Теория сигналов и систем

УДК 621.314

Є.В. Вербицький, канд.техн.наук, **Д.О. Гонтарєв**, **М.В. Путілін**
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

Розрахунок інтегральних показників модульованих сигналів на основі подвійного ряду Фур'є

На основі відомих аналітичних виразів значень гармонік модульованих сигналів, отриманих з використанням подвійного ряду Фур'є, проаналізовано структуру спектру сигналів з широтно-імпульсною модуляцією. Отримано співвідношення на основі яких можливо розраховувати інтегральні показники сигналів: діюче значення і коефіцієнт гармонік у згорнутій формі та з використанням мінімального обсягу математичних операцій. Бібл. 6, рис. 1.

Ключові слова: *подвійний ряд Фур'є, імпульсна модуляція, інтегральні показники сигналів.*

Вступ

У перетворювальній техніці формування напруги необхідної форми переважно здійснюють імпульсними методами модуляції параметрів несучої функції. Залежно від модульованого параметру несучої функції розрізняють амплітудний, частотний, широтний методи модуляції [4]. Вказані методи через просту апаратну реалізацію мають значне розповсюдження. Однак за умови їх використання вносяться певні спотворення у спектр модульованого сигналу, які можливо зменшити за умови збільшення кратності P періода модульованого сигналу відносно періода модуляції.

Критерієм якості вихідної модульованого сигналну є коефіцієнт гармонік КГ, використання якого як цільової функції передбачає визначення спектрального складу сигналу, для чого можливо використовувати ряд Фур'є однієї змінної [6]. Розрахунок спектру модульованого сигналу полягає у сумуванні спектру сигналу на кожному періоді несучої, що є достатньо трудомісткою операцією і обмежує верхню межу частоти модуляції сигналу [6].

Зменшення обсягу математичних операцій можливе за умови розрахукну інтегральних показників, зокрема коефіцієнта гармонік, у аналітичній згорнутій формі, для чого доцільно використовувати ряд Фур'є двох змінних, який дозволяє виразити спектр модульованого сигналу незалежно від кратності модуляції P [1]. Однак під час розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є двох змінних Cmn, де m – кратність спектральної складової відносно частоти ω несучої функції, n – кратність спектральної складової відносно частоти Ω модулюючої функції, використовують функції Бесселя Ji(z) [3], які в свою чергу виражаються через суму нескінченного ряду:

$$J_i(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left((-1)^m \,/\, m!\,\Gamma(m+i+1)\right)\left(z/2\right)^{2m+i}, \quad (1)$$

де Γ(m+i+1) – гамма-функція, що призводить до громіздких розрахунків при визначенні інтегральних показників якості напруги. Тому актуальною є задача розробки алгоритмів розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є двох змінних з мінімальним обсягом математичних обчислень.

Використання ряду Фур'є двох змінних дозволяє описати спектр модульованого сигналу відносно двох змінних x і y, відношення між якими рівне значенню параметра модуляції x/y=P. Зміна x пропорційна кутовій частоті ω несучої, x=ω·t, змінна y – кутовій частоті Ω модулюючої функції, y=Ω·t. Коефіцієнти ряду Фур'є Cmn, які є спектральними складовими сигналу з кратністю m відносно частоти несучої функції і кратністю n відносно частоти модулюючої функції, розраховують незалежно від кратності модуляції P.

Постановка задачі

Методика розрахунку інтегральних показників напруги складається з таких етапів:

1. Розрахунок спектральних складових Cmn на основі подвійного ряду Фур'є.

2. Розрахунок амплітудних значень гармонік на основі спектральних складових Cmn. Формула для розрахунку амплітуди гармоніки з номером k модульованого сигналу є такою:

$$C_k = \sum_{m=0}^{\infty} C_{m(k-mP)}\ , \qquad (2)$$

де m може змінюватись у діапазоні m Є (0..∞).

