

## Биомедицинские приборы и системы

УДК 534.7

### Порівняльний аналіз математичних моделей равлика

Д. С. Парубочий

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут",  
пр. Перемоги, 37, Київ-56, 03056, Україна.

**Метою даної роботи є формулювання рівнянь для одно-, дво- та тривимірних моделей равлика.**

**В багатьох роботах, що стосуються характеристик слуху людини, вчені торкаються питання нелінійних ефектів слуху та активності/пасивності нашої системи сприйняття звуків. На це питання важко відразу дати обґрунтовану відповідь, тому дана стаття є підготовчим етапом для відповіді на нього. На даному підготовчому етапі будуть сформульовані рівняння для одно-, дво- та тривимірних моделей равлика.**

**Ключові слова:** равлик, базиліарна мембрана, рівняння моделі, геометрія, тиск, точковий імпеданс.

#### Вступ

Вже після 20 років зі створення Георгом фон Бекеші теорії біжучої хвилі, вчені повернулися до дослідження проходження звукової хвилі через слуховий апарат людини. Це пов'язано з нелінійними ефектами, що були отримані в експериментальних даних дослідників.

Найважливішим органом, що відповідає за амплітудно-частотний аналіз слухової системи є равлик. Равлик являється частиною внутрішнього вуха та складається з мембранозних та кісткових лабіринтів, що мають спіралеподібну форму. Равлик має три відділи: сходи переддверря, барабанні та серединні сходи. До структур равлика також відносяться овальне та кругле вікно, що знаходяться в базальній частині равлика, але в різних каналах. Равлик розділений кістковою структурою та базиліарною мембраною (БМ) уздовж усією спіралі на два канали. У верхньому каналі знаходиться сходи переддверря та серединні сходи, а в нижньому барабанні сходи. На верхівці равлика є отвір – гелікотрема, що забезпечує перетікання рідини з одного каналу в інший [5].

Останнім часом багато дослідників приділяють велику увагу вивченню коливання БМ. Це пов'язано з тим, що практично вся механіка, що

відповідає за амплітудно-частотний аналіз в равлику є наслідком коливання БМ. Але лінійні пасивні моделі, що описують коливання БМ, не завжди узгоджуються з експериментальними результатами, тому питання стосовно адекватності використання таких моделей створивши одно-, дво- та тривимірні (1D, 2D та 3D) моделі та обрахувавши їх за допомогою асимптотичного методу – апроксимації Ліувіля-Гріна (ЛГ).

Для побудови математичної моделі равлика важливу роль можуть мати питання форми равлика та врахування роль мембрани Рейснера. Ці питання є достатньо важливими, так як можуть в значній мірі вплинути на модель. Тому потрібно ґрунтовно відповісти на обидва питання.

Помітною особливістю равлика є її спіральна форма, якою в математичних моделях часто нехтують. Є дві основні причини для цього. Перша полягає в тому, що багато вчених вважає, що вплив закрученої форми на механіку базиліарної мембрани малий; друга причина полягає в тому, що рівняння для такого закрученого равлика набагато складніші для розв'язку, ніж для не закрученого.

Очевидно, що закручена структура повинна мати деякі функції, так як вона присутня практично у всіх ссавців [5]. Бекеші (1960) показав, що при розгляді механічних коливань закручена форма не має особливого значення, так як, наприклад, у таких тварин як мурахоїд, равлик має форму лиш злегка зігнутої труби. Спіральна форма, наприклад, може мати функцію ефективного використання наявного в голові ростору, для гарного кровопостачання та розташування нервових закінчень.

Провівши достатньо глибокі дослідження Фіргевей [2] майже через 20 років підтвердив слова Бекеші і його висновки звучать так: закрученість равлика, його спіральна форма, слабо впливає на результати математичної моделі, а тому функцію такої форми відносимо до ефективного використання наявного в голові простору, а також гарного кровопостачання та розміщення нервових закінчень, а саму модель тоді

можна будувати без врахування спіральної форми.

Перейдемо до питання урахування ролі мембрани Рейснера. Багато авторів статей, присвячених математичному моделюванню равлика, не беруть в розрахунок мембрану Рейснера. В кращому випадку пишуть, що її вплив на механіку не значний і тому нею можна знехтувати. В цю проблематику також входить питання відносно рідини в равлику, тобто коли нехтують мембраною Рейснера, то також стверджують, що в равлику є рідина тільки одного виду, хоча насправді це не так. Якщо такі ствердження не спотворять результат, то їх необхідно якось пояснити посилаючись на вже проведені дослідження, а також пояснити навщо в равлику дві рідини, що розділені мембраною Рейснера.

