

УДК 621.314

**М.Ю. Артеменко**, д.-р.техн.наук

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,  
пр. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна.

## **Повна потужність трифазної системи живлення в несинусоїдному режимі та енергоефективність засобів паралельної активної фільтрації**

*В результаті розв'язання екстремальної задачі визначення максимальної потужності навантаження при заданих втратах енергії в проводах виведена формула для повної потужності трифазної системи живлення, яка враховує параметри опорів втрат силового кабелю. Отримані умови досягнення одиничного коефіцієнта потужності в трипровідній та чотирипровідній трифазних системах живлення. Доведено, що засоби паралельної активної фільтрації трифазної чотирипровідної системи живлення, що використовують пропорційно-векторне формування лінійних струмів з частковим послабленням складової нульової послідовності відповідно до параметрів силового кабелю переважають за енергоефективністю аналогічні засоби з іншими алгоритмами паралельної активної фільтрації, забезпечуючи одиничний коефіцієнт потужності та мінімальні втрати енергії. Бібл. 12, рис. 1.*

**Ключові слова:** повна потужність, коефіцієнт потужності, паралельний активний фільтр.

### **Вступ**

На сучасному етапі розвитку електроенергетики інтенсивно зростає кількість нелінійних споживачів та збільшується їх одинична потужність, внаслідок чого в трифазних електричних мережах настає несиметричний несинусоїдний режим, що призводить до погіршення якості електропостачання та збільшення втрат енергії.

Теорія миттєвої потужності, запропонована в [1] і розвинена в роботах закордонних [2-4], вітчизняних [5,6] та інших вчених, дозволяє розробити ефективні алгоритми компенсації неактивних складових струмів в трифазних системах живлення за допомогою засобів активної фільтрації. Однак в чотирипровідних системах несиметрія фазних напруг призводить до появи складової нульової послідовності, що викликає підвищення потужності втрат за рахунок протікання струму в нейтральному проводі. Запропо-

новано декілька різних алгоритмів управління паралельними активними фільтрами [9-11], що сприяють розв'язанню цієї проблеми, і постає питання порівняння енергоефективності засобів фільтрації, що використовують зазначені алгоритми.

Критерієм енергоефективності теоретична електротехніка визначає коефіцієнт потужності як відношення активної потужності до повної (уявної) потужності [9]. Остання є максимальною активною потужністю навантаження, що може бути досягнута при заданих напругах системи живлення та потужності втрат в силовому кабелю [7]. Але при цьому має бути коректно визначена повна потужність трифазної системи живлення в несиметричному несинусоїдному режимі, оскільки в існуючій роботі [8] розглядався синусоїдний режим трифазної системи за відсутності складової нульової послідовності фазних напруг. В зв'язку з цим виникає екстремальна задача – пошук максимальної активної потужності, що характеризує передачу енергії в навантаження при заданих несиметричних несинусоїдних фазних напругах та обмеженні на величину потужності втрат на активних опорах силового кабелю, розв'язанню якої присвячена дана стаття. При цьому розглядається система живлення необмеженої потужності, тобто в процесі оптимізації часової залежності вектора лінійних струмів падіннями напруг на активних опорах силового кабелю можна знехтувати у порівнянні з напругами джерела.

### **Повна потужність трифазної системи живлення в несиметричному несинусоїдному режимі**

Несинусоїдний усталений процес трифазного кола з періодом  $T = 2\pi / \omega$  повністю задається трикоординатними векторами миттєвих значень фазних напруг та лінійних струмів, що можуть бути представлені відповідними рядами Фур'є

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_A(t) \\ u_B(t) \\ u_C(t) \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} U_{Ak} \cos(k\omega t + \varphi_{Ak}) \\ \sum_{k=1}^{\infty} U_{Bk} \cos(k\omega t + \varphi_{Bk}) \\ \sum_{k=1}^{\infty} U_{Ck} \cos(k\omega t + \varphi_{Ck}) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{i}(t) = \begin{pmatrix} i_A(t) \\ i_B(t) \\ i_C(t) \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} I_{Ak} \cos(k\omega t + \psi_{Ak}) \\ \sum_{k=1}^{\infty} I_{Bk} \cos(k\omega t + \psi_{Bk}) \\ \sum_{k=1}^{\infty} I_{Ck} \cos(k\omega t + \psi_{Ck}) \end{pmatrix},$$

де  $\omega$  - кругова частота;  $U_{Ak}, U_{Bk}, U_{Ck}; I_{Ak}, I_{Bk}, I_{Ck}$  - діючі значення,  $\varphi_{Ak}, \varphi_{Bk}, \varphi_{Ck}; \psi_{Ak}, \psi_{Bk}, \psi_{Ck}$  - відповідні початкові фази  $k$ -ої гармонічної складової напруг та струмів фаз А, В, С. В чотирипровідній системі лінійні струми дорівнюють фазним, а фазні напруги розглядаються відносно нульової точки навантаження, і важливою особливістю цих систем є можлива наявність складових нульової

послідовності струмів та напруг. В трипровідній системі лінійні струми дорівнюють фазним лише при з'єднанні навантаження зіркою, а фазні напруги розглядаються відносно штучної точки заземлення [6,8], при цьому складові нульової послідовності струмів та напруг дорівнюють нулю.