3. Розрахунок діючого значення сигналу СД за формулою:

$$C_Д = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} C_k^2}\ , \qquad (3)$$

4. Розрахунок коефіцієнту гармонік:

$$K_Г = \frac{\sqrt{C_Д^2 - C_1^2}}{C_Д}\ , \qquad (4)$$

З аналізу методики розрахунку параметра КГ можна зробити висновок, що обчислення діючого значення сигналу СД бажано виконувати в аналітичному виді для уникнення багаторазового сумування, для чого призначена пропонована методика. Продемонструємо її на прикладі однополярної ШІМ другого роду з двосторонньою модуляцією.

Розрахункова частина

Формули для розрахунку спектральних складових Cmn вказаного типу модуляції для синусоїдальної модулюючої функції є такими:

$$\begin{aligned} &C_{m(2n-1)} = \\ &= \frac{j4H}{m\pi^2}\int_0^{\pi/2} sin(\pi\mu m sin(y)) sin((2n-1)y)dy = \\ &= \frac{2jH(-1)^m}{m\pi} J_{2n-1}(\pi\mu m) \end{aligned} ; \qquad (5)$$

$$C_{01} = \frac{2j\mu H}{\pi}\int_0^{\pi/2} sin(y) sin((2n-1)y)dy = j\mu H\ . \qquad (6)$$

де μ – глибина модуляції, H – амплітуда модульованого сигналу.

З аналізу формули (5) можна зробити висновок, що за умови розрахунку амплітуди деякої гармоніки з номером k за формулою (3) кінцевий вираз міститиме нескінченну суму, однак за умови врахування властивостей функції Бесселя, можливо отримати достатньо точний результат за умови врахування лише декількох членів суми ряду. Відомо, що значення функції Бесселя прямує до нуля за умови:

$$J_n(z) \to 0,\ |n| > 1{,}3z + 1\ , \qquad (7)$$

де n Є N.

Тому у сумі формули (3) лише деякі члени мають істотно більші значення ніж у решти членів ряду. Для аналізу спектрального складу перепишемо формулу (3) з врахуванням виразу (5):

$$C_k = \sum_{m=1}^{\infty} C_{m(k-mP)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2jH(-1)^m}{m\pi} J_{k-mP}(\pi\mu m)\ . \qquad (8)$$

Згідно з формулою (8), значення членів ряду, які необхідно враховувати знаходяться з умови:

$$\begin{aligned} &|k - mP| < 1{,}3\pi\mu m + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -1{,}3\mu\pi - 1/m < k/m - P < 1{,}3\mu\pi + 1/m \end{aligned}\ . \qquad (9)$$

Для випадків, коли для заданого значення номеру гармоніки k, нерівність (9) не виконується для будь-якого цілого m, можна вважати що значення гармоніки k рівне нулю; якщо нерівність виконується лише для одного значення параметра m, значення амплітуди гармоніки k виражається через одну функцію Бесселя цілого порядку; якщо нерівність виконується для декількох значень параметра m, амплітуда гармоніки k виражається через суму функцій Бесселя. З аналізу формули (9) можна зробити висновок, що зі збільшенням значення параметра m зростає кількість гармонік з ненульовим значенням, які виражаються через одну або суму декількох функцій Бесселя. Загалом можна зробити висновок, що для розрахунку значень гармонік модульованого сигналу з достатньою точністю, необхідно враховувати лише декілька перших членів ряду формули (8), що значно зменшує обсяг математичних операцій.

