Акустические приборы и системы

УДК 534.6

О.В. Коржик, д.-р.тех.наук, **О.М. Петріщев**, д.-р.тех.наук
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,
вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

Прийом звуку сферичним електропружним перетворювачем з розрізними електродами (частина 1)

На основі електропружної моделі поодинокого сферичного п'єзокерамічного перетворювача у вигляді суцільної тонкої п'єзокерамічної оболонки з розрізними електродами - розв'язана задача прийому в наскрізній постановці. Електродування подано парою симетричних напівсферичних електродів, які розділено по екватору сфери та навантажено на окремі незалежні електричні опори. Бібл.9, рис.2.

Ключові слова: *прийом звукових хвиль, сферична оболонка, п'єзокерамічний перетворювач, наскрізна задача, розрізні зелектроди, електричні опори.*

Вступ

В практиці застосувавння гідроакустичних засобів використання сферичних прийомних перетворювачів як складних багатомодових коливальних систем з розподіленими параметрами, має спиратися на можливості реалізації широкого набору модових складових розкладень полів. Формально, реалізація наборів модових складових вимагає, як мінімум, застосування багатоелектродного покриття активної поверхні та врахування окремо електричних навантажень кожного з електродів - величин та типів їх електричних опорів.

На сьогодні запропоновано достатньо фізично адекватні підходи щодо постановки задач стаціонарної гідроелектропружності для режиму прийому звуку електропружними системами з поверхнями, що повністю вкриті електродами. Вони базуються на положеннях монографій [1,2] та використані, наприклад, в роботі [3].

Проте, застосування розрізних електродів для сфери стикається з рядом труднощів, які пов'язані з особливостями застосування сферичних хвильових функцій при врахуванні тессеральних гармонійних складових, які, саме, і визначають очікувані набори мод.

Початкові кроки щодо розгляду основних фізичних ситуацій про прийом звуку сферичними електропружними перетвоювачами з електродуванням різного типу наведені в роботах [3,4]. Так в роботі [4] розглянуто основні типи електродування сферичних прийомних електропружних перетворювачів та їх вплив на модовий склад сферичної коливальної системи.

Зазначимо також, що початково в роботі [3] виказані застереження щодо рівномірності розподілень характеристик електричного поля в межах електродованих та неелектродованих ділянок поверхонь п`єзокерамічних перетворювачів, а робота [5] вже містить напрямки врахування основних граничних умов щодо неоднорідного розподілення напруженості та електричної індукції на границях електродів та ділянок вільної від них сферичної поверхні перетворювача.

Часткове уникнення врахування такої особливості показано в роботі [6], де пропонується заміна монолітної сферичної оболонки клеєвою конструкцію з ідеально з`єднаних напвісфер різної за напрямком поляризації з повним електородуванням поверхонь. При цьому збагачуючим чинником є наявність специфічного електродування, що за певних умов включення електродів приводить до врахування багатомодовості на електричному боці. Зазначимо також, що при цьому існує умова ідеалізації зклеювання, що містить додаткові ризики щодо його точного описання. Ці ризики можуть привести до помилок як розрахункового так і суто технологічного характеру.

Отже, з метою подальшого порівняльного аналізу степені впливу на результат двох варіантів моделей сферичних електропружних гідрофонів (монолітної сфери та сфери, що складається з двох напівсфер з електродуванням вказаного типу), вважається доцільним створення теоретичних основ розрахунків акустичних, механічних та електричних полів монолітного (суцільного) сферичного перетворювача з розрізним електродуванням в рамках наскрізної постановки. Власне, в цьому і полягає мета роботи.

Загальна постановка задачі

Отже, розглядається задача про прийом звуку тонкостінним сферичним перетворювачем в наскрізній постановці, яка належить до класу задач стаціонарної гідроелектропружності.

Передбачається, що в ідеальній рідині з густиною ρ і швидкістю звуку c розташовано коливальну систему з розподіленими параметрами у вигляді поодинокого п`єзокерамічного сферичного перетворювача (рис.1).

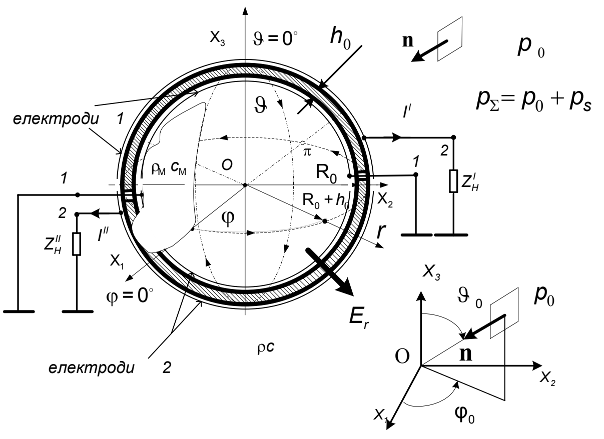

Рис. 1. Сферичний перетворювач з парою розрізних електродів

Сам перетворювач подано сферичною електропружною радіально поляризованою оболонкою довільного радіусу R_0 з товщиною стінки h_0, п`єзоматеріал якої має густину ρ_M, та швидкість звуку c_M.

Внутрішній об`єм перетворювача – вакуумовано.

Відповідно до режиму прийому п`єзокерамічний сферичний елемент працює в якості генератора електричної енергії. Деформування п'єзоелемента відбувається завдяки виникненню зовнішнього акустичного впливу. Таким впливом вважатимемо плоску акустичну хвилю відомої амплітуди, що находить з незкінечності:

$$p_0(r,\varphi_0,\vartheta_0) = p_0^* e^{j\omega t} e^{j\eta(\varphi_0,\vartheta_0)}, \qquad (1)$$

де $\eta(\varphi_0,\vartheta_0)$ - визначає деяку фунціональну залежність від кутів падіння φ_0, ϑ_0.

Вироблена п'єзоелементом електрична енергія споживається зовнішніми споживачами певного типу, а саме - деякими зовнішніми навантаженнями – комплексними електричними опорами. Контактні групи, що нанесено на поверхню п'єзокерамічної сфери, подаються у вигляді тонких ідеальних провідників, масою яких можно нехтувати. Такі групи є, власне, електродами, які за геометрією симетрично відносно полюсів та екватора охоплюють верхню і нижню поверхні сферичної оболонки, (рис. 2) та відокремлені один від одного по екватору тонкою неелектродованою ділянкою поверхонь ззовні та всередині сфери. Отже, вважатимемо, що на зовнішню і внутрішню поверхні суцільного однорідного перетворювача нанесено розрізні електроди, кожний з яких замкнено на окреме зовнішнє електричне навантаження - Z_H^I, Z_H^{II}, відповідно, окремим електричним колом. Вказані опори в загальному випадку є комплексними $Z_H^{I,II} = R_H^{I,II} + iX_H^{I,II}$, де $R_H^{I,II}$ та $X_H^{I,II}$, відповідно, активні та реактивні складові загальних опорів Z_H^I, Z_H^{II}. При цьому невідомими є різниці потенціалів між відповідними групами пар електродів **I** та **II** ($\Delta\Psi^I_{S_e^I} = U_H^I(t)$, $\Delta\Psi^{II}_{S_e^{II}} = U_H^{II}(t)$) та струми проводимості $I_{PR}^I(t)$, $I_{PR}^{II}(t)$ в кожному колі навантаження відповідного електроду з площинами S_e^I, S_e^{II} (рис.1, рис. 2).

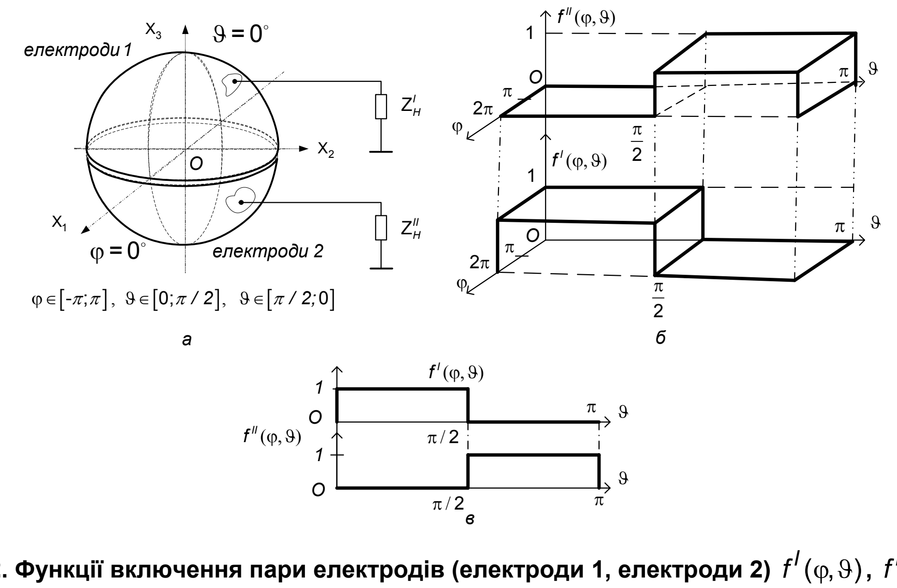

Рис. 2. Функції включення пари електродів (електроди 1, електроди 2) $f^I(\varphi,\vartheta)$, $f^{II}(\varphi,\vartheta)$

Таке уявлення дозволяє визначення значень складових вектора електричної індукції D_m окремо для кожного електроду (виходячи з його геометрії) та кола навантаження (виходячи з опору навантаження). Отже, доцільним є використання запропонованих раніше функцій включення (див. наприклад рис. 2, або роботи [4,5]): $f^I(\varphi,\vartheta), f^{II}(\varphi,\vartheta)$ у вигляді:

$$D_m(\varphi,\vartheta) = \tag{2}$$
$$= D_m^I(\varphi,\vartheta,\varphi_0,\vartheta_0) f^I(\varphi,\vartheta) + D_m^{II}(\varphi,\vartheta,\varphi_0,\vartheta_0) f^{II}(\varphi,\vartheta).$$

Саме наведені на рис.2 а).-в). функції включення $f^I(\varphi,\vartheta)$ та $f^{II}(\varphi,\vartheta)$ і визначають електродування сферичного перетворювача у вигляді двох пар (зовнішній-внутрішній) напівсферичних електродів, яки повністю покривають верхні і нижні поверхні сфери відносно екватору, електрично відокремлені один від одного безкінечно тонкою лінією та є абсолютно однаковими за розмірами та фізичними властивостями.