Виразивши косинусні функції за формулою Ейлера аналогічно [6], представимо зазначені тривимірні вектори у комплексній формі:

$$\mathbf{u}(t) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} U_{Ak} \frac{e^{j(k\omega t + \varphi_{Ak})} + e^{-j(k\omega t + \varphi_{Ak})}}{2} \\ \sum_{k=1}^{\infty} U_{Bk} \frac{e^{j(k\omega t + \varphi_{Bk})} + e^{-j(k\omega t + \varphi_{Bk})}}{2} \\ \sum_{k=1}^{\infty} U_{Ck} \frac{e^{j(k\omega t + \varphi_{Ck})} + e^{-j(k\omega t + \varphi_{Ck})}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{Ak} e^{j\varphi_{Ak}} \\ U_{Bk} e^{j\varphi_{Bk}} \\ U_{Ck} e^{j\varphi_{Ck}} \end{pmatrix} e^{jk\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} U_{Ak} e^{-j\varphi_{Ak}} \\ U_{Bk} e^{-j\varphi_{Bk}} \\ U_{Ck} e^{-j\varphi_{Ck}} \end{pmatrix} e^{-jk\omega t} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_k e^{jk\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k^* e^{-jk\omega t}; \quad \mathbf{i}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{k}} e^{jk\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{k}^* e^{-jk\omega t},$$

де  $\bar{\mathbf{u}}_k = \begin{pmatrix} \dot{U}_{Ak} \\ \dot{U}_{Bk} \\ \dot{U}_{Ck} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{Ak} e^{j\varphi_{Ak}} \\ U_{Bk} e^{j\varphi_{Bk}} \\ U_{Ck} e^{j\varphi_{Ck}} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} I_{Ak} e^{j\psi_{Ak}} \\ I_{Bk} e^{j\psi_{Bk}} \\ I_{Ck} e^{j\psi_{Ck}} \end{pmatrix} -$

комплексні вектори діючих значень фазних напруг та лінійних струмів  $k$ -ої гармонічної складової; \* - знак комплексного спряження.

Зокрема, через зазначені вектори виражається активна потужність

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{i}(t) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k^* e^{-jk\omega t} \right)^T \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{k}} e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{k}^* e^{-jk\omega t} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2T} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_k^T \bar{\mathbf{k}}^* + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{k}}^T \mathbf{u}_k^* \right) T = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_k^T \bar{\mathbf{k}}^* \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_k^T \bar{\mathbf{k}}^* \right)^* = \text{Re} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_k^T \bar{\mathbf{k}}^* \right),$$

де  $T$  - знак транспонування.

Потужність втрат на ділянці чотирипровідного силового кабелю системи живлення з опором кожного фазового проводу  $r$  та опором нейтрального проводу  $r_n$  визначається виразом

$$\Delta P = \frac{1}{T} \times \int_0^T i_A^2(t)r + i_B^2(t)r + i_C^2(t)r + i_N^2(t)r_N dt, \quad (2)$$

де струм нейтрального проводу може бути представлений у вигляді

$$i_N(t) = i_A(t) + i_B(t) + i_C(t) = \mathbf{i}^T(t) \mathbf{j} = \mathbf{j}^T \mathbf{i}(t); \quad \mathbf{j}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням цього перетворимо вираз (2) до матрично-векторної форми наступним чином:

$$\begin{aligned}
\Delta P &= \frac{1}{T} \int_0^T [i_A^2(t)r + i_B^2(t)r + i_C^2(t)r + i_N^2(t)r_N] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^T(t) \mathbf{r} + \mathbf{i}^T(t) \mathbf{J} \mathbf{J}^T \mathbf{i}(t) r_N dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^T(t) (\mathbf{r} + r_N \mathbf{J} \mathbf{J}^T) \mathbf{i}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{i}(t) dt = \\
&= \frac{1}{2T} \int_0^T \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{i}}_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{i}}_k^* e^{-jk\omega t} \right)^T \mathbf{R} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{i}}_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{i}}_k^* e^{-jk\omega t} \right) dt = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{i}}_k^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{i}}_k^* + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{i}}_k^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{i}}_k^* \right)^* = \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{i}}_k^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{i}}_k^* \right),
\end{aligned} \tag{3}$$

де  $\mathbf{R} = \mathbf{r} + r_N \mathbf{J} \mathbf{J}^T = \begin{vmatrix} r + r_n & r_n & r_n \\ r_n & r + r_n & r_n \\ r_n & r_n & r + r_n \end{vmatrix} = \mathbf{R}^T$  –

матриця опорів втрат, симетрична відносно го-

ловної діагоналі,  $\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  – одинична мат-

риця. В трипровідній системі живлення потужність втрат також описується кінцевим виразом (3) при  $\mathbf{R} = \mathbf{r}$ .