Для демонстрації методики розглянемо найпростіший випадок, коли амплітуди гармонік виражаються лише через значення однієї функції Бесселя:

$$\begin{cases} C_k \cong \dfrac{(-1)^m 2jH}{m\pi} J_{k-mP}(\pi\mu m), \\ |k/m - P| < 1{,}3\mu\pi + 1/m; \\ C_k \cong 0, |k/m - P| > 1{,}3\mu\pi + 1/m. \end{cases} \qquad (10)$$

Для значень параметра кратності модуляції P>30, які зазвичай використовують на практиці, амплітуди гармонік, що розраховуються за формулою (10), задовільняють умові k<100, що в більшості випадків достатньо для оцінки спектрального складу сигналу. Згідно з формулою (10) найбільші значення мають гармоніки, різниця номеру яких і кратності модуляції P мінімальна. Оскільки спектр сигналу містить лише непарні гармоніки, а кратність модуляції P є парним числом, гармоніки сигналу будуть пропорційні значенню функцій Бесселя непарного порядку і оберненопропорційні значенню параметра m J1(z)/m, J3(z)/m, J2k-1(z)/m. Для значення параметра m=1 за умови максимального значення параметра глибини модуляції μ=1, суттєво відрізнятись від нуля будуть гармоніки CP±1~J1(z), CP±3~J3(z), CP±5~J5(z), для значення параметра m=2–CP±1~J1(z)/2, CP±3~J3(z)/2, CP±5~J5(z)/2, CP±7~J7(z)/2, CP±9~J9(z)/2 і т.д. Приклад гармонічного складу напруги модульованого сигналу з параметрами H=10 В, P=30, μ=1 для однополярної ШІМ другого роду з двосторонньою модуляцією показано на рис. 1.

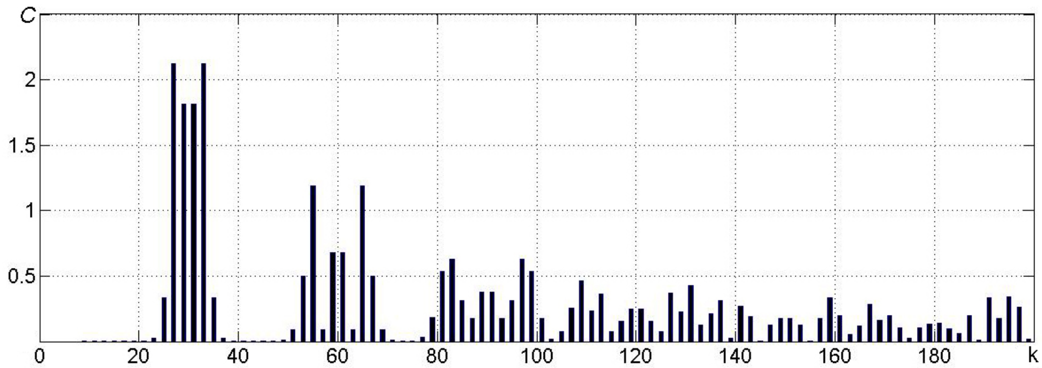

Рис. 1. Гармонічний склад напруги модульованого сигналу

З спектральної характеристики модульованого сигналу, наведеної на рис. 1 можна зробити висновок, що для значення параметра m=1,2,3 спектральна характеристика є симетричною відносно гармонік k кратних параметру модуляції P=30, k=30, 60, 90, тому вирази для розрахунку гармонік Ck для вказаних значень параметра m містять лише одну функцію Бесселя, формула (10). Значення гармонік з номерами k>120 виражають через суму двох і більше функцій Бесселя.

Діюче значення модульованого сигналу згідно з формулами (3), (6) і (10) виражаються через квадрати значень функцій Бесселя з аргументом, кратним глибині модуляції μ:

$$C_Д = \sqrt{C_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} C_{2k-1}^2} = \sqrt{(\mu H)^2 + \frac{4H^2}{\pi^2}\sum_{g=-i_1}^{i_1} J_{2g-1}^2(\pi\mu) + \frac{H^2}{\pi^2}\sum_{g=-i_2}^{i_2} J_{2g-1}^2(2\pi\mu) + \ldots + \frac{4H^2}{(\pi m)^2}\sum_{g=-i_l}^{i_l} J_{2g-1}^2(l\pi\mu)} \quad (11)$$

де 2il – кількість гармонік з ненульовим значенням за умови, що m=l.