Основні рівняння та загальний розв`язок задачі

Відповідно до [2,6], визначимо наступний порядок механо-електричних перетворень в прийомному електропружному елементі:

– виникнення зовнішнього до оболонки
– збиткового (акустичного) тиску $p_0(r,\varphi_0,\vartheta_0)$ прзводить до деформації поверхні оболонки $\varepsilon_{\lambda\beta}(\varphi,\vartheta)$, яка характеризуються наявністю центрально симетричних $\varepsilon^0_{\lambda\beta}$, вісесиметричних $\varepsilon^n_{\lambda\beta}$ та несиметричних складових $\varepsilon^{nm}_{\lambda\beta}$ (λ,β - набувають значення $rr,\varphi\varphi,\vartheta\vartheta,\varphi\vartheta$);
– деформації $\varepsilon_{\lambda\beta}(\varphi,\vartheta)$ викликають переміщення матеріальних точок поверхні сферичної оболонки (вектор яких розкладено по компоненттам $u_r,u_\varphi,u_\vartheta$) та (у відповідності до закону Гука) відповідні механічні напруження $\sigma_{rr},\sigma_{\varphi\varphi},\sigma_{\vartheta\vartheta}$;
– виникнення вказаних переміщень характеризуватимуть, таким чином, ситуації перевипромінення звуку оболонкою та створення розсіяного поля $p_s(r,\varphi,\vartheta)$, яке за умови гармонійності зовнішнього впливу в свою чергу визначатиме режим коливань, що встановилися, у вигляді сумарного поля $p_\Sigma\ (r,\varphi,\vartheta)$. При цьому одночасно для деформівного електропружного тіла відбуватиметься формування певного електричного стану з боку зовнішніх електричних навантажень електродів.

Така ситуація викликає необхідність послідовного розгляду складових фізичних полів (акустичних, механічних та електричних), що беруть участь в зазначених перетвореннях.

Акустичне поле

Отже, на зазначену сферичну тонку п'єзокерамічну оболонку падає плоска звукова хвиля (1). Представлення плоскої хвилі з амплітудою p_0^* (яка, доречі, може бути одиничною) по сферичним хвильовим функціям, у відповідності, нариклад до [2,3,7], матиме вигляд :

$$p_0(r,\varphi,\vartheta) = p_0^* \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} j^n \frac{2-\delta_{0m}}{N_{nm}} i_n(kr) \times$$
$$\times P_n^m(\cos\vartheta_0) P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m(\varphi-\varphi_0)) =$$
$$= p_0^*\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{1/2}(kr) + \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{n=1}^{\infty} j^n (2n+1) J_{n+1/2}(kr) \times\right.$$
$$\times P_n(\cos\vartheta_0) P_n(\cos\vartheta) +$$
$$+\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} j^n (2n+1)\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\times \tag{3}$$
$$\left.\times J_{n+1/2}(kr) P_n^m(\cos\vartheta_0) P_n^m(\cos\vartheta)\cos(m(\varphi-\varphi_0))\right\},$$

де: p_0^* - амплітуда плоскої хвилі. Зазначимо при цьому, що множник виду $j2\omega\rho$ перед амплітудним членом p_0^* для – опущено. В подальшому вважаємо цю амплітуду одиничною, а p_0^* таким, що вказує на перехід від звукового потенціалу швидкості $\Phi(r,\varphi,\vartheta)$ до тиску $p(r,\varphi,\vartheta)$ у вигляді похідної за часом; δ_{0m} - є символом Кронекера, для якого:

$$\delta_{km} = \delta_{0m} = \begin{cases} 1, \forall m = k = 0 \\ 0, \forall m \neq k \end{cases};$$

$$N_{nm} = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!};$$

$i_n(kr)$-сферична функція Бесселя цілого n- го порядку, $n = 0;1;2;3;..$; $P_n^m(...)$- приєднана функція Лежандра першого роду ступеня n та порядку m, $m = 0;1;2;3;....$; $P_n(\cos\vartheta)$- поліном Лежандра; $J_{n+1/2}(kr)$- циліндрична функція Бесселя нецілого порядку.

Формально, вираз (3) представляє собою суму центрально симетричної гармоніки (перший доданок), вісесиметричної складової (другий доданок), та невісесиметричної складової (третій доданок). Такий результат можно також інтерпретувати як суму центральносиметричної сферичної гармоніки та сукупності тессеральних гармонік 0-го порядку (доданок 2) та сукупність тессеральних гармонік вищих порядків (доданок 3).

Падіння плоскої хвилі (1), (3) викликає появу розсіяного поля $p_s(r,\varphi,\vartheta)$, форма запису якого наступна:

$$p_s(r,\varphi,\vartheta)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} p_s^{nm} P_n^m(\cos\vartheta) h_n^{(2)}(kr)\cos(m\varphi)=$$

$$=\left\{p_s^{00}\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}H_{1/2}^{(2)}(kr)+\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{n=1}^{\infty}p_s^{n0}H_{n+1/2}^{(2)}(kr)P_n(\cos\vartheta)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}p_s^{nm}H_{n+1/2}^{(2)}(kr)P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi\right\} \quad (4)$$

де: множник $j\omega\rho$ як і у виразі (3), опущено;

$h_n^{(2)}(kr)=\sqrt{\dfrac{\pi}{2kr}}H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$ - сферична функція Ханкеля другого роду $n-$го порядку; $H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$ - циліндрична функція Ханкеля другого роду нецілого порядку; $p_s^{00}, p_s^{n0}, p_s^{nm}$ - невідомі коефіцієнти розкладення, що характеризують відповідні амплітуди склодових форм в полі розсіяної хвилі.

Поле падаючої хвилі (3) та поле розсіяної хвилі (4) утворюють повне поле $p_\Sigma\ (r,\varphi,\vartheta)$, тобто:

$$p_\Sigma(r,\varphi,\vartheta)=p_0(r,\varphi,\vartheta)+p_s(r,\varphi,\vartheta). \quad (5)$$

Коливання елктропружного сферичного елемента

Коливання електропружної системи мають бути записані з врахуванням законів Нютона та Гука, співвідношень Коши для переміщень та деформацій, а також спрощень (відповідно до [1,2]) рівнянь Максвелла щодо п`єзокераміки. Отже:

- у відповідності до [2] *представлення закону Н`ютона* в компонентах вектора переміщення $u_r, u_\varphi, u_\vartheta$ матеріальних часток поверхні оболонки з врахуванням умови її тонкостінності ($\sigma_{r\varphi}=\sigma_{r\vartheta}=0\forall(r,\varphi,\vartheta)\in V$ ($V$ - об`ем електропружної оболочки) має вид:

$$\frac{1}{R_1}\left(2\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}-\sigma_{\vartheta\vartheta}\right)+\rho_M\omega^2 u_r=0, \quad (6)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{R_1\sin\vartheta}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{R_1}\frac{\partial\sigma_{\varphi\vartheta}}{\partial\vartheta}+\\+\frac{2\sigma_{\varphi\vartheta}}{R_1}\operatorname{ctg}\vartheta+\rho_M\omega^2u_\varphi=0\end{gathered}, \quad (7)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{R_1\sin\vartheta}\frac{\partial\sigma_{\varphi\vartheta}}{\partial\varphi}+\frac{1}{R_1}\frac{\partial\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial\vartheta}+\\+\frac{1}{R_1}\left(\sigma_{\vartheta\vartheta}-\sigma_{\varphi\varphi}\right)\operatorname{ctg}\vartheta+\rho_M\omega^2u_\vartheta=0\end{gathered}, \quad (8)$$

де $R_1=R_0+h_0$ - зовнішній радіус оболонки.

- *співвідношення* для розрахунку *механічних напружень* витікають з закону Гука та для електропружного середовища записуються як:

$$\sigma_{rr}=c_{11}^E\varepsilon_{rr}+c_{12}^E\varepsilon_{\varphi\varphi}+c_{12}^E\varepsilon_{\vartheta\vartheta}-e_{11}E_r, \quad (9)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=c_{12}^E\varepsilon_{rr}+c_{22}^E\varepsilon_{\varphi\varphi}+c_{12}^E\varepsilon_{\vartheta\vartheta}-e_{12}E_r, \quad (10)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}=c_{12}^E\varepsilon_{rr}+c_{12}^E\varepsilon_{\varphi\varphi}+c_{22}^E\varepsilon_{\vartheta\vartheta}-e_{12}E_r, \quad (11)$$

$$\sigma_{\varphi\vartheta}=2c_{44}^E\varepsilon_{\varphi\vartheta}, \quad (12)$$

$$\begin{gathered}\sigma_{r\vartheta}=2c_{55}^E\varepsilon_{r\vartheta}-e_{26}E_\vartheta,\\ \sigma_{r\varphi}=2c_{55}^E\varepsilon_{r\varphi}-e_{26}E_\varphi,\end{gathered} \quad (13)$$

де $\varepsilon_{rr}=\dfrac{\sigma_{rr}}{c_{11}^E}-\dfrac{c_{12}^E}{c_{11}^E}\varepsilon_{\varphi\varphi}-\dfrac{c_{12}^E}{c_{11}^E}\varepsilon_{\vartheta\vartheta}-\dfrac{e_{11}}{c_{11}^E}E_r$, (14)

c_{11}^E, c_{12}^E, $c_{22}^E, c_{22}^E, c_{44}^E, c_{55}^E$ - модулі пружності деформівної оболонки; e_{11}, e_{12}, e_{26} - п`єзомодулі; E_r, E_ϑ, E_φ- компоненти вектора електричної напруженості E в матеріалі оболонки.

- *співвідношення Коши* для двовимірної ситуації:

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{1}{R_1\sin\vartheta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{1}{R_1}u_r+\frac{1}{R_1}u_\vartheta\operatorname{ctg}\vartheta; \quad (15)$$

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta}=\frac{1}{R_1}u_r+\frac{1}{R_1}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta}; \quad (16)$$

$$\varepsilon_{\varphi\vartheta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\vartheta}-\frac{1}{R_1}u_\varphi\operatorname{ctg}\vartheta+\frac{1}{R_1\sin\vartheta}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\varphi}\right); \quad (17)$$

$$\varepsilon_{r\vartheta}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial u_r}{\partial\vartheta}-\frac{1}{R_1}u_\vartheta\right); \quad (18)$$

$$\varepsilon_{r\varphi}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1\sin\vartheta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{R_1}u_\varphi\right).$$

Далі, деформації в радіальному напрямку, виходячи з моделі ідеально пружного середовища, визначаються з умови:

$$\sigma_{rr}\big|_{r=R_1}=p_0\left(R_1,\varphi,\vartheta\right)+p_s\left(R_1,\varphi,\vartheta\right)= \\ =p_\Sigma\left(R_1,\varphi,\vartheta\right)=\Delta p\left(R_1,\varphi,\vartheta\right)=p_\Sigma=\Delta p. \tag{19}$$

Отже, з врахуванням (19) та (14) для деформаціїї ε_{rr} отримаємо:

$$\varepsilon_{rr}=\frac{p_\Sigma}{c_{11}^E}-\frac{c_{12}^E}{c_{11}^E}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{\vartheta\vartheta}\right)+\frac{e_{11}}{c_{11}^E}E_r\,. \tag{20}$$