В своїй роботі Дж. Сом'єн [6] розглядав питання: «чи може мікрофонний потенціал рахуватися продуктом рецепторного потенціалу волоскових клітин?» і прийшов до цікавих висновків. Якщо реєструючий електрод вводиться через отвір, що просвердлений в кістковій стінці равлика, то він починає відводити позитивний постійний потенціал, як тільки його кінчик проникне в серединні сходи. В той час як потенціал перилімфи у вестибулярних сходах і в барабанних сходах близький до інших позаклітинних рідин тіла, в ендолімфі він приблизно на 80 мВ вище середнього потенціалу тіла. Це постійний потенціал равлика. У хребетних, що не є ссавцями ендолімфатичний потенціал чи відсутній взагалі, чи незначний. Було показано, що потенціал ендолімфи у вестибулярному органі ссавців коливається від -1 до +4 мВ, тобто він значно нижчий потенціалу равлика. Оскільки ендолімфатичний простір серединних сходів і вестибулярного органа дотикаються між собою, то таке падіння напруги має визвати сильний іонний струм.

Виходячи з цих досліджень можна стверджувати, що мембрана Рейснера була визначена, як така, що не впливає на механіку процесів, що проходять в равлику, і нею можна знехтувати, а відповідно і рідина в равлику буде одна, а не дві. Однак слід врахувати, що таке припущення справедливе тільки для механічних процесів в равлику і ситуація зміниться, якщо будуть розглядатися процеси, що включають в себе електричну складову.

Відповідно до викладеного в подальшому не будемо враховувати спіральну форму равлика та мембрану Рейснера.

Ціллю даної роботи є створення одно-, дво- та тривимірної моделі равлика.

### Тривимірна модель

Описання механіки 1D, 2D та 3D моделей базується на наступній фізичній моделі, показаній на рис. 1.

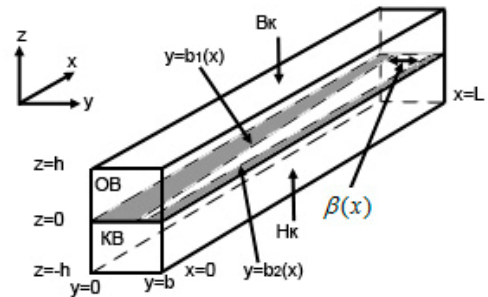


Рис. 1. Фізична модель равлика. Вк та Нк – верхня та нижня камера відповідно; OB та KB – овальне та кругле вікно відповідно.

Лінійну модель равлика представимо у вигляді двох однакових прямокутних каналів, що заповнені нестискуваною, нев'язкою рідиною. Канали розділені кохлеарною перегородкою на площині  $z=0$ . БМ має ширину  $\beta(x)$ ; та займає частину  $\epsilon = \beta / b$  від ширини  $b$  перегородки. Розглядаємо двопараметричне керування системою: компонент  $P$  тиску рідини, що створює біжучу хвилю вздовж БМ, є антисиметричним відносно площини  $z=0$ . Таким чином обмежимося розглядом тільки верхнього каналу.

Завдяки припущенням про рідину, що заповнює модель маємо, що тиск рідини має задовольняє рівнянню для потоку. Запишемо рівняння в наступному вигляді:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

де  $P(x, y, z) = P_{lc}(x, y, -z) - P_{uc}(x, y, z); z > 0$

а  $P_{lc}$  та  $P_{uc}$  це тиски рідини в нижньому та верхньому каналі відповідно.

Задамо граничні умови. Біля кожної стінки похідна від  $P$  являється пропорційною до нормальної складової швидкості рідини. Умова біля основи равлика відповідає швидкості овалного вікна, що керує системою. Похибка, що виникає в при використанні припущення, що швидкість постійна відносно  $y$  та  $z$  є не значною [3]. Виразимо швидкість стремінця для гармонічного коливання:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = 2j\omega\rho A_{st} / bh \quad (3)$$

де  $A_{st}$  це площа основної пластини стремінця.

Біля твердих стінок нормальна складова швидкості рідини дорівнює:

$$\frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0; \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{y=0} = 0; \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{x=b} = 0; \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0. \quad (4)$$

А на кохлеарній перегородці

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = \begin{cases} 2j\omega\rho V(x, y); & b_1(x) < y < b_2(x) \\ 0; & 0 \leq y \leq b_1(x), b_2(x) \leq y \leq b \end{cases} \quad (5)$$

де  $\rho$  густина рідини, а  $V(x, y)$  швидкість БМ, визначена додатною у напрямку вгору.