Розглянемо кожну суму у виразі (11) окремо:

$$S_l = \sum_{g=-i_l}^{i_l} J_{2g-1}^2(l\pi\mu) = 2\sum_{g=1}^{i_l} J_{2g-1}^2(l\pi\mu). \quad (12)$$

З теорії спеціальних функцій відомі дві таких тотожності відносно функцій Бесселя [5]:

$$1 = J_0^2(z) + 2\sum_{g=1}^{\infty} J_g^2(z); \quad (13)$$

$$J_0(2z) = J_0^2(z) + 2\sum_{g=1}^{\infty} (-1)^g J_g^2(z). \quad (14)$$

Ряд (11) можливо отримати відніманням ряду (14) від ряду (13):

$$S_l = \sum_{g=-i_l}^{i_l} J_{2g-1}^2(l\pi\mu) = 2\sum_{g=1}^{i_l} J_{2g-1}^2(l\pi\mu) = 1 - J_0(2\pi\mu). \quad (15)$$

Підставляючи значення суми ряду виразу (15) у формулу для розрахунку діючого значення (11), отримаємо:

$$C_Д = \sqrt{(\mu H)^2 + \frac{4H^2}{\pi^2}(1 - J_0(2\pi\mu)) + \frac{H^2}{\pi^2}(1 - J_0(4\pi\mu)) + \ldots + \frac{4H^2}{(\pi l)^2}(1 - J_0(2l\pi\mu))} = \sqrt{(\mu H)^2 + \frac{4H^2}{\pi^2}\sum_{i=1}^{l}\frac{(1 - J_0(2i\pi\mu))}{i^2}} \quad (16)$$

Функцію Бесселя нульового порядку J0(z) в діапазоні аргументу 0<z<3 розраховують за формулою розкладу в ряд:

$$J_0(z) = 1 - \frac{z^2/4}{(1!)^2} + \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} - \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{(z^2/4)^n}{(n!)^2}. \quad (17)$$

Для зменшення обсягу розрахунків у діапазоні z>3, використовують наближену формулу:

$$J_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} cos(z - \pi / 4) . \qquad (18)$$

Кількість членів суми I формули (16), залежить від кількості гармонік k, які враховують під час розрахунку інтегральних показників модульованого сигналу. Якщо значення параметра кратності модуляції задовільняє умові P>30, а для розрахунку інтегральних показників достатньо обмежити досліджуваний спектр з умови k<100, формулу (16) можливо використовувати для розрахунку діючого значення СД і коефіцієнту гармонік КГ з достатньою точністю.

Для випадків, коли необхідно врахувати вплив гармонік з номером k>100, необхідно розглянути випадок, коли значення окремих гармонік виражаються через суму декількох функцій Бесселя. Наприклад значення гармонік модульованого сигналу, зображеного на рис. 1, виражаються через суму двох функцій Бесселя для значень параметра m=4..10, що відповідає номерам гармонік k=120..300. Для розрахунку значень вказаних гармонік використовують формулу:

$$C_k \cong \frac{2jH}{\pi}\left(\frac{J_{k-mP}(\pi\mu m)}{m} - \frac{J_{k-(m+1)P}(\pi\mu(m+1))}{m+1}\right),$$

$$\begin{aligned} &\left|\frac{k}{m} - P\right| < 1{,}3\mu\pi + \frac{1}{m}, \\ &\left|\frac{k}{m+1} - P\right| < 1{,}3\mu\pi + \frac{1}{m+1} \end{aligned} . \qquad (19)$$