При цьому напруження $\sigma_{\varphi\varphi}$ та $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ будуть визначатися наступним чином:

$$\sigma_{\varphi\varphi}=c_{22}^*\varepsilon_{\varphi\varphi}+c_{12}^*\varepsilon_{\vartheta\vartheta}-e_{12}^*E_r+\frac{c_{12}^E}{c_{11}^E}p_\Sigma\,, \tag{21}$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}=c_{12}^*\varepsilon_{\varphi\varphi}+c_{22}^*\varepsilon_{\vartheta\vartheta}-e_{12}^*E_r+\frac{c_{12}^*}{c_{11}^*}p_\Sigma\,, \tag{22}$$

$$c_{12}^*=c_{12}^E\left(1-\frac{c_{12}^E}{c_{11}^E}\right);c_{22}^*=c_{22}^E-(c_{12}^E)^2\big/c_{11}^E;$$
де
$$e_{12}^*=e_{12}-e_{11}\frac{c_{12}^E}{c_{11}^E};\;\; p_\Sigma=p_\Sigma\left(R_1,\varphi,\vartheta\right). \tag{23}$$

Проведемо ряд спрощень:

– враховуючи, що оболонка тонка, дотичні, механічні напруження та деформації можна вважати такими, що дорівнюють нулю

$$\sigma_{r\varphi}=\sigma_{r\vartheta}=0\forall\left(r,\varphi,\vartheta\right)\in V\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\varepsilon_{r\varphi}=\varepsilon_{r\vartheta}=0\forall\left(r,\varphi,\vartheta\right)\in V\,; \tag{24}$$

– приймаючи, що частини поверхні оболонки є електродованими, на металізованих ділянках мають виконуватись умови щодо електричної індукції [1,2]:

$$D_\varphi^{I,II}=D_\vartheta^{I,II}=0\;\;\forall(\mathrm{r},\varphi,\vartheta)\begin{cases}\in VI\\ \in VII\end{cases},$$

де VI, VII - об’єми оболонки під відповідними електродами.

- для електричного боку, співвідношення, що визначають *складові вектора електричної індукції* $D^{I,II}$ $\left(D_r^{I,II},D_\varphi^{I,II},D_\vartheta^{I,II}\right)$ можуть бути подані в межах відповідних електродів як ([2, 5]):

$$D_r^{I,II}=e_{11}\varepsilon_{rr}+e_{12}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}+\varepsilon_{\vartheta\vartheta}\right)+\chi_{11}^\varepsilon E_r^{I,II}\,, \tag{25}$$

$$D_\varphi^{I,II}=2e_{26}\varepsilon_{r\varphi}+\chi_{22}^\varepsilon E_\varphi^{I,II}\Rightarrow 0= \\ =2e_{26}\cdot 0+\chi_{22}^\varepsilon E_\varphi^{I,II}\Rightarrow E_\varphi^{I,II}=0 \tag{26}$$

В подальшому розв`язок проводитимемо на прикладі електроду **I**.

- щодо *зв’язку механічних напружень та переміщень* відмітимо, що умови рівності нулю дотичних механічних напружень $\sigma_{r\varphi}=\sigma_{r\vartheta}=0$ будуть виконуватися завжди, якщо між компонентами вектора переміщень u_φ та u_ϑ існує зв'язок :

$$u_\varphi=\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi},\qquad u_\vartheta=\frac{\partial u_r}{\partial\vartheta}. \tag{28}$$

При цьому амплітудні значення радіальної компоненти $u_r\left(\varphi,\vartheta\right)$ записуються у вигляді:

$$u_r\left(\varphi,\vartheta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}u_r^{nm}f_r^{nm}\left(\vartheta\right)\cos m\varphi= \tag{29}$$
$$=u_r^0+\sum_{n=1}^{\infty}u_r^nf_r^n\left(\vartheta\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}u_r^{nm}f_r^{nm}\left(\vartheta\right)\cos m\varphi,$$

де $u_r^{nm}\left(\vartheta\right)=u_r^{nm}f_r^{nm}\left(\vartheta\right)$; u_r^0, u_r^n и u_r^{nm} - подлежащие определению константы; $f_r^n\left(\vartheta\right)$ и $f_r^{nm}\left(\vartheta\right)$ - подлежащие определению функции.

Із співвідношень (28) та (29) витікає, що форми подання кутових компонентів $u_\vartheta\left(\varphi,\vartheta\right)$ та $u_\varphi\left(\varphi,\vartheta\right)$ наступні:

$$u_\vartheta\left(\varphi,\vartheta\right)= \\ =\sum_{n=1}^{\infty}u_\vartheta^nf_\vartheta^n\left(\vartheta\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}u_\vartheta^{nm}f_\vartheta^{nm}\left(\vartheta\right)\cos m\varphi, \tag{30}$$

де $u_\vartheta^{nm}\left(\vartheta\right)=u_\vartheta^{nm}f_\vartheta^{nm}\left(\vartheta\right)$;

$$u_\varphi\left(\varphi,\vartheta\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}u_\varphi^{nm}f_\varphi^{nm}\left(\vartheta\right)\cos m\varphi, \tag{31}$$

де $u_\varphi^{nm}\left(\vartheta\right)=u_\varphi^{nm}f_\varphi^{nm}\left(\vartheta\right)$.

Отже, для зміщень центрально симметричний u_r^0, вісесиметричний u_r^n та невісесиметричний u_r^{nm} розв`язки повністю відповідають фізичній суті компактної формі запису ряду (29) та становлять:

– центрально симметричним розв`язком системи рівнянь (6) – (8) є вектор зміщення $\vec{u}^0$, який повністю визначається компонентом u_r^0 (при цьому $u_\varphi^0=u_\vartheta^0=0$);

– вісесиметричним розв`язком системи рівнянь (6) – (8) є вектор $\vec{u}(\vartheta)$, який повністю визначаєтьсяя компонентами $u_r(\vartheta)$ и $u_\vartheta(\vartheta)$ (при цьому радіальний компонент вісесиметричного розв`язку $u_r(\vartheta)$ задается другим доданком розкладення (29), а полярний компонент $u_\vartheta(\vartheta)$ - першим доданком виразу (30));
– невісесиметричним розв`язком системи рівнянь (6) – (8) вважатимемо вектор $\vec{u}(\varphi,\vartheta)$, компоненти якого $u_r(\varphi,\vartheta)$, $u_\vartheta(\varphi,\vartheta)$ и $u_\varphi(\varphi,\vartheta)$ завдані у формі третього доданку виразу (29), другого доданку розкладення (30) та розкладенням (31) відповідно.

Зауважимо також, що за аналогією до зміщень, та за пропозицією [2], деформації $\varepsilon_{\lambda\beta}(\varphi,\vartheta)$ можна також представити по сферичним гармонікам:

$$\varepsilon_{\lambda\beta}(\varphi,\vartheta)=\varepsilon_{\lambda\beta}^{0}+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_{\lambda\beta}^{n}P_n(\cos\vartheta)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\varepsilon_{\lambda\beta}^{nm}P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi, \qquad (32)$$

де $\varepsilon_{\lambda\beta}^{0}$ - центрально симетрична складова діаметральних компонент матриці тензору деформацій; $\varepsilon_{\lambda\beta}^{n}$ - віссе-, а $\varepsilon_{\lambda\beta}^{nm}$ - невісесиметричні складові зазначенних компонент матриці.

Електричне поле

Отже, вважатимемо, що радіальний компонент вектора електричної індукції D_r^I для ділянки оболонки, що охоплена елктродами групи **I** (площею розкриву S_e^I.), спираючись на форму представлення розкладень (3), (4), (29)-(31) та [2,6], можна записати:

$$D_r^I(\varphi,\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}D_r^{nm\,I}P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi=$$
$$=D_r^{0\,I}+\sum_{n=1}^{\infty}D_r^{nI}P_n(\cos\vartheta)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}D_r^{nm\,I}P_n^m(\cos\vartheta)\cos m\varphi. \;. \qquad (33)$$

Зауважимо, що в загальному випадку $D_r^I(\varphi,\vartheta)\neq D_r^{II}(\varphi,\vartheta)$ за значеннями амплітуди і фази, але однакові за формою подання розкладення.

Для заданих умов електродування (рис.2,б,в) зазначимо, що :

– електричні заряди, які доставляються на зовнішню електродовану поверхню сфери S_e^I вільними носіями електрики в колі навантаження Z_H^I групи електродів **I**, визначатимуться співвідношенням:

$$Q_{S_e^I}^I=\int_{S_e^I}D_r^I dS_e^I=$$
$$=(R_0+h_0)^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}D_r^I(\varphi,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi; \qquad (34)$$

– електричні заряди, що доставляються на зовнішню електродовану поверхню сфери S_e^{II} вільними носіями електрики в колі навантаження Z_H^{II} групи електродів **II**, визначатимуться співвідношенням:

$$Q_{S_e^{II}}^{II}=\int_{S_e^{II}}D_r^{II} dS_e^{II}=$$
$$=(R_0+h_0)^2\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}D_r^{II}(\varphi,\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi. \qquad (35)$$

Після інтегрування (34),(35) по $d\varphi$, застосовуючи форму запису щодо центрально симетричних та вісесиметричних компонент разкладень полів, для зарядів $Q_{S_e^I}^I$, $Q_{S_e^{II}}^{II}$ на відповідних електродах, отримаємо:

$$Q_{S_e^I}^I=2\pi(R_0+h_0)^2D_r^{0\,I}+2\pi(R_0+h_0)^2\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}D_r^{nI}\int_0^{\pi/2}P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta, \qquad (36)$$

$$Q_{S_e^I}^{II}=2\pi(R_0+h_0)^2D_r^{0\,II}+2\pi(R_0+h_0)^2\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}D_r^{nII}\int_{\pi/2}^{\pi}P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta, \qquad (37)$$

Застосовуючи [2,4,8], розглянемо інтеграли виду

$$\int_0^{\pi/2}P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\;,\quad \int_{\pi/2}^{\pi}P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\;,$$

які, власне, і враховують вид електродування верхньої частини сфери **I** і нижньої частини II відповідно.

Отже, для верхньої групи елктродів **I** матимемо:

$$\int_0^{\pi/2} P_n(\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta = \begin{cases} 0 \forall n = 2m,\ m = 1,2,3,.. \\ q_m \forall n = 2m+1,\ m = 0,1,2,.. \end{cases} \quad (38)$$

де $q_m = (-1)^m \dfrac{(2m)!(4m+4)}{2^{2m+3}(m+1)^2(m!)^2}$..

Зазначимо, що розгляд нижньої групи електродів II, після виконання інтегрування в межах $\vartheta \in \left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$ приведе до того ж самого результату виду (38), але з протилежним знаком.