Виділимо в комплексних векторах діючих значень гармонік фазних напруг та струмів вектори дійсних та уявних частин

$\bar{\mathbf{u}}_k = \mathbf{u}_{kR} + j\mathbf{u}_{kI}$ ;  $\bar{\mathbf{i}}_k = \mathbf{i}_{kR} + j\mathbf{i}_{kI}$ . Тоді екстремальна задача передачі максимальної енергії за період  $T$  від трифазного джерела до навантаження при обмеженнях на потужність втрат в силовому кабелю формулюється наступним чином: при заданих векторах  $\bar{\mathbf{u}}_k$  та матриці  $\mathbf{R}$  знайти часову функцію вектора оптимальних миттєвих струмів  $\mathbf{i}_{opt}(t)$ , що характеризується

значення комплексних векторів  $\bar{\mathbf{i}}_{kopt}$ , за яких

$$\begin{aligned}
P &= \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_k^T \bar{\mathbf{i}}_k^* \right) = \operatorname{Re} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{u}_{kR} + j\mathbf{u}_{kI})^T (\mathbf{i}_{kR} - j\mathbf{i}_{kI}) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{u}_{kR}^T \mathbf{i}_{kR} + \mathbf{u}_{kI}^T \mathbf{i}_{kI}) \rightarrow \max; \\
\Delta P &= \operatorname{Re} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{i}}_k^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{i}}_k^* \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{i}_{kR}^T \mathbf{R} \mathbf{i}_{kR} + \mathbf{i}_{kI}^T \mathbf{R} \mathbf{i}_{kI}) = \text{const.}
\end{aligned}$$

Відповідно до методики розв'язання подібних екстремальних задач [8] утворимо функцію Лагранжа з множником  $\lambda$  при обмеженні-рівності

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{i}_{kR}, \mathbf{i}_{kI}, \lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{u}_{kR}^T \mathbf{i}_{kR} + \mathbf{u}_{kI}^T \mathbf{i}_{kI}) + \lambda \left[ \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{i}_{kR}^T \mathbf{R} \mathbf{i}_{kR} + \mathbf{i}_{kI}^T \mathbf{R} \mathbf{i}_{kI}) - \Delta P \right] = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{u}_{kR} + \lambda \mathbf{R} \mathbf{i}_{kR})^T \mathbf{i}_{kR} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{u}_{kI} + \lambda \mathbf{R} \mathbf{i}_{kI})^T \mathbf{i}_{kI} - \lambda \Delta P,
\end{aligned}$$

продиференціюємо її за всіма скалярними невідомими – координатами векторів  $(\mathbf{i}_{kR})_m$ ,  $(\mathbf{i}_{kI})_m$ , де  $m = 1, 2, 3$ , номер координати, та складемо систему рівнянь для їх визначення:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial (\mathbf{i}_{kR})_m} &= (\mathbf{u}_{kR} + \lambda \mathbf{Ri}_{kR})^T \mathbf{j}_m + (\lambda \mathbf{Rj}_m)^T \mathbf{i}_{kR} = (\mathbf{u}_{kR} + \lambda \mathbf{Ri}_{kR})^T \mathbf{j}_m + \lambda \mathbf{j}_m^T \mathbf{R}^T \mathbf{i}_{kR} = \\ &= (\mathbf{u}_{kR} + 2\lambda \mathbf{Ri}_{kR})^T \mathbf{j}_m = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial (\mathbf{i}_{lK})_m} &= (\mathbf{u}_{lK} + 2\lambda \mathbf{Ri}_{lK})^T \mathbf{j}_m = 0; \\ \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{i}_{kR}^T \mathbf{Ri}_{kR} + \mathbf{i}_{kI}^T \mathbf{Ri}_{kI}) &= \Delta P = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^T(t) \mathbf{Ri}(t) dt, \end{aligned} \right. \quad (4)$$

де  $\frac{\partial \mathbf{i}_{kR}}{\partial (\mathbf{i}_{kR})_m} = \mathbf{j}_m$ ;  $\mathbf{j}_1^T = \|1 \ 0 \ 0\|$ ;  $\mathbf{j}_2^T = \|0 \ 1 \ 0\|$ ;  $\mathbf{j}_3^T = \|0 \ 0 \ 1\|$ .

З рівнянь системи (4), що мають нулі у правих частинах, випливають співвідношення для спектральних векторних складових оптимальних лінійних струмів

$$\bar{\mathbf{u}}_k + 2\lambda \mathbf{R} \bar{\mathbf{i}}_{kopt} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_{opt}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{i}}_{kopt} e^{jk\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{i}}_{kopt} e^{-jk\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\lambda} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{u}}_k\right) e^{jk\omega t} + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\lambda} \mathbf{R}^{-1} \bar{\mathbf{u}}_k\right)^* e^{-jk\omega t} = -\frac{1}{2\lambda} \mathbf{R}^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_k e^{jk\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{u}}_k^* e^{-jk\omega t} \right) = \\ &= -\frac{1}{2\lambda} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Для знаходження значення коефіцієнта  $-\frac{1}{2\lambda}$  підставимо вираз (5) в останнє рівняння системи (4), що визначає потужність втрат в часовій області:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}_{opt}^T(t) \mathbf{Ri}_{opt}(t) dt = \\ &= \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt. \end{aligned}$$

Звідси

$$-\frac{1}{2\lambda} = \sqrt{\frac{\Delta P}{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt}},$$

і вираз для оптимальної часової залежності лінійних струмів набуває вигляду

$$\mathbf{i}_{opt}(t) = \sqrt{\frac{\Delta P}{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt}} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t).$$