Так як реальна БМ у стані спокою не має натягу, то в термінології механіки вона скоріше пластина, ніж мембрана. Вона є високо анізотропною у непошкодженому равлику [1] і складається з м'якої основної речовини з поперечними волокнами (тобто в напрямку  $y$ ). Рівняння пластини для такої структури має вид [7]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \nu D \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) + \\ & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( (D + D_f) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \nu D \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + \\ & + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) - \rho_p \omega^2 H V = \\ & = j\omega P(x, y, 0), \quad b_1(x) < y < b_2(x) \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\rho_p$  – постійна густина структури,  $H$  – товщина пластини,  $D$  – згинальна жорсткість основної речовини (що є ізотропною),  $D_f$  – згинальна жорсткість волокон,  $\nu$  – Пойзонівська константа гнучкості для основної речовини. Величини  $H$ ,  $D$  та  $D_f$  – комплексні величини, як в'язко гнучкі характеристики БМ. Припускаємо, що БМ складається матеріалу Кельвіна – найпростішого в'язко-гнучкого матеріалу серед твердих речовин. Це вказує на те, що обидва  $D$  та  $D_f$  мають форму  $D_1 + j\omega D_2$ , з реальними величинами для  $D_1$  та  $D_2$ .

Уточнення граничних умов для рівняння (6): відхилення та згинальні моменти на довгих границях БМ рівні нулю:

$$V = 0, \frac{\partial^2 V}{\partial n^2} = 0, \text{ при } y = b_1(x), y = b_2(x) \quad (7)$$

Рівняння (1)-(7) описують об'ємний потік рідини та рух БМ в моделі на рис.1. Описи відповідних 2D та 1D моделей можуть бути отримані усередненням тиску по ширині каналу та по по

перечному перерізу каналу відповідно:

$$P_{2D}(x, z) = b^{-1} \int_0^b P(x, y, z) dy \quad (8)$$

$$P_{1D}(x, z) = h^{-1} \int_0^h P^{2D}(x, z) dz \quad (9)$$

Таким чином, в рівнянні (9) вперше було враховано поздовжній зв'язок у вигляді згинальної жорсткості волокон  $D_f$ . Нехтуючи цією складовою можна отримати 2D та 1D модель равлика.

Дуже важливим висновком є те, що отримані рівняння дають можливість зв'язати між собою коливання стремінця та коливання БМ, тобто коливання середнього та внутрішнього вуха.

### Рівняння одно- та двовимірних моделей

1D та 2D моделі являються аналогами найпростішої 3D моделі, коли БМ не має поздовжнього зв'язку ( $|D| \ll |D_f|$ ). Тоді рівняння (6) приймає вигляд:

$$\begin{aligned} & D_f(x) \frac{\partial^4 V(x, y)}{\partial y^4} - \rho_p \omega^2 H(x) V(x, y) = \\ & = j\omega P(x, y, 0), \quad b_1 < y < b_2 \end{aligned} \quad (10)$$

Зроблене припущення  $|D| \ll |D_f|$  перетворило в'язко-гнучку пластину в систему паралельних в'язко-гнучких балок.

Рівняння (10) описує представлення БМ серією паралельних в'язко-пружних балок. Граничні умови для величин, що містяться в рівнянні (10) мають вид:

$$\begin{aligned} & V(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) \sin \{k\pi(y - b_1) / \beta\}, \\ & b_1 < y < b_2 \end{aligned} \quad (11)$$

Рівняння (11), що монотонно сходяться по швидкості на цьому інтервалі, і коефіцієнти  $V_k$  отримуються з виразу

$$V_k(x) = \frac{2}{\beta} \int_{b_1}^{b_2} V(x, y) \sin \{k\pi(y - b_1) / \beta\} dy \quad (12)$$

Різницю тисків  $P(x, y, 0)$  «розтягнемо» по всій ширині БМ:

$$\begin{aligned} & P(x, y, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x) \sin \{k\pi(y - b_1) / \beta\}, \\ & b_1 < y < b_2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$P_k(x) = \frac{2}{\beta} \int_{b_1}^{b_2} P(x, y, 0) \sin\{k\pi(y - b_1) / \beta\} dy \quad (14)$$

Підставимо вирази (11) та (13) в рівняння (10) та отримуємо:

$$V_k(x) = \frac{j\omega P_k}{(k\pi / \beta)^4 D_f - \rho_p \omega^2 H} \quad (15)$$