Як видно з (38), застосування зазначеного суцільного електродування верхньої або нижньої половини сферичної поверхні приводить до того, що електричний сигнал на навантаженнях електродів формуватиметься "нульовою", "першою" та наступними "парними" формами коливань сферичного перетворювача. При цьому [6;8] вирази для зарядів (36), (37), враховуючі межі інтегрування по полярному куту ϑ, $\vartheta \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ для (36) та межі інтегрування по полярному куту ϑ, $\vartheta \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ для (37), набуватимуть вигляду:

$$Q^I = 2\pi(R_0+\alpha)^2 D_r^{0I} + 2\pi(R_0+\alpha)^2 \sum_{m=0}^{\infty} D_r^{I,2m+1} q_m \text{ та}$$

$$Q^{II} = 2\pi(R_0+\alpha)^2 D_r^{0II} - 2\pi(R_0+\alpha)^2 \sum_{m=0}^{\infty} D_r^{II,2m+1} q_m \quad (39)$$

відповідно. Очевидно, що струми I^I, I^{II} в колах навантажень Z_H^I, Z_H^{II} електродів **I** і II відповідно визначаються співвідношеннями

$$I^I = j\omega Q^I, \qquad I^{II} = j\omega Q^{II}. \quad (40)$$

Таким, чином, при визначенні електричних характеристик, спираючись на наведені вище рівняння для акустичного та механічного полів, маємо окремо врахувати або навантаження електроду I кола Z_H^I, або навантаження електроду II кола Z_H^{II}. Це здійснюється шляхом застосування відповідної функції включення [4,5]) - $f^I(\varphi,\vartheta)$ або $f^{II}(\varphi,\vartheta)$ (рис.2) та умови (див.[1,2]):

$$\mathbf{n}\cdot D_m^S = 0 \quad (41)$$

для неелектродованої частини решти поверхні S_e^I (при використанні $f^{II}(\varphi,\vartheta)$) або S_e^{II} (при використанні $f^I(\varphi,\vartheta)$).

Результуючий сигнал з виходу перетворювача при цьому може бути отримано шляхом комутації навантажень або виконанням певних адитивних операцій з визначеними за результатами окремих розв`язків задачі відносно значень струмів або електричних напруг в зазначених окремих колах елетродів **I,II.**

Зазначимо також, що врахування одночасного навантаження обох електродів **I,II** - Z_H^I, Z_H^{II} дозволяє дослідити своєрідні локальні (в межах електродів) змінення жорсткості оболонки. Проте, запропонований підхід дозволяє поки що в основному реалізувати багатомодовість вихідних електричних сигналів як наслідок використання розрізних електродів окремо.

Тож, враховуючи суперпозицію складових розвязків у вигляді шуканих розкладень-рядів полів, маємо визначити електричні напруги (струми) на навантаженнях кіл електродів, як результату використання нульової та вищих форм коливань оболонки у вигляді центрально симетричних та вісесиметричних гармонік.

Таким чином, необхідно знайти сукупність центрально симетричних та вісесиметричних розв'язків для акустичних, механічних та електричних полів для кожного електроду окремо шляхом відшукання відповідних алгебраїчних коефіцієнтів рядів-розкладень полів.

Центрально симетрична складова розв`язку задачі

Для центрально симетричного розв`язку з трьох складових вектора зміщень $\vec{u}^0$ залишаємо лише радіальну складову виду u_r^0, а $u_\vartheta^0 = 0$ та $u_\varphi^0 = 0$. Завдяки тому, що $u_\vartheta^0 = u_\varphi^0 = 0$, із співвідношень Коши (15),(16) маємо:

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^0 = \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 = \frac{1}{R_1}u_r^0,\ R_1 = R_0 + h_0, \quad (42)$$

де $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^0$, $\varepsilon_{\varphi\varphi}^0$ відповідають центрально симетричним складовим розкладення (32).

Для центрально симетричних складових механічних напружень σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ з врахуванням співвідношення (42) та рівності $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\vartheta\vartheta}$, запишемо, що

$$\sigma^0_{\varphi\varphi} = \frac{c^*_{12} + c^*_{22}}{R_1} u^0_r - e^*_{12} E^I_r + \frac{c^E_{12}}{c^E_{11}} p^0_\Sigma , \quad (43)$$

$$\sigma^0_{\vartheta\vartheta} = \frac{c^*_{12} + c^*_{22}}{R_1} u^0_r - e^*_{12} E^I_r + \frac{c^*_{12}}{c^*_{11}} p^0_\Sigma . , \quad (44)$$

де E^I_r - напруженість електричного поля в межах ділянки сфери під електродом **I.**

Для тисків p^0_Σ, що входять в вирази (43) та (44), з врахуванням розкладень (3),(4) та суперпозиції (5) для акустичного поля отримаємо:

$$p^0_\Sigma(r,\varphi,\vartheta)\Big|_{\substack{r=R_1 \\ m=0,n=0}} = \left[p^*_0 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} J_{1/2}(kR_1) + A^{00} \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} H^{(2)}_{1/2}(kR_1) \right], \quad (45)$$

або, застосовуючи модуль всебічного стиснення рідини λ (він визначає фазову швидкість акустичної хвилі c) [2] та зв'язок амплітуди тиску p^0_Σ з потенціалом зміщення $\mathrm{H}^0_\Sigma(r,\varphi,\vartheta)$ матимемо:

$$p^0_\Sigma(r,\varphi,\vartheta) = -\lambda k^2 \mathrm{H}^0_\Sigma(r,\varphi,\vartheta) = -\rho\omega(\omega \mathrm{H}^0_\Sigma(r,\varphi,\vartheta)) = = -\rho\omega\Phi^0_\Sigma(r,\varphi,\vartheta),$$

Для виконання останнього в свою чергу необхідним є зв'язок виду:

$$\Phi^0(r,\varphi,\vartheta) = \omega \mathrm{H}^0(r,\varphi,\vartheta) = = \omega\left(\tilde{A}^*_0 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} J_{1/2}(kR_1) \right)$$ - падаюча хвиля,

$$\Phi_s(r,\varphi,\vartheta) = \omega \mathrm{H}_s(r,\varphi,\vartheta) = = \omega\left(\tilde{A}^{00} \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} H_{1/2}(kR_1) \right)$$ - розсіяна хвиля,

$\lambda = \rho c^2, \ k = \omega / c.$

Отже, в результаті маємо:

$$p^0_\Sigma(r,\varphi,\vartheta)\Big|_{\substack{r=R_1 \\ m=0,n=0}} = \sigma_{rr}\big|_{r=R_1} = \sigma^0_{rr}\big|_{r=R_1}(r) = = -\frac{\lambda}{R_1^2}\left[\tilde{A}^*_0 (kR_1)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} J_{1/2}(kR_1) + \tilde{A}^{00}(kR_1)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} H^{(2)}_{1/2}(kR_1) \right], \quad (46)$$

розуміючи, що Φ^0_Σ і H^0_Σ задовольняють відповідним рівнянням Гельмгольця та рівності $\Phi^0_\Sigma = j\omega \mathrm{H}^0_\Sigma$, а $\tilde{A}^*_0$, $\tilde{A}^{00}$ - амплітудні коефіцієнти для відповідних розкладень потенціалу зміщення центрально симетричного розвязку $\mathrm{H}^0_\Sigma(r,\varphi,\vartheta)$.

Далі спростимо систему рівнянь (6)-(8) для центрально симетричної ситуації :

$$\frac{1}{R_1}\left(2\sigma^0_{rr} - \sigma^0_{\varphi\varphi} - \sigma^0_{\vartheta\vartheta} \right) + \rho_M \omega^2 u^0_r = 0 , \quad (47)$$

з врахуванням силової умови спряження (19), рівностей $u^0_\vartheta = u^0_\varphi = 0$ та (42), а також виразів (43), (45).

Всі похідні по кутах φ, ϑ в лівих частинах рівнянь (6)-(8), а також напруження $\sigma_{\varphi\vartheta}$ - дорівнюють нулю , що забезпечує тотожність лівих і правих частин вказаних рівнянь. Таким чином, підставляючи в рівняння (47) (або (8)) умову (19) для σ^0_{rr}, рівняння (46) та вирази (43),(44), отримаємо для (47)

$$-\frac{2}{R_1}\frac{\lambda}{R_1^2}\left[\tilde{A}^*_0 (kR_1)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} J_{1/2}(kR_1) + \tilde{A}^{00}(kR_1)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} H^{(2)}_{1/2}(kR_1) \right] - \frac{2}{R_1}\left\{ \frac{c^*_{12}+c^*_{22}}{R_1} u^0_r - e^*_{12} E^I_r \frac{c^E_{12}}{c^E_{11}} \frac{\lambda}{R_1^2}\left[\tilde{A}^*_0 (kR_1)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} J_{1/2}(kR_1) - \tilde{A}^{00}(kR_1)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} H^{(2)}_{1/2}(kR_1) \right] \right\} + \omega^2 \rho_M u^0_r = 0. \quad (48)$$

Після проведеня перетворень (48) отримаємо рівність:

$$-\tilde{A}^{00} \frac{2}{R_1}\left(\frac{\lambda}{R_1^2} \right)\left(1 - \frac{c^E_{12}}{c^E_{11}} \right) \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} (kR_1)^2 H^{(2)}_{1/2}(kR_1) - \frac{2}{R_1}\left(\frac{(c^*_{12}+c^*_{22})}{R_1} - \omega^2 \rho_M \right) u^0_r + \frac{2}{R_1} e^*_{12} E^{0I}_r = = \frac{2}{R_1} \tilde{A}^*_0 \left(\frac{\lambda}{R_1^2} \right)\left(1 - \frac{c^E_{12}}{c^E_{11}} \right)(kR_1)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} J_{1/2}(kR_1). \quad (49)$$

та бачимо, що рівняння (49) містить невідомі коефіцієнти A^*_0, A^{00}, u^0_r для розкладень акустичних та механічних полів відповідно та складове значення напруженості електричного поля в п`єзокераміці E^{0I}_r .