які, в свою чергу, ведуть до матрично-векторного співвідношення для вектора оптимальних лінійних струмів в часовій області:

Оскільки повна потужність трифазної системи  $S$  дорівнює максимальній активній потужності при заданих втратах [9], то

$$\begin{aligned} S = P_{max} &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{i}_{opt}(t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{\Delta P}{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt}} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt = \\ &= \sqrt{\frac{\Delta P}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt}. \end{aligned} \quad (6)$$

**Коефіцієнт потужності трифазної системи живлення в несиметричному несинусоїдному режимі**

Коефіцієнт потужності усталеного процесу трифазної системи живлення, що характеризується вектором фазних напруг  $\mathbf{u}(t)$ , вектором лінійних струмів  $\mathbf{i}(t)$  та матрицею опорів втрат  $\mathbf{R}$ , відповідно до формул (1) та (6), визначається виразом

$$k_P = \frac{P}{S} = \frac{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{i}(t) dt}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{i}(t) dt}}. \quad (7)$$

Формули (6),(7) відрізняються від відомих з [8] розглядом узагальненого випадку несинусоїдних напруг та наявністю матричного

$$\int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt \int_0^T \mathbf{i}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{i}(t) dt = \int_0^T \mathbf{u}^T(t) r^{-1} \mathbf{u}(t) dt \int_0^T \mathbf{i}^T(t) r \mathbf{i}(t) dt = \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt \int_0^T \mathbf{i}^T(t) \mathbf{i}(t) dt,$$

тобто при прийнятих припущеннях повна потужність та коефіцієнт потужності не залежать від матриці опорів втрат. В трипровідній системі живлення, як правило, задається вектор миттєвих значень лінійних напруг,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{v}}_k e^{jk\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{v}}_k^* e^{-jk\omega t},$$

$$\bar{\mathbf{u}}_k = \begin{pmatrix} \dot{U}_{Ak} \\ \dot{U}_{Bk} \\ \dot{U}_{Ck} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \dot{V}_{ABk} - \dot{V}_{CAk} \\ \dot{V}_{Bck} - \dot{V}_{ABk} \\ \dot{V}_{CAk} - \dot{V}_{Bck} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V}_{ABk} \\ \dot{V}_{Bck} \\ \dot{V}_{CAk} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \mathbf{D} \bar{\mathbf{v}}_k, \text{ де } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким самим співвідношенням пов'язані вектори миттєвих значень:  $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{3} \mathbf{D} \mathbf{v}(t)$ . (8)

З урахуванням цього

$$\begin{aligned} U^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt = \frac{1}{9T} \int_0^T [\mathbf{D} \mathbf{v}(t)]^T \mathbf{D} \mathbf{v}(t) dt = \frac{1}{9T} \int_0^T \mathbf{v}^T(t) \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{v}(t) dt = \\ &= \frac{1}{9T} \int_0^T \mathbf{v}^T(t) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}(t) dt = \frac{1}{9T} \int_0^T \mathbf{v}^T(t) \left( \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \mathbf{v}(t) dt = \\ &= \frac{1}{3T} \int_0^T \mathbf{v}^T(t) \mathbf{v}(t) dt = \frac{1}{3} V^2; P = \frac{1}{3T} \int_0^T \mathbf{v}^T(t) \mathbf{D}^T \mathbf{i}(t) dt; I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^T(t) \mathbf{i}(t) dt. \end{aligned}$$

і вираз (7) для трипровідної системи приймає вигляд

$$k_P = \frac{P}{VI\sqrt{3}}. \quad (9)$$

Відповідно до формул (5),(8) та (9) коефіцієнт потужності трифазної трипровідної системи набуває одиничного значення при

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{v}(t), \quad (10)$$

де  $G$  - довільний дійсний скаляр.

множника у вигляді оберненої матриці втрат при векторі фазних напруг.

Для трипровідної системи при  $R = rI$

кожна спектральна векторна складова  $\bar{\mathbf{v}}_k$  якого пов'язана з відповідною спектральною складовою  $\bar{\mathbf{u}}_k$  вектора фазних напруг, що розглядається, співвідношенням

Дійсно, в цьому випадку в формулі (9)

$$\begin{aligned} P &= \frac{G}{3T} \int_0^T \mathbf{v}^T(t) \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{v}(t) dt = GV^2; \\ I^2 &= \frac{G^2}{T} \int_0^T \mathbf{v}^T(t) \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{v}(t) dt = 3G^2V^2; \\ k_P &= 1. \end{aligned}$$

Для чотирипровідної системи матриця  $R$  впливає на вирази (6), (7) за наявності складової

вих нульової послідовності векторів фазних напруг та лінійних струмів. Виділимо у векторі миттєвих значень фазних напруг ортогональні складові

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_\perp(t) + \mathbf{u}_0(t),$$

де  $\mathbf{u}_0(t) = \frac{u_+(t)}{3} \mathbf{j} = \frac{1}{3} \mathbf{j} \mathbf{j}^T \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{u}(t)$  - складова

