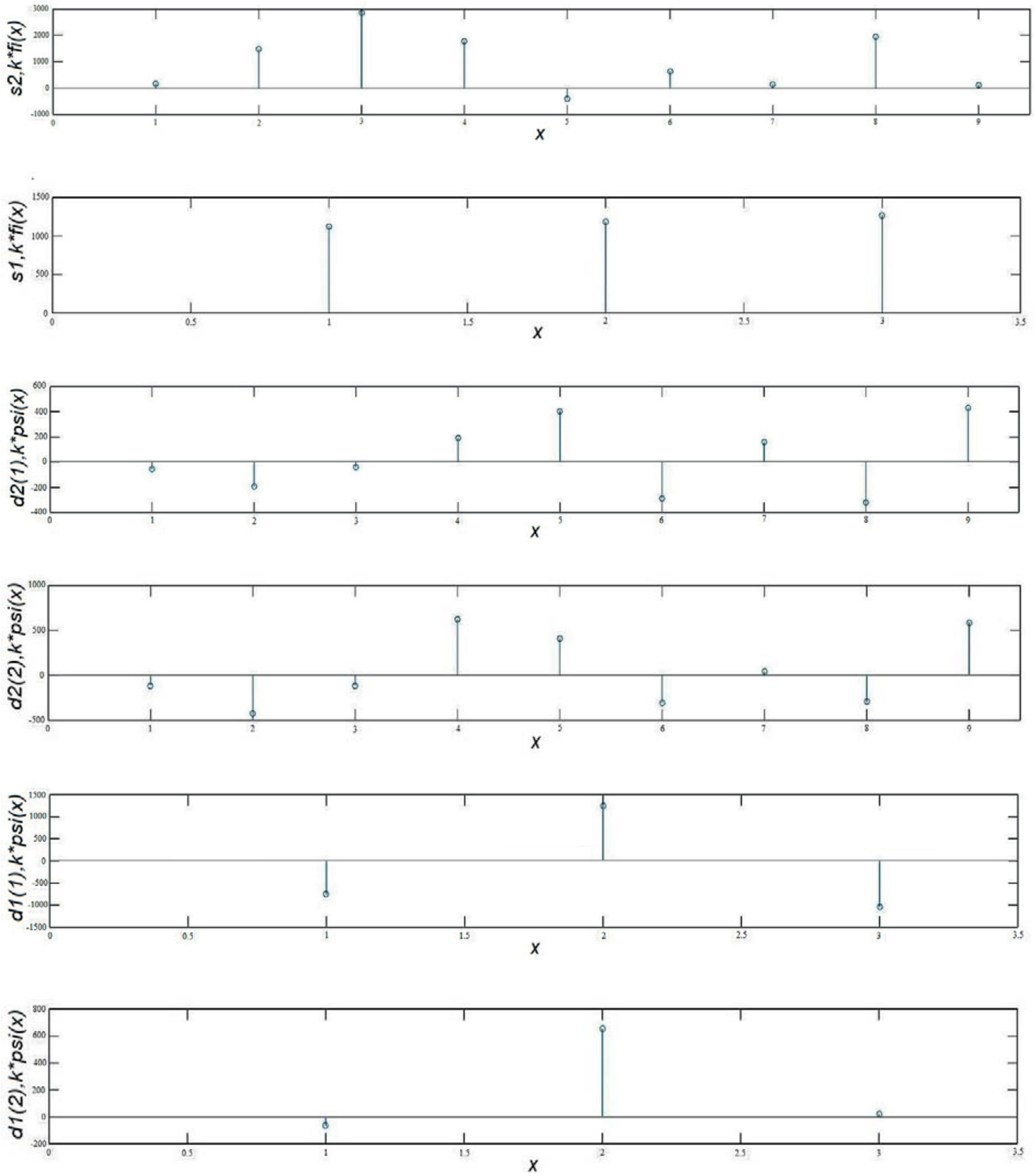

Рис. 7 Коефіцієнти вейвлет-перетворення ОБ

ЛІТЕРАТУРА

[1] Emmanuel Eificher; Barry Jervis, Tsifrovaya obrabotka signalov [Digital Signal Processing], Moscow, St. Petersburg, Kiev: Williams, 2004.

[2] Peterhery, Yu. S.; Zhykov, V. Ya.; Tereshchenko, T. O., Intelektualnyie sistemyi obespecheniya energosberezheniya zhilyih domov [Intelligent Systems for Energy Saving of Residential Buildings], Kyiv: Avers, 2008, p. 258.

[3] Zhukov, V. Ya.; Tereshchenko, T. A.; Peterherya, Yu. S., Preobrazovaniya diskretnyih signalov na konechnyih intervalah v orientirovannom bazise [Transformation of discrete signals on finite intervals in an oriented basis], Kyiv: Avers, 2004, p. 274.

[4] Dermin, I. M.; Ivanov, O. V.; Nechitaylo, V. A., «Veyvletyi i ih ispolzovanie [Wavelets and Their Use],» *Uspekhi Fizicheskikh Nauk,* т. 171, № 5, pp. 465-501, 2001.