Застосуємо умови спряження кінематичного типу для зміщень часток середовища $\xi^0_{r\Sigma}$ і матеріальних точок поверхні u^0_r оболонки на границі $r = R_1$, які виникають в результаті існування поля падаючої та розсіяної хвилі $p_{\Sigma}^{0}(r,\varphi,\vartheta)\Big|_{\substack{r-R_1 \\ m=0,n=0}}$ (дивись рівняння (46)):

$$\xi_{r\Sigma}^{0}\left(r,\varphi,\vartheta\right)\Big|_{r=R1}=\xi_{r0}^{0}\left(r,\varphi,\vartheta\right)+\xi_{rs}^{0}\left(r,\varphi,\vartheta\right)\Big|_{r=R1}=$$
$$=u_r^{0}\left(r,\varphi,\vartheta\right)\Big|_{r=R1}=\xi_{r\Sigma}^{0}\left(r\right)\Big|_{r=R1}=$$
$$=\left(\xi_{r0}^{0}\left(r\right)+\xi_{rs}^{0}\left(r\right)\right)\Big|_{r=R1}=u_r^{0}\Big|\left(r\right)_{r=R1}; \quad (50)$$
$$\xi_{r0}^{0}\left(r,\varphi,\vartheta\right)\Big|_{r=R1}=grad\mathrm{H}_0\left(r,\varphi,\vartheta\right)=$$
$$=\frac{\partial \mathrm{H}_0\left(r,\varphi,\vartheta\right)}{\partial r}\Bigg|_{r=R1};$$
$$\xi_{rs}^{0}\left(r,\varphi,\vartheta\right)\Big|_{r=R1}=grad\mathrm{H}_s\left(r,\varphi,\vartheta\right)$$
$$==\frac{\partial \mathrm{H}_s\left(r,\varphi,\vartheta\right)}{\partial r}\Bigg|_{r=R1}.$$

$$\xi_{r0}^{0}=-\frac{p_0^{*}R_1}{\lambda}\frac{1}{kR_1}\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}J_{3/2}\left(kR_1\right); \quad (51)$$

$$\xi_{rs}^{0}=-\frac{\tilde{A}^{00}}{R_1}\left(kR_1\right)\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}H_{3/2}^{(2)}\left(kR_1\right) \quad (52)$$

де ξ_{r0}^{0} - центрально симетрична складова радіальної компоненти зміщення, яке виникає за рахунок існування плоскої хвилі; ξ_{rs}^{0} - центрально симетрична складова радіальної компоненти зміщення, яке виникає за рахунок розсіяння.

Після перетворень рівнянь (50) - (52), отримаємо формулу

$$\frac{\tilde{A}^{00}}{R_1}kR_1\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}H_{3/2}^{(2)}\left(kR_1\right)+u_r^{0}=$$
$$=-\frac{p_0^{*}R_1}{\lambda}\frac{1}{kR_1}\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}J_{3/2}\left(kR_1\right), \quad (53)$$

яка знову (яке як і рівняння (49)) містить невідомі коефіцієнти $\tilde{A}^{00}$, u_r^{0} (нагадаємо, що p_0^{*}=1). Зауважимо, що не визначеним залишається напруженість електричного поля з рівняння (49), а саме - її центрально симетрична складова E_r^{0I}. Розглянемо E_r^{0I}, зазначивши, що електричні поля в об`ємах **I, II** деформівної п`єзоелектричної оболонки – різні, а відмінності E_r^{0I} та E_r^{0II} обумовлені:

- врахування напрямку падіння плоскої хвилі $p_0(r,\varphi_0,\vartheta_0)$ відносно заданої орієнтації груп електродів **I, II**;
- відмінностей в механічних напруженнях під електродними групами **I, II**, які виникають за рахунок дифракції та, відповідно, кутової нерівномірності розподілень тисків p_{Σ} в звукоосвітленій та тіньовій області поверхні сферичної оболонки;
- відмінностей в величинах та знаках складових деформацій поверхні оболонки в межах відповідних електродованих поверхонь;
- можливих відмінностей в геометрії та розташуванні електродів **I, II**, а також типах та величинах їх електричних навантажень Z_H^{I}, Z_H^{II};
- особливостей розподілення електричних характеристик (як то $E_r^{0I}, E_r^{0II}, D_r^{0I}, D_r^{0II}, \Delta\Psi_r^{0I}$, $\Delta\Psi_r^{0II}$) в крайових областях електродів.

Отже, для електроду **I** , залучивши у відповідності до положень [1,2] умову

$$divD_r^{0I}=0, \quad (54)$$

а також відому (наприклад, [9]) форму запису оператора *div* в сферичних координатах, отримаємо:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2D_r^{0I}\right)=0\Rightarrow\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial r}D_r^{0I}+r^2\frac{\partial D_r^{0I}}{\partial r}\right)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow D_r^{0I}=\frac{\mathrm{C}_1^{0}}{r^2}, \quad (55)$$

де C_1^{0} - невідомий коефіцієнт, що також підлягає визначенню.

Виходячи з рівняння (25), враховуючи формули (15), (16), (42), (20) та (33)-(36), для центрально симетричної компоненти D_r^{0I} отримаємо:

$$D_r^{0I}=e_{11}\varepsilon_{rr}^{0}+e_{12}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^{0}+\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^{0}\right)+\chi_{11}^{\varepsilon}E_r^{0I}\Rightarrow$$

$$D_r^{0I}=\frac{2}{R_1}e_{12}^{*}u_r^{0}+\frac{e_{11}}{c_{11}^{E}}p_{\Sigma}^{0}+\chi_{11}^{*}E_r^{0I}, \quad (56)$$

де $e_{12}^{*}=e_{12}-e_{11}\frac{c_{12}^{E}}{c_{11}^{E}}$; $\chi_{11}^{*}=\chi_{11}+\frac{e_{11}}{c_{11}^{E}}$; $p_{\Sigma}^{0}(R_1)$ - відповідає рівнянню (45) (або (46) у випадку використання потенціалу зміщення $\mathrm{H}_{\Sigma}^{0}\left(r,\varphi,\vartheta\right)$).

Отже, підставляючи вираз для тиску (46) в праву, а вираз (55) в ліву частини співвідношення (56), знайдемо напруженість E_r^{0I}:

$$E_r^{0I}=\frac{\mathrm{C}_1^{0}}{\chi_{11}^{*}R_1^2}-\frac{2}{\chi_{11}^{*}R_1}e_{12}^{*}u_r^{0}\left(kR_1\right)-$$
$$-\frac{e_{11}}{\chi_{11}^{*}c_{11}^{E}}p_{\Sigma}^{0}\left(kR_1\right). \quad (57)$$

Далі, підставляючи вираз (57) в (49), позбавляємося E_r^{0I} та маємо три невідомих коефіцієнта: $A^{00}(\tilde{A}^{00})$, u_r^0 і C_1^0. Додамо, що вирази (43), (44), збагачені рівнянням (57), \також можуть бути використані для розрахунків.

У відповідності до [1,2] врахуємо граничну умову по електричному полю, що записана відносно потенціалу електричного поля Ψ_r^{0I}:

$$E_r^{0I} = -\frac{\partial \Psi_r^{0I}}{\partial r}, \tag{58}$$

або для різниці потенціалів $\Delta\Psi_r^{0I}$

$$\Delta\Psi_r^{0I} = \Psi_r^{0I}\Big|_{R0} - \Psi_r^{0I}\Big|_{R1} = U_H^I(t) = U_H^{0I} =$$

$$= -\int\limits_{R0}^{R1} E_r^{0I} dr = -E_r^{0I} h_0 , \tag{59}$$

де $\Psi_r^{0I}\Big|_{r=R1}; \Psi_r^{0I}\Big|_{r=R0}$ - потенціали зовнішнього та внутрішнього електродів групи **I** відповідно.

Так, скажімо, для умови виду (59) напруга $U_H^{0I} = E_r^{0I} h_0$ визначатиметься через різницю потенціалів після інтегрування лівої і правої частини рівності (57) по поточному r (в межах $r = R_1$ або $r = R_0$). Отже, отримаємо:

$$\Psi_r^{0I}\Big|_r = -\frac{C_1^0}{\chi_{11}^* r} \pm C_2^0 +$$
$$+\left(\frac{e_{11}}{\chi_{11}^* c_{11}^E} p_\Sigma^0(kR_1) + \frac{2e_{12}^*}{\chi_{11}^* R_1} u_r^0(kR_1)\right)(R_0 - r). \tag{60}$$

Тобто, при внутрішньому нульовому потенціалі

$$\Psi_r^{0I}\Big|_{r=R_0} = 0 ,$$

матимемо (61)

$$\Psi_r^{0I}\Big|_{r=R0} = -\frac{C_1^0}{\chi_{11}^* r}\Bigg|_{r=R_0} - C_2^0 = 0 .$$

При цьому для зовнішнього кола та, відповідно, для зовнішнього електроду ($r = R_1$), використовуючи центрально симетричний розв`язок (39) та співвідношення для індукції (55) отримаємо:

$$\Psi_r^{0I}\Big|_{r=R1} = U_H^{0I} = I_H^{0I} Z_H^I = -j\omega Q^I Z_H^I = \; .$$

$$= -j\omega 2\pi (R_0 + h_0)^2 D_r^{0I} Z_H^I =$$

$$= -j\omega 4\pi C_1^0 \frac{(R_0 + h_0)^2}{(R_0 + h_0)^2} Z_H^I = -j\omega 4\pi C_1^0 Z_H^I, \tag{62}$$

що показує наявність невідомих коефіцієнтів $C_1^0, C_2^0, A^{00}, \tilde{A}^{00}, \tilde{A}_0^*$ та u_r^0 для відшукання яких необхідно мати систему з шести алгебраїчних рівнянь. Натомість, сформовано навіть шість рівнянь (49), (52), (57), (61), (62), які забезпечують відшукання вказаних невідомих коефіцієнтів.

Вісесиметрична складова розв`язку задачі

Для вісесимтеричного розв`язку зі всіх складових вектору зміщень $\bar{u}$ залишаємо лише радіальну $u_r^n(\vartheta)$ та меридіональну $u_\vartheta^n(\vartheta)$ кутові складові (див. вирази (28)-(30)).