нульової послідовності, колінеарна орту  $\mathbf{j} / \sqrt{3}$ ;  $u_+(t) = \mathbf{j}^T \mathbf{u}(t)$ ;  $\mathbf{A}_0 = \frac{1}{3} \mathbf{j} \mathbf{j}^T$ ; а ортогональна цьому орту складова  $\mathbf{u}_\perp(t)$ , що локалізується в  $\alpha\beta$  - площині [2], визначається виразом

$$\mathbf{u}_\perp(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_0(t) = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_0) \mathbf{u}(t) = \mathbf{A}_\perp \mathbf{u}(t),$$

з матрицею

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{j} \mathbf{j}^T = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Можна показати, що матриця  $\mathbf{A}_0$  є проектором, а матриця  $\mathbf{A}_\perp$  - сумою проекторів матриці

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \text{ тому матриці } \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_\perp \text{ не змінюють}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{u}(t) dt &= \frac{1}{Tr} \int_0^T [\mathbf{u}_\perp(t) + \mathbf{u}_0(t)]^T [\mathbf{A}_\perp + (1 - \sigma_0) \mathbf{A}_0] [\mathbf{u}_\perp(t) + \mathbf{u}_0(t)] dt = \\ &= \frac{1}{Tr} \int_0^T \mathbf{u}_\perp^T(t) \mathbf{u}_\perp(t) dt + (1 - \sigma_0) \frac{1}{Tr} \int_0^T \mathbf{u}_0^T(t) \mathbf{u}_0(t) dt = \frac{1}{r} [U_\perp^2 + (1 - \sigma_0) U_0^2]. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогічно може бути розкладений на ортогональні складові довільний вектор лінійних струмів:  $\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}_\perp(t) + \mathbf{i}_0(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{i}(t) + \mathbf{A}_\perp \mathbf{i}(t)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{i}(t) dt &= \frac{r}{T} \int_0^T [\mathbf{i}_\perp(t) + \mathbf{i}_0(t)]^T [\mathbf{A}_\perp + (1 + \frac{3r_n}{r}) \mathbf{A}_0] [\mathbf{i}_\perp(t) + \mathbf{i}_0(t)] dt = \\ &= \frac{r}{T} \int_0^T \mathbf{i}_\perp^T(t) \mathbf{i}_\perp(t) dt + (1 + \frac{3r_n}{r}) \frac{r}{T} \int_0^T \mathbf{i}_0^T(t) \mathbf{i}_0(t) dt = r [I_\perp^2 + I_0^2 / (1 - \sigma_0)]; \\ P &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{i}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{u}_\perp(t) + \mathbf{u}_0(t)]^T [\mathbf{i}_\perp(t) + \mathbf{i}_0(t)] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}_\perp^T(t) \mathbf{i}_\perp(t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}_0^T(t) \mathbf{i}_0(t) dt = P_\perp + P_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Відповідно до виразів (11), (12) коефіцієнт потужності чотирипровідної системи, виражений

своїх значень при піднесенні до квадрату, їх сума дорівнює одиничній матриці, а добуток в довільному порядку - нульовій матриці. Внаслідок цього для довільного  $n$  та ненульових  $a, b$  справедливий вираз

$$(a \mathbf{A}_0 + b \mathbf{A}_\perp)^n = a^n \mathbf{A}_0 + b^n \mathbf{A}_\perp.$$

Зокрема,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1} &= (r \mathbf{I} + r_n \mathbf{j} \mathbf{j}^T)^{-1} = \frac{1}{r} [(\mathbf{A}_\perp + \mathbf{A}_0) + \frac{3r_n}{r} \mathbf{A}_0]^{-1} = \\ &= \frac{1}{r} [\mathbf{A}_\perp + (1 + \frac{3r_n}{r}) \mathbf{A}_0]^{-1} = \frac{1}{r} [\mathbf{A}_\perp + (1 + \frac{3r_n}{r})^{-1} \mathbf{A}_0] = \\ &= \frac{1}{r} [\mathbf{A}_\perp + \mathbf{A}_0 + (\frac{r}{r + 3r_n} - 1) \mathbf{A}_0] = \\ &= \frac{1}{r} [\mathbf{I} - (\frac{3r_n}{r + 3r_n}) \mathbf{A}_0] = \frac{1}{r} (\mathbf{I} - \sigma_0 \mathbf{A}_0) = \\ &= \frac{1}{r} [\mathbf{A}_\perp + (1 - \sigma_0) \mathbf{A}_0], \end{aligned}$$

де коефіцієнт  $\sigma_0 = \frac{3r_n}{r + 3r_n}$  в точності співпадає

з величиною послаблення складової нульової послідовності вектора фазних напругах [11], що мінімізує втрати енергії в силовому кабелю чотирипровідної системи.