[5] Geranin, V. O.; Pisarenko, L. D.; Ruschytsky, Ya. Ya., TeorIia veivletIv z elementami fraktalnogo analIzu, Kyiv: UFRU UkrISTEI, 2002, p. 364.

Надійшла до редакції 26 червня 2017 р.

Copyright (c) 2017 Ямненко Ю. С.. Тєлєга В. В., Нємчінова К. С.

УДК 621.3.037.37

Использование вейвлет-преобразований Хаара и ОБ при анализе сигналов

Ямненко Ю. С.. д.т.н., проф., ORCID 0000-0002-9796-6420
e-mail petergerya@yahoo.com
Телега В. В., ORICD 0000-0001-5865-6027
e-mail ecenin09@gmail.com
Немчинова К. С., ORCID 0000-0003-3096-6597
e-mail katya15021820@gmail.com
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» kpi.ua
Киев, Украина

***Реферат*—В данной статье представлены два математических метода дискретного вейвлет-преобразования: вейвлет-преобразование Хаара и вейвлет-преобразование в ориентированном базисе, принцип которых состоит в использование масштабированных и сдвинутых базисных функций. Были рассчитаны коэффициенты аппроксимации и детализации упомянутых методов. Доказаны преимущества вейвлет-преобразования в ориентированном базисе, которое позволяет получить больше информации об исследуемом сигнале за меньшее количество шагов разложения и с меньшими вычислительными затратами.**

Библ. 5, рис. 7

***Ключевые слова** — вейвлет-преобразование Хаара; вейвлет-преобразование в ориентированом базисе; кратномасштабный анализ; прямое и обратное вейвлет-преобразование; интервал определения; скейлинг функция; материнский вейвлет; коэффициенты аппроксимации и детализации.*

UDC 621.3.037.37

The use of Haar and OB wavelets in the signals analysis

Yu. S. Yamnenko, Dr.Sc.(Eng.), Prof., ORCID 0000-0002-9796-6420
e-mail petergerya@yahoo.com
V. V. Tielieha, ORICD 0000-0001-5865-6027
e-mail ecenin09@gmail.com
K. S. Niemchinova, ORCID 0000-0003-3096-6597
e-mail katya15021820@gmail.com
National technical university of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv polytechnic institute" kpi.ua
Киев, Украина

Abstract—In this paper, two mathematical methods of wavelet transform are presented: Haar's wavelet transform and wavelet transform at oriented basis (OB). Unlike traditional wavelet transforms (like classical Haar's wavelet) this mathematical approach allows getting more information about the details and behavior of original signal due to more amount of discrete filters that are used for its decomposition. In Haar's and other wavelet methods there are only two discrete filters are used to decompose initial signal – one low-frequency filter and one high-frequency filter. Low-frequency wavelet coefficients (marked as s-coefficients) give the compressed and approximated version of the initial signal (called trend), and high-frequency wavelet coefficients (marked as d-coefficients) give the high-frequency oscillations around the trend. Such decomposition and calculation of wavelet coefficients is realized at each level of wavelet analysis. While using wavelet transform

Copyright (c) 2017 Ямненко Ю. С.. Тєлєга В. В., Нємчінова К. С.

at oriented basis, there are more than one type of high-frequency wavelet coefficients (marked as $d^{(1)}$-, $d^{(2)}$-,…, $d^{(m)}$-coefficients) where m is defined by the type of spectral transform at oriented basis (dimension of the matrix of basic function). Number of decomposition levels is defined by the length of initial signal's interval. In the case of Haar's wavelet transform this length is determined as $N=2^n$, and in the case of wavelet transform at oriented basis this length is determined as $N=m^n$. The main principle of wavelet transform lies in the use of scaled and shifted basic functions. The structure and algorithm of multiscale analysis is considered for the cases of Haar's wavelet where the interval of initial signal is defined as $N=2^n$, and for OB wavelet with the interval $N=m^n$. The feature of OB wavelet transform is the possibility to operate with more than one high-pass filters that gives more details about the initial signal. In partial case for m=3 basic functions of OB wavelet contains only integer numbers. Moreover, approximately 1/3 of them are zero. Thus, it simplify the calculation significantly. Matrix form of wavelet decomposition is considered for Haar and OB wavelets. Use of matrices generalizes calculation process by combining all decomposition levels in one formula. The matrix method of the calculation of wavelet coefficients simplify the decomposition procedure for initial signal. Thus, it has the advantage against the direct calculation of wavelet coefficients by recurrent formulas. The coefficients of approximation and detailing for the above methods were calculated. It has been proved that wavelet transform at oriented basis has an advantage because it allows to achieve more information about the investigated signal for less amount of decomposition steps and with less calculation losses. As an interesting example, time dependence of discrete function that describes electrical energy consumption in MicroGrid system could be considered as an object for compressing and removing of casual high-frequency oscillations with the help of wavelet analysis.

Ref. 5, fig. 7.

Key words — Haar wavelet transform; wavelet transform at oriented basis; multiscale analysis; direct and inverse wavelet transform; interval of definition; scaling function; parent wavelet; coefficients of approximation and detailing.

Copyright (c) 2017 Ямненко Ю. С.. Тєлєга В. В., Нємчінова К. С.