Вказані складові зв'язані між собою співвідношенням:

$$u_\vartheta^n(\vartheta) = \frac{\partial u_r^n(\vartheta)}{\partial \vartheta} \tag{63}$$

та створюють в об'ємі оболонки деформації стиснення-розтягнення $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^n(\vartheta)$. Тож, використовуючи систему рівнянь (15)-(18) для деформацій $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^n(\vartheta)$ та $\varepsilon_{\varphi\varphi}^n(\vartheta)$ маємо

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^n(\vartheta) = \frac{1}{R_1} u_r^n(\vartheta) + \frac{1}{R_1} u_\vartheta^n(\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta ; \tag{64}$$

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^n(\vartheta) = \frac{1}{R_1} u_r^n(\vartheta) + \frac{1}{R_1}\frac{\partial u_\vartheta^n(\vartheta)}{\partial\vartheta} . \tag{65}$$

Зазначеним деформаціям $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^n(\vartheta)$ та $\varepsilon_{\varphi\varphi}^n(\vartheta)$ відповідають механічні напруження $\sigma_{\vartheta\vartheta}^n(\vartheta)$ та $\sigma_{\varphi\varphi}^n(\vartheta)$, а напруженню σ_{rr}^n - рівність виду (19), з використанням вісесиметричних складових рівнянь (3), (4):

$$p_\Sigma^n\Big|_{r=R1}(\vartheta) = \sigma_{rr}^n\Big|_{r=R1}(\vartheta) = -\frac{\lambda}{R_1^2}\left[\tilde{A}_0^*(kR_1)^2\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}\times\right.$$
$$\left.\times j^n(2n+1)J_{n+1/2}(kR_1)P_n(\cos\vartheta_0)\right]P_n(\cos\vartheta) -$$
$$-\frac{\lambda}{R_1^2}\left[\tilde{A}^{n0}(kR_1)^2\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}H_{n+1/2}^{(2)}(kR_1)\times\right. \tag{66}$$
$$\left.\times P_n(\cos\vartheta)\right] = -\frac{\lambda}{R_1^2}\left(\tilde{A}_0^* p_{0n}^* + \tilde{A}^{n0} p_{sn}^*\right)P_n(\cos\vartheta),$$

де

$$p_{0n}^* = j^n(kR_1)^2(2n+1)\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}J_{n+1/2}(kR_1)\times$$
$$\times P_n(\cos\vartheta_0), \tag{67}$$

$$p_{sn}^* = (kR_1)^2\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}H_{n+1/2}^{(2)}(kR_1) . \tag{68}$$

Далі, підставимо вираз (14) для складової деформації ε_{rr}^n в рівняння (9), (10) і для складових механічних напружень $\sigma^n_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)$ та $\sigma^n_{\varphi\varphi}(\vartheta)$, отримаємо:

$$\sigma^n_{\varphi\varphi}(\vartheta)=c^*_{22}\varepsilon^n_{\varphi\varphi}(\vartheta)+c^*_{12}\varepsilon^n_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)-e^*_{12}E^n_r+ +\frac{c^E_{12}}{c^E_{11}}p^n_\Sigma(kR_1)P_n(\cos\vartheta), \quad (69)$$

де $c^*_{12}=c^E_{12}-\frac{(c^E_{12})^2}{c^E_{11}}, c^*_{22}=c^E_{22}-\frac{(c^E_{12})^2}{c^E_{11}}$,

$e^*_{12}=e_{12}-e_{11}\frac{c^E_{12}}{c^E_{11}}$, а

$$\sigma^n_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)=c^*_{12}\varepsilon^n_{\varphi\varphi}(\vartheta)+c^*_{22}\varepsilon^n_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)-e^*_{12}E^n_r+ +\frac{c^E_{12}}{c^E_{11}}p^n_\Sigma(kR_1)P_n(\cos\vartheta). \quad (70)$$

Отримані вирази для складових механічних напружень $\sigma^n_{rr}(\vartheta)$, $\sigma^n_{\varphi\varphi}(\vartheta)$, $\sigma^n_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)$ (66), (69), (70) задовольняють рівнянням коливань, що встановилися та можуть бути знайдені з системи рівнянь (6)-(8) з врахуванням дослідженого напружено-деформівного стану сфери. Тобто, враховуючи, що $\frac{\partial}{\partial\varphi}=0$, маємо:

$$\begin{gathered}\frac{1}{R_1}\left(2\sigma^n_{rr}(\vartheta)-\sigma^n_{\varphi\varphi}(\vartheta)-\sigma^n_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)\right)+ +\rho_M\omega^2u^n_r(\vartheta)=0,\\ \frac{1}{R_1}\frac{\partial\sigma^n_{\vartheta\vartheta}}{\partial\vartheta}+\frac{1}{R_1}\left(\sigma^n_{\varphi\varphi}(\vartheta)-\sigma^n_{\vartheta\vartheta}(\vartheta)\right)\mathrm{ctg}\,\vartheta+ +\rho_M\omega^2u^n_\vartheta(\vartheta)=0.\end{gathered} \quad (71)$$

Підставимо у друге рівняння системи (71) результати (69), (70) та, враховуючи вирази для деформацій (64), (65), а також співвідношення (63) виду

$$u^n_\vartheta(\vartheta)=\frac{\partial u^n_r(\vartheta)}{\partial\vartheta},$$

маємо проміжкові співвідношення

$$c^*_{22}\frac{c^*_{22}}{R_1^2}\Xi^n(\vartheta)+\rho_M\omega^2u^n_\vartheta f^n_\vartheta(\vartheta)= =e^*_{12}E^n_r\frac{\partial E^n_r}{\partial\vartheta}-\frac{c^E_{12}}{c^E_{11}}p^n_\Sigma(kR_1)\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}, \quad (72)$$

де за аналогією з (29)-(32)

$$u^n_\vartheta(\vartheta)=u^n_\vartheta f^n_\vartheta(\vartheta) \text{ та}$$

$$\Xi^n(\vartheta)=u^n_\vartheta\left[\frac{\partial^2 f^n_\vartheta(\vartheta)}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial f^n_\vartheta(\vartheta)}{\partial\vartheta}ctg(\vartheta)+ +f^n_\vartheta(\vartheta)-f^n_\vartheta(\vartheta)ctg^2(\vartheta)\right]. \quad (73)$$

Розглянемо рівняння (72),(73).

Розуміючи, що для аргументу ϑ, справедливою є залежність виду $\cos\vartheta$, яка в свою чергу може бути представлена як $\cos\vartheta=\zeta$, після підстановки $\cos\vartheta=\zeta$ до (73) дістанемо:

$$\begin{gathered}\Xi^n(\vartheta)=\Xi^n(\zeta)=\\ =-u^n_\vartheta\left[\frac{\partial^2 f^n_\vartheta(\zeta)}{\partial\zeta^2}\frac{\left(\zeta^2-1\right)^2}{\zeta^2-1}+2\zeta\frac{\left(\zeta^2-1\right)}{\zeta^2-1}\frac{\partial f^n_\vartheta(\zeta)}{\partial\zeta}-\right.\\ \left.-f^n_\vartheta(\zeta)\frac{1}{\zeta^2-1}-2f^n_\vartheta(\zeta)\frac{\left(\zeta^2-1\right)}{\zeta^2-1}\right]=\\ =-\frac{u^n_\vartheta}{\zeta^2-1}\left[\left(\zeta^2-1\right)^2\frac{\partial^2 f^n_\vartheta(\zeta)}{\partial\zeta^2}+2\zeta\left(\zeta^2-1\right)\frac{\partial f^n_\vartheta(\zeta)}{\partial\zeta}-\right.\\ \left.-f^n_\vartheta(\zeta)-2f^n_\vartheta(\zeta)\left(\zeta^2-1\right)\right].\end{gathered} \quad (74)$$

До результату (74) добавимо та віднімемо член виду

$$n(n+1)\left(\zeta^2-1\right)f^n_\vartheta(\zeta), \quad (75)$$

та отримаємо вираз:

$$\begin{gathered}\Xi^n(\zeta)=\\ =-\frac{u^n_\vartheta}{\zeta^2-1}\left\{\left[\left(\zeta^2-1\right)^2\frac{\partial^2 f^n_\vartheta(\zeta)}{\partial\zeta^2}+2\zeta\left(\zeta^2-1\right)\frac{\partial f^n_\vartheta(\zeta)}{\partial\zeta}-\right.\right.\\ \left.-\left(n(n+1)\left(\zeta^2-1\right)+1\right)f^n_\vartheta(\zeta)\right]-2\left(\zeta^2-1\right)f^n_\vartheta(\zeta)+\\ \left.+n(n+1)\left(\zeta^2-1\right)f^n_\vartheta(\zeta)\right\},\end{gathered} \quad (76)$$

в якому перши три доданки утворюють рівняння типу Лежандра, яке обертається на ноль, якщо

$$\zeta=\cos\vartheta,\ f^n_\vartheta(\vartheta)=\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}. \quad (77)$$

Спираючись на (77), для $\Xi^n(\zeta)=\Xi^n(\vartheta)$,маємо

$$\Xi^n(\vartheta)=u^n_\vartheta(2-n(n+1))\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}, \quad (78)$$

а рівняння (69) при цьому набуває вигляду:

$$u^n_\vartheta\left(2-n(n+1)+(\gamma_\vartheta R_1)^2\right)\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}= =\frac{e^*_{12}}{c^{E*}_{22}}R_1^2\frac{\partial E^n_r}{\partial\vartheta}-\frac{c^E_{12}R_1}{c^E_{11}c^{E*}_{22}}p^n_\Sigma(kR_1)\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}, \quad (79)$$

де $\gamma_\vartheta = \dfrac{\omega}{\sqrt{\dfrac{c_{22}^{E*}}{\rho_M}}}$ - хвильове число коливань стиснення-розтягнення вздовж криволінійної вісі кутів ϑ.

Визначимося з напруженістю E_r^n та похідною $\dfrac{\partial E_r^n}{\partial\vartheta}$.

Відомо [1,2], що для вісесиметричого випадку та за аналогією з центрально симетричним розв'язком - електрична індукція D_r^n може бути записана як:

$$D_r^n = \frac{e_{12}}{c_{11}^E} p_\Sigma^n(kR_1) + e_{12}^*\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^n + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^n\right) + \chi_{11}^* E_r^n, \qquad (80)$$

звідки напруженість E_r^n та її похідну за кутом $\dfrac{\partial E_r^n}{\partial\vartheta}$ подамо відповідними формулами:

$$E_r^n = \frac{D_r^n}{\chi_{11}^*} - \frac{e_{12}}{c_{11}^E\chi_{11}^*} p_\Sigma^n(kR_1) - \frac{e_{12}^*}{\chi_{11}^*}\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^n + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^n\right), \qquad (81)$$

$$\frac{\partial E_r^n}{\partial\vartheta} = \frac{1}{\chi_{11}^*}\frac{\partial D_r^n}{\partial\vartheta} - \frac{e_{12}^*}{\chi_{11}^*}\frac{\partial\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^n + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^n\right)}{\partial\vartheta} - \frac{e_{12}}{c_{11}^E\chi_{11}^*}\frac{\partial p_\Sigma^n(kR_1)}{\partial\vartheta}. \qquad (82)$$

Виконаємо приведення виразу (82) до квазіканонічного вигляду

$$\frac{\partial^2\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta^2} + ctg\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta} + \left(n(n+1) - \frac{m}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta(\vartheta) = 0,$$

розуміючи при цьому, що для вісесиметричного розв`язку $m = 0$.