Рівняння (11) та (15) дають розв'язок для  $V(x, y)$ . Об'єднуючи його з рівнянням (5) отримуємо:

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=0} = \begin{cases} -2\rho\omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \sin\{k\pi(y - b_1) / \beta\}}{(k\pi / \beta)^4 D_f - \rho_p \omega^2 H}; & b_1 < y < b_2 \\ 0; & 0 \leq y \leq b_1, b_2 \leq y \leq b. \end{cases} \quad (16)$$

Тепер БМ представлена системою паралельних в'язко-гнучких балок, коливання яких описуються рівняннями (1)-(4) та (16) має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_{2D}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_{2D}}{\partial z^2} &= 0; \quad \frac{\partial P_{2D}}{\partial x} \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{2j\omega\rho A_{st}}{bh}; \quad \frac{\partial P_{2D}}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0; \quad \frac{\partial P_{2D}}{\partial z} \Big|_{x=h} = 0; \\ \frac{\partial P_{2D}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -\frac{16\rho\omega^2 \beta P^{2D}}{\pi^2 b} \times \\ &\times \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \{(k\pi / \beta)^4 D_f - \rho_p \omega^2 H\}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Використовуючи рівняння (9) отримуємо одновимірну модель:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{1D}}{\partial x^2} &= -\frac{16\rho\omega^2 \beta P_{1D}}{\pi^2 bh} \times \\ &\times \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k^2 \{(k\pi / \beta)^4 D_f - \rho_p \omega^2 H\}}; \\ \frac{\partial P_{1D}}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 2j\omega\rho A_{st} / bh; \quad \frac{\partial P_{1D}}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Імпеданс БМ може бути отриманий з моделі паралельних балок. Збіжність ряду (11) по швидкості  $V(x, y)$  дуже добра. Тоді отримуємо:

$$V(x, y) = V_1(x) \sin\{\pi(y - b_1) / \beta\} \quad (19)$$

Цей результат значить, що будь-яке розподілення тиску по ширині призводить до пів синусоїдальної форми розподілу швидкості.

Надалі охарактеризовуючи поведінку БМ функцією точкового імпедансу, необхідно замінити справжній тиск  $P(x, y, 0)$  на пів синусоїдний розподіл, що забезпечить таку саму швидкість. Це перша складова перетворення Фурье в рівнянні (13). Таким чином акустичний імпеданс БМ має вид:

$$\begin{aligned} Z(x) &= \frac{P_1(x)}{V_1(x)} = \\ &= \frac{2}{\beta V_1} \int_{b_1}^{b_2} P(x, y, 0) \sin\{\pi(y - b_1) / \beta\} dy \end{aligned} \quad (20)$$

Відношення між  $Z(x)$  та параметрами балки знайдені з рівняння (15) для  $k=1$ :

$$Z = \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^4 \frac{D_f}{j\omega} + j\omega\rho_p H \quad (21)$$

Імпеданси для 2D та 1D аналогів моделі паралельних балок стають такими:

$$\frac{\partial P_{2D}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{16j\omega\rho\beta P_{2D}}{\pi^2 bZ}; \quad \frac{d^2 P_{1D}}{dx^2} = \frac{16j\omega\rho\beta P_{1D}}{\pi^2 bhZ}. \quad (22)$$

Рисунок 2. Показує 2D та 1D аналоги моделі паралельних балок в термінах імпедансу БМ.

2D модель є найвигіднішою з трьох розглянутих, так як має високу точність, у порівнянні з 1D моделлю, та набагато простіша для числових методів обчислення (3D модель у цьому сенсі значно складніша). Використання 1D моделі може бути корисним для швидких оціночних підрахунків.

а

б

Рис. 2. (а) Двовимірна модель БМ без поздовжніх зв'язків (б) Одновимірна модель БМ без поздовжніх зв'язків.

### Обговорення та подальша робота

В даній роботі були отримані рівняння для 3D, 2D та 1D моделі равлика та проведено їх порівняльний аналіз.

Отримані рівняння для тривимірної моделі і використання припущення, що у БМ поздовжній зв'язок буде настільки малим у порівнянні з поперечним, що ним можна знехтувати, за рахунок чого були отримані рівняння для дво- та одновимірної моделі равлика. Далі для розрахунків будемо використовувати двовимірну модель через відносну її простоту при розрахунках та достатньо високу точність.