З урахуванням значення  $\mathbf{R}^{-1}$  та властивостей матриць  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_\perp$  інтеграл напруг з виразу (7) набуває вигляду

тоді інтеграл струмів та потужність навантаження визначаються виразами

$$k_P = \frac{P}{S} = \frac{P_{\perp} + P_0}{\sqrt{[U_{\perp}^2 + (1 - \sigma_0)U_0^2][I_{\perp}^2 + I_0^2 / (1 - \sigma_0)]}} \quad (13)$$

Коефіцієнт потужності за виразом (13) набуває одиничного значення лише за умови формування вектора фазних струмів пропорційним

$$\mathbf{i}(t) = G\mathbf{u}_{\sigma}(t) = G[\mathbf{u}_{\perp}(t) + (1 - \sigma_0)\mathbf{u}_0(t)], \quad (14)$$

де  $G$  – довільна дійсна константа, оскільки в цьому випадку в формулі (13)

$$P_{\perp} + P_0 = G[U_{\perp}^2 + (1 - \sigma_0)U_0^2]; \quad I_{\perp}^2 + I_0^2 / (1 - \sigma_0) = G^2[U_{\perp}^2 + (1 - \sigma_0)U_0^2]; \quad k_P = 1.$$

Зокрема, в розглянутому розв'язку екстремальної задачі передачі максимальної за період енергії від несиметричного трифазного джерела

вектору фазних напруг з частково послабленою складовою нульової послідовності  $\mathbf{u}_{\sigma}(t)$ :

при заданих втратах в силовому чотирипровідному кабелю константа  $G$  набуває значення

$$G = -\frac{1}{2\lambda} = \frac{\Delta P}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \frac{1}{r} [\mathbf{A}_{\perp} + (1 - \sigma_0)\mathbf{A}_0] \mathbf{u}(t) dt}} = \frac{\Delta Pr}{\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}_{\sigma}(t) dt}}$$

#### Енергоефективність засобів паралельної активної фільтрації трифазної чотири провідної системи живлення

Алгоритми роботи паралельного активного фільтра (ПАФ) трифазної чотирипровідної системи живлення передбачають постачання в паралельно включене нелінійне навантаження неактивних складових струмів, позбавляючи від них трифазне джерело та зменшуючи середньоквадратичне значення споживаного струму. Таким чином, при нехтуванні величиною власної потужності втрат ПАФ забезпечує вирівнювання миттєвої чи осередненої активної потужності трифазного джерела та навантаження в залежності від інтервалу осереднення, що задається системою управління [5]. В подальшому обмежимо розглядом основних алгоритмів фільтрації з використанням середньої активної потужності, оскільки ПАФ, що їх використовують, пе-

реважають за енергоефективністю аналоги з обробкою миттєвих значень [12].

Вперше алгоритм паралельної активної фільтрації струмів трифазної системи запропонував S. Fryze [9], виділивши в векторі фазних струмів навантаження "миттєвий активний" струм

$$\mathbf{i}^F(t) = \frac{P}{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt} \mathbf{u}(t).$$

Однак формування вектору струмів трифазного джерела за формулою S. Fryze у випадку чотирипровідної трифазної системи не забезпечує рівності активної та повної потужностей. Дійсно, в цьому випадку при використанні формули (13) для

$$\mathbf{i}^F(t) = \mathbf{i}_{\perp}^F(t) + \mathbf{i}_0^F(t) = \frac{P}{U_{\perp}^2 + U_0^2} \mathbf{u}_{\perp}(t) + \frac{P}{U_{\perp}^2 + U_0^2} \mathbf{u}_0(t) \text{ дає наступний результат:}$$

$$S^2 = [U_{\perp}^2 + (1 - \sigma_0)U_0^2] \left( \frac{P}{U_{\perp}^2 + U_0^2} \right)^2 [U_{\perp}^2 + U_0^2 / (1 - \sigma_0)] = P^2 \left[ 1 + \frac{\sigma_0^2}{1 - \sigma_0} \frac{U_0^2 U_{\perp}^2}{(U_{\perp}^2 + U_0^2)^2} \right];$$

$$k_P^F = \left[ 1 + \frac{\sigma_0^2}{1 - \sigma_0} \frac{U_0^2 U_{\perp}^2}{(U_{\perp}^2 + U_0^2)^2} \right]^{-1/2} < 1. \quad (15)$$

Так само коефіцієнт потужності не досягає одиничного значення при компенсації струму нейтралі шляхом пропорційно-векторного фо-

рмування фазних струмів з опорним вектором фазних напруг, позбавленим складової нульової послідовності [10]

$$i^Z(t) = \frac{P}{\frac{1}{T} \int_0^T u_{\perp}^T(t) u_{\perp}(t) dt} u_{\perp}(t) = \frac{P}{U_{\perp}^2} u_{\perp}(t),$$

оскільки при цьому за формулою (13)

$$S^2 = [U_{\perp}^2 + (1 - \sigma_0)U_0^2] \left(\frac{P}{U_{\perp}^2}\right)^2 U_{\perp}^2 = P^2 \left[1 + (1 - \sigma_0) \frac{U_0^2}{U_{\perp}^2}\right]; k_{\beta}^Z = \left[1 + (1 - \sigma_0) \frac{U_0^2}{U_{\perp}^2}\right]^{-1/2} < 1. \quad (16)$$

Графіки коефіцієнтів потужності за формулами (15), (16) в залежності від коефіцієнта нульової послідовності  $\Delta_0^2 = U_0^2 / (U_0^2 + U_{\perp}^2)$  наведено на рис. 1.