Для цього застосуємо співвідношення (28) для деформацій $\varepsilon_{\varphi\varphi}^n, \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^n$ та відповідних зміщень, а також прийом щодо введення в проміжкові результати доповнюючих членів виду

$$n(n+1) - n(n+1),$$

після чого дістанемо рівняння:

$$\frac{\partial\left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^n + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}^n\right)}{\partial\vartheta} = \frac{1}{R_1}\left(2 - n(n+1) - \frac{m}{\sin^2\vartheta}\right)u_\vartheta^n(\vartheta),$$

яке існуватиме лише при

$$u_\vartheta^n(\vartheta) = u_\vartheta^n f_\vartheta^n(\vartheta) = u_\vartheta^n\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}.$$

Таким чином, після диференціювання та залучення зазначенного вище прийому щодо приведення проміжкового результату перетворень до доданків, які утворюють рівняння для приєднаних функцій Лежандра в сферичних координатах, а також з врахуванням (77) для похідної $\dfrac{\partial E_r^n}{\partial\vartheta}$ дістанемо:

$$\frac{\partial E_r^n}{\partial\vartheta} = \frac{1}{\chi_{11}^*}\frac{\partial D_r^n}{\partial\vartheta} - \frac{e_{12}^*}{\chi_{11}^*}\frac{1}{R_1}\left(2 - n(n+1) - \frac{m}{\sin^2\vartheta}\right)u_\vartheta^n \times$$
$$\times\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta} - \frac{e_{12}}{c_{11}^E\chi_{11}^*} p_\Sigma^n(kR_1)\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}. \qquad (83)$$

В отриманому рівняння (83) (врахувавши $m = 0$) для визначення члена $\dfrac{\partial D_r^n}{\partial\vartheta}$ використаємо другий доданок рівняння (33) виду $\sum_{n=1}^{\infty} D_r^{nl} P_n(\cos\vartheta)$, де D_r^{nl} відповідає добутку $D_r^{nl}\cdot q_n$ (q_n залучено з умов (38), $n = 2q+1$, $q = 1, 2, 3, \ldots$, а D_r^{nl} - індукція для першої групи електродів).

Отже, враховуючи те, що D_r^n залишається єдиною відмінною від нуля компонентою. вектора D та форму запису оператора div, з видозміненої умови (54)

$$divD_r^n = 0 \qquad (84)$$

для D_r^{nl} маємо:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_r^{nl}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r^2}{\partial r}D_r^{nl} + r^2\frac{\partial D_r^{nl}}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow$$
$${}^{nl}_{r} = \frac{C_1^n}{r^2},\ C_1^n = C_r^{nl} \qquad (85)$$

$$\frac{\partial D_r^{nl}}{\partial\vartheta} = \frac{C_1^n}{r^2} q_n \frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}, \qquad (86)$$

де C_1^n - невідомий коефіцієнт, який також підлягає визначенню.

Для третього доданку правої частини рівняння (82) з врахуванням представлень акустичного поля у вигляді співвідношень (3), (4), (46) маємо:

$$\frac{\partial p_\Sigma^n(kR_1)}{\partial\vartheta} = \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left\{-\frac{\lambda}{R_1^2}\left(kR_1\right)^2\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}\times\right.$$
$$\times\tilde{A}^{n0} H_{n+1/2}^{(2)}\left(kR_1\right) P_n(\cos\vartheta) -$$

$$-\tilde{A}_0^* \frac{\lambda}{R_1^2}\left(kR_1\right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}} j^n (2n+1) \times$$
$$\times J_{n+1/2}\left(kR_1\right) P_n(\cos\vartheta) P_n(\cos\vartheta_0)\Big\}. \qquad (87)$$

З врахуванням (82), (85)-(87) перепишемо співвідношення (79) як проміжковий результат:

$$u_\vartheta^n\left(2-n(n+1)+(\gamma_\vartheta R_1)^2\right)\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta} = \frac{e_{12}^*}{c_{22}^*} R_1^2 \times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\chi_{11}^*}\frac{C_1^n}{r^2} q_n - \frac{e_{12}^*}{\chi_{11}^*}\frac{1}{R_1}(2-n(n+1))u_\vartheta^n - \right.$$
$$\left. -\frac{e_{11}}{\chi_{11}^* c_{11}^E} p_\Sigma^n(kR_1)\right\}\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta} -$$
$$-\frac{c_{12}}{c_{22}^* c_{11}^E} R_1 p_\Sigma^n(kR_1)\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta},$$

в якому скорочуємо праву і ліву частини на множник $\frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}$ і відносно коефіцієнта u_ϑ^n знаходимо:

$$u_\vartheta^n =$$
$$= \frac{\frac{e_{12}^*}{\chi_{11}^* c_{22}^*} R_1^2 \frac{C_1^n}{R_1^2} q_n}{\left(2-n(n+1)+(\gamma_\vartheta R_1)^2\right)+\frac{(e_{12}^*)^2}{c_{22}^*}(2-n(n+1))} -$$
$$-\frac{\left[\frac{e_{11}e_{12}^*}{c_{11}^E \chi_{11}^* c_{22}^*} R_1^2 + \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E c_{22}^*} R_1\right] p_\Sigma^n(kR_1)}{\left(2-n(n+1)+(\gamma_\vartheta R_1)^2\right)+\frac{(e_{12}^*)^2}{c_{22}^*}(2-n(n+1))}, \qquad (88)$$

розуміючи, що $u_\vartheta^n(\vartheta) = u_\vartheta^n f_\vartheta^n(\vartheta)$, та $f_\vartheta^n(\vartheta) = \frac{\partial P_n(\cos\vartheta)}{\partial\vartheta}$) для компоненти вектора u - $u_\vartheta^n(\vartheta)$.

Далі, підставляючи вирази (21), (22) в перше рівняння системи (71), та враховуючи співвідношення (64),(65) для зовнішньої поверхні оболонки

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^n(\vartheta) = \frac{1}{R_1}\left(u_r^n(\vartheta) + u_\vartheta^n(\vartheta)\operatorname{ctg}\vartheta\right); \qquad (90)$$

$$\varepsilon_{\vartheta\vartheta}^n(\vartheta) = \frac{1}{R_1}\left(u_r^n(\vartheta) + \frac{\partial u_\vartheta^n(\vartheta)}{\partial\vartheta}\right), \qquad (91)$$

переходимо до проміжкового результату виду:

$$\frac{2E_r^n}{R_1}e_{12}^* + \frac{2}{R_1}\left(1-\frac{c_{12}^E}{c_{11}^E}\right)p_\Sigma^n(kR_1) -$$
$$-\frac{\left(c_{12}^{E*}+c_{22}^{E*}\right)}{R_1}\mathrm{X}^n(\vartheta) + \rho_M\omega^2 u_r^n(\vartheta) = 0, \qquad (92)$$

де $\mathrm{X}^n(\vartheta) = 2u_r^n(\vartheta) + u_\vartheta^n(\vartheta)ctg(\vartheta) + \frac{\partial u_r^n(\vartheta)}{\partial\vartheta}$, звідки з врахуванням $u_\vartheta^n(\vartheta) = \frac{\partial u_r^n(\vartheta)}{\partial\vartheta}$ маємо

$$\mathrm{X}(\vartheta) = 2u_r^n(\vartheta) + u_\vartheta^n(\vartheta)ctg(\vartheta) + \frac{\partial^2 u_r^n(\vartheta)}{\partial\vartheta^2}. \qquad (93)$$

Приведемо рівняння (93) до канонічного виду $\frac{\partial^2\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta^2} + ctg\vartheta\frac{\partial\Theta(\vartheta)}{\partial\vartheta} + \left(n(n+1)-\frac{m}{\sin^2\vartheta}\right)\Theta(\vartheta) = 0$, розуміючи, що $m=0$, $u_r^n(\vartheta) = u_r^n f_r^n(\vartheta)$, та $f_r^n(\vartheta) = P_n(\cos\vartheta)$). Отже, маємо:

$$\frac{\partial^2 u_r^n(\vartheta)}{\partial\vartheta^2} + ctg\vartheta\frac{\partial u_r^n(\vartheta)}{\partial\vartheta} + 2\left(n(n+1)-n(n+1)+\right.$$
$$\left.+1\right)u_r^n(\vartheta) = \qquad (94)$$
$$= \frac{\partial^2 u_r^n(\vartheta)}{\partial\vartheta^2} + ctg\vartheta\frac{\partial u_r^n(\vartheta)}{\partial\vartheta} + n(n+1)u_r^n(\vartheta) +$$
$$+\left(2-n(n+1)\right)u_r^n(\vartheta).$$

В отриманому виразі (94) сума перших трьох доданків правої частини рівності утворює нуль як рівняння для приєднаних функцій Лежандра в сферичних координатах.

Скориставшись результатами (93), (94), та позначеннями

$$k_0 = 1-\frac{c_{12}^E}{c_{11}^E},\quad Y = c_{12}^* + c_{22}^*,\quad u_\vartheta^n(\vartheta) = u_\vartheta^n f_\vartheta^n(\vartheta),$$

отримаємо рівняння:

$$\frac{2E_r^n}{R_1}e_{12}^* + \frac{2k_0}{R_1}p_\Sigma^n(kR_1)P_n(\cos\vartheta) -$$
$$-\frac{Y}{R_1^2}(2-n(n+1))u_r^n P_n(\cos\vartheta) + \qquad (96)$$
$$+\rho_M\omega^2 u_r^n P_n(\cos\vartheta) = 0,$$

З отриманого вище виразу (93), звертаючись до представлення (81) для напруженості E_r^n, а також виконуючий прийом щодо приведенню частини рівняння до канонічного виду та залучаючи (86), маємо:

$$E_r^n = -\frac{e_{12}^*}{R_1\chi_{11}^*}\left(2-n(n+1)\right)u_r^n P_n(\cos\vartheta) -$$
$$-\frac{e_{11}}{c_{11}^E\chi_{11}^*}p_\Sigma^n(kR_1)P_n(\cos\vartheta)+\frac{C_1^n}{R_1^2\chi_{11}^*}q_n P_n(\cos\vartheta). \quad (97)$$

Після підстановки (97) до (96) дістанемо для радіальної компоненти

$$u_r^n : u_r^n =$$
$$=\frac{\dfrac{e_{12}^*}{\chi_{11}^*}\dfrac{C_1^n}{R_1^2}q_n-\left[k_0-\dfrac{e_{11}e_{12}^*}{c_{11}^E\chi_{11}^*}\right]p_\Sigma^n(kR_1)}{\left((2-n(n+1))\left[\dfrac{(e_{12}^*)^2}{R_1\chi_{11}^*}+\dfrac{Y}{2R_1}\right]-\rho_M\dfrac{R_1}{2}\omega^2\right)}. \quad (98)$$

або, враховуючи $u_r^n(\vartheta)=u_r^n f_r^n(\vartheta)$,

$$u_r^n(\vartheta)=$$
$$=\left\{=\frac{\dfrac{e_{12}^*}{\chi_{11}^*}\dfrac{C_1^n}{R_1^2}q_n-\left[k_0-\dfrac{e_{11}e_{12}^*}{c_{11}^E\chi_{11}^*}\right]p_\Sigma^n(kR_1)}{\left((2-n(n+1))\left[\dfrac{(e_{12}^*)^2}{R_1\chi_{11}^*}+\dfrac{Y}{2R_1}\right]-\rho_M\dfrac{R_1}{2}\omega^2\right)}.\right\}\times$$
$$\times P_n(\cos\vartheta).$$