Діюче значення модульованого сигналу з врахуванням гармонік, значення яких розраховують за формулою (19), виражають через квадрат суми декількох функцій Бесселя:

$$C_Д = \sqrt{C_1^2 + \sum_{k=2}^{\infty} C_{2k-1}^2} =$$

$$= \sqrt{\begin{aligned} &(\mu H)^2 + \frac{4H^2}{\pi^2}\sum_{g=-i_1}^{i_1}\left(J_{2g-1}^2(\pi\mu) + \frac{J_{2g-1-P}^2(2\pi\mu)}{4} - J_{2g-1}(\pi\mu)J_{2g-1-P}(2\pi\mu)\right) + \ldots \\ &+ \frac{4H^2}{\pi^2}\sum_{g=-i_l}^{i_l}\left(\frac{J_{2g-1}^2(l\pi\mu)}{m^2} + \frac{J_{2g-1}^2((l+1)\pi\mu)}{(m+1)^2} - \frac{2J_{2g-1}(l\pi\mu)J_{2g-1-P}((l+1)\pi\mu)}{m(m+1)}\right) \end{aligned}} . \qquad (20)$$

Суми квадратів функцій Бесселя, як і у випадку, коли значення гармонік виражається через одну функцію Бесселя, формула (16) зводяться до функцій Бесселя нульового порядку:

$$C_Д = \sqrt{(\mu H)^2 + \frac{4H^2}{\pi^2}\sum_{i=1}^{I}\frac{(1 - J_0(2i\pi\mu))}{i^2} - \frac{4H^2}{\pi^2}\sum_{l=1}^{M}\sum_{g=-i_l}^{i_l}\left(\frac{2J_{2g-1}(l\pi\mu)J_{2g-1-P}((l+1)\pi\mu)}{l(l+1)}\right)} . \qquad (21)$$

Спрощення суми у виразі (21) можливе за умови використання теореми сумування для функцій Бесселя [5]:

$$J_n(z_1 + z_2) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_i(z_1)J_{n-i}(z_2) . \qquad (22)$$

Запишемо цю ж теорему для від'ємного значення другого аргументу –z2:

$$\begin{aligned} J_n(z_1 - z_2) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_i(z_1)J_{n-i}(-z_2) = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i J_i(z_1)J_{n-i}(z_2) \end{aligned} . \qquad (23)$$

Віднявши вираз (22) від виразу (23) отримаємо:

$$\begin{aligned} &J_n(z_1 + z_2) - J_n(z_1 - z_2) = \\ &= 2\sum_{i=-\infty}^{\infty} J_{2i-1}(z_1)J_{n-2i-1}(z_2) \end{aligned} . \qquad (24)$$

За умови використання формули (24), вираз (21) для розрахунку діючго значення напруги спрощується:

$$C_Д = \sqrt{(\mu H)^2 + \frac{4H^2}{\pi^2}\sum_{i=1}^{I}\left(\frac{(1 - J_0(2i\pi\mu))}{i^2} - \frac{J_P((2i+1)\pi\mu) - J_P(\pi\mu))}{i(i+1)}\right)} . \qquad (25)$$

Аналогічно можливо отримати формули для розрахунку інтегральних показників для випадків, коли значення гармонік виражаються через три і більше функцій Бесселя. Вираз розрахунку діючого значення сигналу міститиме функції Бесселя кратні параметру модуляції P.

Якщо значення гармонік є сумою і функцій Бесселя, то вираз розрахунку інтегральних показників сигналу буде містити функцій Бесселя порядку 0, P, 2P…, (i-1)P:

$$C_Д = \sqrt{\left(\mu H\right)^2 + \sum_{i=1}^{I}\left(f(J_0(z_i)) + f(J_P(z_i)) + f(J_{2P}(z_i)) + ... + f(J_{(i-1)P}(z_i))\right)}, \qquad (26)$$

Формула (26) є розкладом діючого значення сигналу в ряд за функціями Бесселя, порядок яких змінюється з кроком P. Використання формули (26) дає змогу розрахувати діюче значення напруги з використанням мінімального обсягу математичних операцій.

Висновки

Використання запропонованої методики для розрахунку інтегральних показників дає можливіть:

1. Значно скоротити обсяг математичних розрахунків у порівнянні з безпосереднім сумуванням окремих спектральних складових модульованого сигналу.