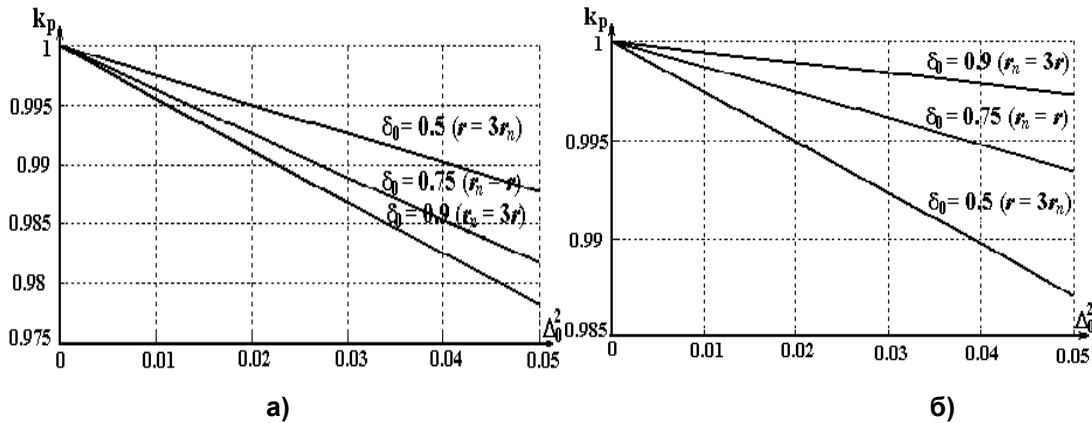


Рис.1. Графіки залежностей коефіцієнтів потужності від коефіцієнта нульової послідовності: а) – за формулою (15); б) – за формулою (16)

Аналіз графіків показує, що зменшення коефіцієнтів потужності на величину, більшу за один відсоток, відбувається при  $\Delta_0^2 \geq 0,04$ , причому при зменшенні опорного нейтрального проводу енергоефективність фільтрів, що використовують алгоритм [9], зростає, а тих, що використовують алгоритм [10], навпаки, зменшується, не досягаючи максимального значення.

І тільки запропонована в [11] формула

$$i^{\sigma}(t) = \frac{P}{\frac{1}{T} \int_0^T u^T(t) u_{\sigma}(t) dt} u_{\sigma}(t)$$

пропорційно-векторного формування фазних струмів з послабленням складової нульової послідовності опорного вектора фазних напруг в  $1 - \sigma_0$  разів, що є окремим випадком виразу (14)

при  $G = P / [U_{\perp}^2 + (1 - \sigma_0)U_0^2]$ , забезпечує одиничний коефіцієнт потужності та мінімальні втрати енергії в силовому кабелю при заданій потужності навантаження.

### Висновки

В результаті розв'язання екстремальної задачі визначення максимальної потужності нава-

нтаження при заданих втратах в проводах трифазної системи живлення необмеженої потужності отримані формули для оптимальної часової залежності лінійних струмів та повної потужності, які, на відміну від відомих, враховують параметри силового кабелю.

Вперше отримана умова досягнення одиничного коефіцієнта потужності в трифазній чотирипровідній системі живлення у вигляді пропорційності вектора фазних струмів вектору середніх значень фазних напруг з частково послабленою складовою нульової послідовності, причому величина коефіцієнта послаблення дорівнює значенню, що мінімізує втрати енергії в силовому чотирипровідному кабелю.

Доведено, що засоби паралельної активної фільтрації трифазної чотирипровідної системи живлення, що використовують пропорційно-векторне формування лінійних струмів джерела з частковим послабленням складової нульової послідовності відповідно до параметрів силового кабелю переважають за енергоефективністю аналогічні засоби з іншими алгоритмами трифазної паралельної активної фільтрації, забезпечуючи одиничний коефіцієнт потужності та мінімальні втрати енергії при заданій потужності навантаження.



**Список використаних джерел**

1. Akagi H., Kanazawa Y., Nabai A. Generalized theory of the instantaneous reactive power in three-phase circuits // Proceeding of Int. Power Electronics Conf. – Tokyo (Japan). – 1983. – P. 1375-1386.
2. Akagi H., Watanabe E.H., Aredes M. Instantaneous power theory and its applications to power conditioning. – Piscataway, NJ: IEEE Press. – 2007. – 379 p.
3. Peng F. Z., Lai J. S. Generalized instantaneous reactive power theory of three-phase power systems // IEEE Trans. Instrum. Meas., – 1996. – Vol. 45. – No. 1. – Pp. 293 - 297.
4. Kim H.S., Akagi H. The instantaneous power theory on the rotating p-q-r reference frames // Proceeding of Int. Power Electronics Conf. PEDS'99. – Hong Kong. – July 1999. – Pp. 422 – 427.
5. Жемеров Г.Г., Ильина О.В. Теория мощности Фризе и современные теории мощности //Электротехніка і Електромеханіка. –2004. – № 6. – С. 63 – 65.
6. Сиротин Ю.А. Векторная мгновенная мощность и энергетические режимы трехфазных цепей//Технічна електродинаміка. –2013.–№ 6.–С. 57 – 65.
7. Маевский О.А. Энергетические показатели вентильных преобразователей // М.: Энергия, 1978. – 320 с.
8. Лурье Л.С. Кажущаяся мощность трехфазной системы /Лурье Л.С. // Электричество. – 1951. –№1. – С. 47–53.
9. Fryze S. Active, reactive and apparent power in circuits with non-sinusoidal voltage and current // Przeglad Elektrotechniczny. –1931. – № 7 - 8. – Pp. 193 - 203.
10. Montano J.-C., Salmeron P., Thomas J.P. Analysis of power losses for instantaneous compensation of three-phase four-wire systems // IEEE Trans. on Power Electronics. – Vol. 20. – No.4. – July 2005. – Pp. 901–907.
11. Поліщук С. Й., Артеменко М. Ю., Михальский В. М., Шаповал И. А., Батрак Л. М. Стратегія керування паралельним активним фільтром з частковим послабленням складової нульової послідовності напруг трифазної чотирипровідної мережі // Технічна електродинаміка. – 2013. – № 3. – С. 12-19.
12. Артеменко М.Ю., Батрак Л.М. Порівняння стратегій керування засобами паралельної активної фільтрації трифазної мережі / Праці IV Міжнародної науково-технічної конференції “Обробка сигналів і негаусівські процеси” / 22 - 24 травня 2013. – Черкаси: ЧДТУ. – С. 34 - 36.