Знайдемо електричний потенціал, застосовуючи (97) і умову [1,2]

$$E_r^n = -\frac{\partial\Psi^n}{\partial r}. \quad (99)$$

Для цього проінтегруємо ліву і праву частини виразу (97) по радіальній координаті та отимаємо для потенціалу електричного поля Ψ^n:

$$\Psi^n = -\frac{C_1^n}{r\chi_{11}^*}q_n \pm C_2^n + \quad (100)$$
$$+\left[\frac{e_{12}^*}{R_1\chi_{11}^*}(2-n(n+1))u_r^n+\frac{e_{11}}{c_{11}^E\chi_{11}^*}p_\Sigma^n(kr)\right](R_0-r)..$$

Потенціали Ψ^n (100) для внутрішньої та зовнішньої поверхні та різниця потенціалів $\Delta\Psi^n$ мають задовольняти умовам

$$\Delta\Psi^n = U_H = \Psi^n\Big|_{r=R_0} - \Psi^n\Big|_{r=R_0+h_0=R_1}, \quad (101)$$

$$\Psi^n\Big|_{r=R_0}=0, \quad (102)$$

$$\Psi^n\Big|_{r=R_0+h_0} = -j\omega Z_H 2\pi C_1^n q_n. \quad (103)$$

Отже, з (102) дістаємо невідому сталу C_2^n:

$$\Psi^n\Big|_{r=R_0} = -\frac{C_1^n}{R_0\chi_{11}^*}q_n - C_2^n = 0,$$

$$C_2^n = -\frac{C_1^n}{R_0\chi_{11}^*}q_n \quad (104)$$

а напругу на навантаженні електроду I $U_H^{In}=U_H^n$ визначаємо як:

$$\Psi_r^{nI}\Big|_{r=R1} = U_H^{nI} = I_H^{nI}Z_H^I = -j\omega Q^{nI}Z_H^I =$$
$$= -j\omega Z_H^I 2\pi C_1^n q_n =$$
$$= -\frac{C_1^n}{R_1\chi_{11}^*}q_n + C_2^n + \quad (105)$$
$$+\left[\frac{e_{12}^*}{R_1\chi_{11}^*}(2-n(n+1))u_r^n+\frac{e_{11}}{c_{11}^E\chi_{11}^*}p_\Sigma^n(kR_1)\right]h_0.$$

В рівнянні (105) невідомими є коефіцієнти C_1^n, u_r^n, $\tilde{A}^{0n}$ (дивись вираз для $p_\Sigma^n(kR_1)$ (66)) та електрична напруга U_H. В рівнянні (88) невідомими є коефіцієнти C_1^n, $\tilde{A}^{0n}$ та зміщення u_ϑ^n, а в рівнянні (98) коефіцієнти C_1^n, $\tilde{A}^{0n}$ та зміщення u_r^n. Тобто, маємо п'ять невідомих C_1^n, u_r^n, u_ϑ^n, $\tilde{A}^{0n}$, U_H та систему з трьох рівнянь - (88), (98), (105), що вимагає до визначення.

Звернемося до умов спряження кінематичного типу за аналогією з умовами (50)-(53) та поширимо їх на вищі форми коливань n:

$$u_r^n(r,\vartheta)\Big|_{r=R1} = \left[\xi_{r0}^n(r,\vartheta)+\xi_{rs}^n(r,\vartheta)\right]_{r=R1}, \quad (106)$$

де $\xi_{r0}^n(r,\vartheta) = -\dfrac{p_0^* R_1}{\lambda}\xi_{r0}^n(r)\Big|_{r=R1}P_n(\cos\vartheta);$ (107)

$$\xi_{r0}^n(r)\Big|_{r=R1} = -\frac{j^n(2n+1)}{kR_1}\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}\times$$
$$\times\left[-J_{n+1/2}(kR_1)+\frac{n}{kR_1}J_{n+1/2}(kR_1)\right]P_n(\cos\vartheta_0), \quad (108)$$

- це коливальне зміщення часток середовища в падаючій хвилі (вісесиметрична складова), приведене до поверхні сфери;

$$\xi_{rs}^n(r,\vartheta) = -\frac{1}{R_1}\tilde{A}^{0n}\,\xi_{rs}^n(r)\Big|_{r=R_1}P_n(\cos\vartheta); \quad (109)$$

$$\xi_{rs}^n(r)\Big|_{r=R1} = kR_1\sqrt{\frac{\pi}{2kR_1}}\times$$
$$\times\left[-H_{n+1/2}^{(2)}(kR_1)+\frac{n}{kR_1}H_{n+1/2}^{(2)}(kR_1)\right] \quad (110)$$

-вісесиметрична складова радіальної компоненти зміщення, приведена до поверхні сфери, що виникає за рахунок розсіяння.

В рівняння (106) та його складових (107)-(110) невідомими коефіцієнтами є $\tilde{A}_0^*$, $\tilde{A}^{0n}$ та зміщення u_r^n. Отже, рівняння (106) зі складовими (107)-(110) є останнім рівнянням шуканої системи.

Тоді, замикає систему шуканих рівнянь рівняння (103) для електричної напруги U_H.

Таким чином, відшукання невідомих коефіцієнтів забезпечено необхідною кількістю рівнянь, що робить можливим визначення вісесимтеричної складової в розкладеннях акустичних, механічних та електричних полів.

Зазначимо, що подальше об`єднання отриманих результатів для центрально симетричного та вісесиметричного розв'язків привозить до шуканого повного розв`язку задачі.

Зрозуміло, що для отримання рішення задачі для другої групи електродів, необхідно виконати аналогічні дії щодо визначення центрально симетричного та вісесиметричного розв`язкві для електодованої нижньої напівсферичної поверхні **II.**

Висновки

В наскрізній постановці отримано загальний розвязок задачі про прийом звуку електропружним сферичним перетворювачем з роздільним напівсферичним електродуванням в в умовах навантаження груп електродів на довільні автономні електричні опори.

Список використаних джерел

1. *Гринченко В.Т., Улитко А. Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Отв. ред. А.Н. Гузь АН УССР. – К.: Наукова думка, 1989. – Т. 5: Электроупругость. – 280 с.
2. *Петрищев О.Н.* Гармонические колебания пьезокерамических элементов Часть 1. Гармонические колебанияпьезоэлектрических элементов в вакууме и метод резонанса-антирезонанса. Киев:, "АВЕРС" , 2012. -299 с.
3. *Коржик О.В.* Прийом звуку сферичним електропружним перетворювачем з повністю електродованою поверхнею, який розміщено в в замкненому пружному шарі // Электроника и связь. – 2012. – №6. – С. 55-65.
4. *Коржик О.В.* Врахування типу електродування сферичного електропружного перетворювача в наскрізних задачах прийому звуку багатомодовими системамиі // Электроника и связь. – 2013. – №1. – С. 76-88.
5. *Коржик О.В.* До визначення граничних умов в постановках задач прийому звуку сферичним електропружним перетворювачем з розрізними електродами // Электроника и связь. – 2013. – №2. – С. 97-103.
6. *Кандрачук И.В., Коржик А.В., Новак Д.Д., Петрищев О.Н.* Об одном методе расчета частотной характеристике чувствительности сферического пьезокерамического гидрофона// Electronics and communications. – 2014. – №5.(82) – С. 81-87.
7. *Иванов Е.А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах / Иванов Е.А. – Минск. Наука и техника,1968. – 584 с.
8. *Гобсон Е.* Теория сферических и эллептических функций.-М.: Изд. иностр. лит.. 1952. - 476 с.
9. *Анго Андре.* Математика для электро и радиоинженеров. – М.: Наука , 1964. – 772 с.

Поступила в редакцию 22 марта 2014 г.

УДК 534.6

А.В. Коржик, д.-р.тех.наук, **О.Н. Петрищев**, д.-р.тех.наук

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,

ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

Прием звука сферическим электроупругим преобразователем с разрезными электродами (часть 1)

На основе электроупругой модели гидроакустичесого пьезокерамического приемного преобразователя, представленного тонкой сферической пьезокерамической оболочкой с электродированием в виде двух пар полусферических разрезных элетродов, решена в общем сквозная задача о приеме звуковых волн. Библ.9, рис. 2.

Ключевые слова: *гидроэлектроупругость, сферическая оболочка, гидроакустический пьезокерамический преобразователь, сквозная задача, прием звуковых волн, электродирование.*

UDC 534.6

A.V. Korzhyk, Dr.Sc., **O.N. Petrishchev**, Dr.Sc.,
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",
st. Polytechnichna, 16, Kyiv, 03056, Ukraine.

The trunsducing of sound wave by electroelastics piezo - receiver with dissected electrical electrodes (part 1)

On a base of model of electroelastic hydroacoustic transduser-receiver, which representative by thin spherical piezoelectric shell with dissected electrical electrodes, the "through acoustic task" are solved.

The common solution was obtained in conditions of two-couple half-sphere electrodes with independed electric loads. Reference 9, figures 2.

Keywords: *hydroelectroelastic, spherical shell, hydroacoustic piezoceramic transduser, receiving sound waves, dissected electrical electrodes.*

References

1. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F. , Shulga N.A.* (1989), "The mechanics of connecting fields in construction elements": Monograph. Кiyv.: Naukova dumka, Vol. 5: Electroelastics. P. 280. (Rus)
2. *Petrishev O.M.* (2012), "The harmonic vibrations of piezoelectrical elements. Part 1". Kiyv, AVERS, P. 299. (Rus).
3. *Korzhyk O.V.* (2012), "The receiving of sound waves by spherical electroelastic audio transduser with full elec trodical surface in a close-wave multimode based system". Electronics and communications. No 6. Pp. 55-65 (Ukr).
4. *Korzhyk O.V.* (2013), "The accounting of electrodes type on spherical electroelastic audio transduser in "through acoustic reciving task" by multy-mode system". Electronics and communication. No 1. Pp. 76-88 (Ukr).
5. *Korzhyk O.V.* (2013), "To the determination of boundary conditions in "through acoustic reciving task" by spherical electroelastics piezo- receiver with dissected electrical electrodes". Electronics and communication. No 2. Pp. 97-103 (Ukr).
6. *I.V. Kandrathuk, A.V. Korzhyk, D.D. Novak, O.N. Petrishchev*. (2014), "A method for calculating the frequency response characteristics of a spherical piezoceramic hydrophone". Electronics and communications. Vol. 19, No 5(82). Pp. 81-87. (Rus)
7. *Ivanov E.A.* (1968), "Diffraction of electromagnetic waves by two body". Minsk. Nauka I tehnica, P. 584. (Rus).
8. *Gobson E.* (1952), "The theory of spherical and ellipticall functions". M.: Izd.inostr. lit.P. 584. (Rus).
9. *Ango A.* (1964), "Mathematics for electro and radio engineers". M.: Nauka, P. 772. (Rus).