2. Додатково зменшити кількість членів врахованих членів розкладу за умови нехтування гармонік з близькими до нуля значеннями, які знаходяться з нерівності (7).

Список використаних джерел

1. *D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo*. Pulse width modulation for power converters. Theory and practice. - IEEE Press Series on Power Engineering, 2003. - 724 pp.
2. Solving the Optimal PWM Problem for Single-Phase Inverters. D. Czarkowski, D. Chudnovsky, G. Chudnovsky, I. Selesnick. IEEE Transactions on circuits and systems – I: fundamentaly theory and applications, Vol. 49, № 4, 2002. – pp. 465-475.
3. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979. – 831 с.
4. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2000. – 462 с.
5. *Ватсон Г.Н.* Теория Бесселевых функций. Часть I. М.: Издательство иностранной литературы, 1949. - 798 с.
6. *Сергиенко А.Б.* Цифровая обработка сигналов. СПб: Питер, 2003 – 604 с.

Поступила в редакцию 06 ноября 2014 г.

УДК 621.314

Е.В. Вербицкий, канд.техн.наук, **Д.А. Гонтарев**, **Н.В. Путилин**

Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”,

пр. Победы, 37, Киев-56, 03056, Украина.

Расчет интегральных показателей модулированных сигналов на основании двойного ряда Фурье

На основании изсестных аналитических выражений значений гармоник модулированных сигналов, полученных с использованием двойного ряда Фурье, проанализировано структуру спектра сигналов с широтно-импульсной модуляцией. Получено соотношения, на основании которых возможно рассчитать интегральные показатели сигналов: действующее значение и коэффициент гармоник в свернутой форме и с использованием минимального значения математических операций. Библ. 6, рис. 1.

Ключевые слова: *двойной ряд Фурье, импульсная модуляция, интегральные показатели сигналов.*

UDC 621.314

E.V. Verbitskyi, Ph.D., **D.A. Gontariev**, **N.V. Putilin**
National technical university of Ukraine «Kyiv politechnic institute»,
Polytechnichna st., 16, building 12, Kyiv, 03056, Ukraine.

Modulated signals integral parameters calculation on basis of the Fourier double series

Based on the known analytical expressions modulated signals harmonic values, obtained using a double Fourier series, structure of the spectrum of the signal with pulse-width modulation are analyzed. Obtained expressions take opportunity to calculate the integral signal parameters: the RMS value and total harmonic distortion parameters. Bibl. 6, Fig. 1.

Keywords: *Fourier double series, pulse modulation, integral signal parameters.*

References

1. *D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo.* (2003), “Pulse width modulation for power converters. Theory and practice”. IEEE Press Series on Power Engineering. P. 724.
2. *D. Czarkowski, D. Chudnovsky, G. Chudnovsky, I. Selesnick*. (2002), “Solving the Optimal PWM Problem for Single-Phase Inverters IEEE Transactions on circuits and systems”. I: fundamentaly theory and applications, Vol. 49, No4. Pp. 465-475.
3. *Abramovits M., Stigan I.* (1979), “Handbook of mathematical functions. With formulas, graphs and mathematical tables”. [Spravochnik matematicheskih funktsiy. S formulamy, grafikamy i matematicheskimy tablitsamy]. M.: Nauka. P. 831. (Rus)
4. *Baskakov S.I.* (2000), “Radiotechnical circuits and signals” [Radiotechnicheskiye tsepi i signaly]. M.: Vyshaya shkola. P. 462. (Rus)
5. Watson G.N. (1949), “A treatise on the theory of Bessel functions”. [Teoria Besselevyh funktsiy]. Part I. M.: Izdatelstvo inostrannoy literatury. P. 798. (Rus)
6. Sergienko A.B. (2003), “Digital signal processing”. [Tsifrovaya obrabotka signalov]. SPb: Piter. P. 604 (Rus)