Поступила в редакцію 12 февраля 2014 г.

УДК 621.314

**М.Ю. Артеменко**, д.-р.техн.наук

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,  
пр. Победы, 37, Киев, 03056, Украина.

## **Полная мощность трехфазной системы питания в несинусоидальном режиме и энергоэффективность средств параллельной активной фильтрации**

*Выведена формула для полной мощности трехфазной системы питания, которая учитывает соотношение активных сопротивлений силового кабеля. Получены условия достижения единичного коэффициента мощности в трехпроводной и четырехпроводной трехфазных системах питания. Доказано, что средства параллельной активной фильтрации трехфазной четырехпроводной системы питания, использующие пропорционально-векторное формирования линейных токов с частичным ослаблением составляющей нулевой последовательности в соответствии с параметрами силового кабеля обеспечивают единичный коэффициент мощности и минимальные потери энергии. Библ.12, рис. 1.*

**Ключевые слова:** полная мощность, коэффициент мощности, параллельный активный фильтр.

UDC 621.314

**M.Yu. Artemenko**, Dr.Sc.

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",  
Peremogy pr, 56, Kyiv-57, 03680, Ukraine.

## Apparent power of three-phase power system in nonsinusoidal mode and energy effectiveness of shunt active filters

*The formula for apparent power of three-phase power system was derived, which takes into account the ratio of the resistances of the power cable. Conditions to achieve unity power factor in a three-wire and four-wire three-phase power system were obtained. It is proved that shunt active filter of three-phase four power system using proportional-vector formation of line currents with partial attenuation of the zero-sequence component in accordance to the parameters of the power cable provides unity power factor and minimum energy losses. Reference 12, figure 1.*

**Keywords:** *apparent power, power factor, shunt active filter.*

### Reference

1. Akagi H., Kanazawa Y., Nabai A. (1983), "Generalized theory of the instantaneous reactive power in three-phase circuits". Proceeding of IPE'83 Conf. –Pp. 1375-1386.
2. Akagi H., Watanabe E.H., Aredes M. (2007), "Instantaneous power theory and its applications to power conditioning". Piscataway, NJ: IEEE Press. 379 p.
3. Peng F. Z., Lai J. S. (1996), "Generalized instantaneous reactive power theory of three-phase power systems". IEEE Trans. Instrum. Meas. Vol. 45. No.1. – Pp. 293-297.
4. Kim H.S., Akagi H. (1999), "The instantaneous power theory on the rotating  $p$ - $q$ - $r$  reference frames". Proceeding of PEDS'99 Conf. Pp. 422 – 427.
5. Zhemerov G.G., Ylyna O.V. (2004), "Fryze's power theory and contemporary power theories". Electronics and Electromechanics. No 6. Pp. 63 - 65. (Rus).
6. Sirotin Iu. A. (2004), "Instantaneous vector power and energy modes of three-phase circuits". Tekhnichna elektrodynamika. No 6. Pp. 57 - 65. (Rus).
7. Majewski O.A. (1978), "Energy characteristics of switch converters". M.: Energy. 320 p. (Rus).
8. Lurie L.S. (1951), "Apparent power of three-phase system". Electricity. No 1. Pp. 47-53. (Rus).
9. Fryze S. (1931), "Active, reactive and apparent power in circuits with non-sinusoidal voltage and current". Przegląd Elektrotechniczny. No 7-8. Pp. 193 - 203.
10. Montano J.-C., Salmeron P., Thomas J.P. (2005), "Analysis of power losses for instantaneous compensation of three-phase four-wire systems". IEEE Trans. on Power Electronics. Vol. 20. No. 4. Pp. 901–907.
11. Polishchuk S.Y., Artemenko M.Yu., Mykhalskyi V.M., Batrak L.M., Shapoval I. A. (2013), "Shunt active filter control strategy with partial decrease of zero-sequence component in three-phase four-wire system". Tekhnichna elektrodynamika. no.3. pp. 12-19. (Ukr).
12. Artemenko M.Yu., Batrak L.M. (2013), "Comparison of control strategies for shunt active filters of three-phase four-wire system". Proceeding of IV ISTC Signal transformation and non gauss processes. Pp. 34 - 36. (Ukr).