### Висновки

В роботі розглянуті питання ролі форми равлика і роль мембрани Рейснера, що стосуються постановки задачі для побудови математичної моделі равлика людини.

Спіральна форма равлика слабо впливає на результати математичної моделі, тому функцію такої форми відносимо до ефективного використання наявного в голові простору, а також гарного кровопостачання та розміщення нервових закінчень. Таким чином, спіральною формою равлика можна знехтувати.

Роль мембрани Рейснера була визначена, як така, що не впливає на механіку процесів, що проходять в равлику, і нею можна знехтувати, а

відповідно і рідина в равлику буде одна, а не дві.

Вперше в роботі для тривимірної моделі було враховано поздовжній зв'язок у вигляді згинальної жорсткості волокон  $D_f$ . Нехтуючи цією складовою були отримані дво- та одновимірні моделі равлика.

Використання двовимірної моделі для побудови математичних моделей равлика є найвигіднішим через її високу точність, у порівнянні з одновимірною моделлю, та простоту обчислення у порівнянні з тривимірною моделлю. Однак, варто зауважити, що використання одновимірної моделі є корисним за необхідності швидких оціночних розрахунків.

### Список литературы

1. *Iurato, S.* Functional implications of the nature and submicroscopic structure of the tectorial and basilar membranes, *JASA*, 1962 vol 34 N09 P02 p 1386-1395.
2. *Max A. Viergever* Basilar membrane motion in a spiral-shaped cochlea, *JASA*, 1978 vol 64 N04 p 1048-1053.
3. *Max A. Viergever*, *Mechanics of inner ear – A mathematical approach*. Doctoral dissertation, Delft University of Technology. – Delft: Delft University Press, 1980. – 174 p.
4. *Steele, C.R. and Taber, L.A.* Comparison of WKB calculations and experimental results for

- three-dimensional cochlear models, JASA, 1979 vol 65 N04 p 1007-1018.
5. *Альтман Я.А., Таварткиладзе Г.А.* Руководство по аудиологии. – М.: ДМК Пресс, 2003. – 360 с.
6. *Тимошенко П., Войновский-Кригер С.* Пластики и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

УДК 534.7

## Сравнительный анализ математических моделей улитки

**Д.С. Парубочий**

Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”,  
пр. Победы, 37, Киев-56, 03056, Украина.

**В работе рассмотрены вопросы роли формы улитки и роли мембраны Рейснера, которые касаются постановки задачи для построения математической модели улитки человека. Впервые в работе для трёхмерной модели была учтена продольная связь в виде сгибающей жесткости волокон. Библ. 7, рис. 2.**

**Ключевые слова:** улитка, базилярная мембрана, уравнение модели, геометрия, давление, точечный импеданс.

## A comparative analysis of mathematical models of the cochlea

**D. Parubochyi**

National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”,  
pr. Peremogy, 37, Kyiv-56, 03056, Ukraine.

**The article describes the role of the shape of the cochlea and the role of the Reissner’s membrane, that are relating to formulation of the problem of constructing a mathematical model of human cochlea. For the first time in a three-dimensional model was included the longitudinal coupling in form of elastic stiffness of fibers. Reference 7, figures 2.**

**Key words:** cochlear, basilar membrane, model’s equation, geometry, pressure, point-impedance.

1. *Iurato S.* Functional implications of the nature and submicroscopic structure of the tectorial and basilar membranes, JASA, 1962 vol 34 N09 P02 p 1386-1395.
2. *Viergever Max A.* Basilar membrane motion in a spiral-shaped cochlea, JASA, 1978 vol 64 N04 p 1048-1053.
3. *Viergever Max A.* Mechanics of inner ear – A mathematical approach. Doctoral dissertation, Delft University of Technology. – Delft: Delft University Press, 1980. – 174 p.
4. *Steele C.R. and Taber L.A.* Comparison of WKB calculations and experimental results for three-dimensional cochlear models, JASA, 1979 vol 65 N04 p 1007-1018.
5. *Altman J.A., Tavartkiladze G.A.* Guidelines for audiology. - M.: ДМК Пресс, 2003. - 360 p. (Rus)
6. *Somen J.* Coding of sensory information in the mammalian nervous system / per. from English. NY Alekseenko / under. Ed. and with a foreword by Dr. biol. Science N.E. Sokolov. – Moscow.: Mir, 1975. - 418 p. (Rus)
7. *Timoshenko S.P., Voynovsky-Krieger S.* Plates and shells. - Moscow: Nauka, 1966. - 636 p. (Rus)

Поступила в редакцию 22 ноября 2012 г.