

УДК 534.8

Метод симметрий при колебаниях круговых пластинок переменной толщины

К.А. Трапезон, канд. техн. наук

Национальный технический университет Украины «КПИ»,
пр. Победы, 37, Киев-56, 03056, Украина

Решена задача о колебаниях круглой пластинки линейно-переменной толщины методом симметрий. Приведены частотные уравнения и уравнения форм собственных колебаний. Выполнен анализ напряженно-деформированного состояния пластинки переменной толщины. Предложена схема оценки долговечности и эксплуатационного ресурса пластинки при ее возможном использовании в качестве активного акустического элемента резонансных устройств. Библ. 7, рис. 5, табл. 1.

Ключевые слова: симметрия, колебания, пластинка, переменная толщина, уравнение частот, форма колебаний, резонанс.

Введение

Стержневые, балочные, пластинчатые и оболочные элементы колебательных систем широко используются в акустике и ультразвуковой акустике в качестве волноводов, активных переходных звеньев или технологических рабочих объектов. Для целесообразного проектирования акустических элементов необходимо располагать результатами расчета их колебаний, в первую очередь при резонансных режимах. Последнее обстоятельство требует изучения их собственных колебаний. Задача о колебаниях круговых пластинок переменной толщины является не только одной из актуальных задач прикладной акустики, но является одной из важнейших в технической теории упругости. Многие вопросы, связанные с проектированием круглых фундаментных плит, турбинных дисков, гибких соединений валов, лопастей гидромашин, дисковых пружин и др., увязаны с расчетом круглых пластинок переменной толщины. Если толщина пластинки убывает при увеличении расстояния от центра, то ее условно относят к “дисковому” типу, если толщина увеличивается – к “диафрагменному”. В работе рассматриваются “дисковые” пластинки, поскольку этот случай в отличие от пластинок “диафрагменных” исследо-

ван совершенно недостаточно [2]. Возможная причина – в аналитических затруднениях при решении соответствующих дифференциальных уравнений, вследствие чего приходится прибегать к приближенным вычислениям с использованием асимптотических интегралов исходного уравнения в виде балочных функций или при помощи метода Релея [2]. В монографии [3] рассмотрен случай пластинки линейно-переменной толщины, основное решение для которой получено в гипергеометрических функциях, т.е. по существу методом рядов. Последний метод, как известно [4], для задач на собственные значения IV порядка, к классу которых принадлежит задача о пластинке, не всегда достаточно эффективен и сопряжен со значительными затратами времени из-за технических и вычислительных затруднений. По-видимому, именно по этой причине автор [3] ограничился вычислением только основной собственной частотой пластинки линейно-переменной толщины.

Цель работы

Применительно к задаче о колебаниях “дисковых” пластинок обосновать эффективность ее решения методом симметрий, разработанным ранее для задач на собственные значения второго порядка [7]. В качестве характерного примера решить задачу для пластинки линейно-переменной толщины и сравнить результаты с полученными в работе [3] методом рядов. Представить алгоритм применения метода и для иных возможных случаев изменения толщины. При помощи полученного решения выполнить анализ напряженно-деформированного состояния пластинки и на его основе предложить схему оценки ее долговечности при резонансных колебаниях в составе некоторых ультразвуковых устройств, что представляет практический интерес для обеспечения их эксплуатационного ресурса.

Дифференциальное уравнение и его анализ

Уравнение собственных колебаний одно-

родной пластинки (волновое уравнение) в полярных координатах r, θ имеет вид [1]

$$\Delta(D\Delta W) - (1-\nu)[\Delta_1\Delta_1(D\Delta_2\Delta_2W) + \Delta_2\Delta_2(D\Delta_1\Delta_1W) - 2\Delta_1\Delta_2(D\Delta_1\Delta_2W)] + \frac{\gamma h}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad \Delta_1 = \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad \Delta_2 = \frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$W = W(r, \theta, t)$ – перемещение пластинки в срединной плоскости; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость; $h = h_0H(r, \theta)$ – толщина пластинки; ν, E, γ – соответственно коэффициент Пуассона, модуль упругости и удельный вес материала пластинки; g – ускорение силы тяжести.

Если рассматривать круглую пластинку, у которой толщина изменяется осесимметрично, т.е. $h = H_0 \cdot H(r)$ и если такая пластинка совер-

шает только осесимметричные колебания $W = W(r, t)$, то полагая $W = W(r) \cos \omega t$ ($\omega = 2\pi f$ – круговая частота собственных колебаний; f – линейная частота) и перейдя к относительной переменной $\rho = \frac{r}{R}$

(R – радиус пластинки), получим вместо волнового уравнения (1) уравнение форм колебаний для пластинки с относительной толщиной

$$h^* = \frac{h}{R} = H_0H(\rho) \text{ в виде}$$

$$H^2W^{(4)} + 2 \frac{(\rho H^3)'}{\rho H} W''' + \left[\frac{(H^3)'}{H} + \frac{(H^{6+3\nu})'}{H^{4+3\nu}} \right] W'' + \frac{[(H^{3\nu})' \rho] \rho H^{3-3\nu}}{\rho H} W' - \lambda^4 W = 0, \quad (2)$$

где $W = W(\rho)$ – функция прогибов (перемещений); $H = H(\rho)$ – безразмерный аналог толщи-

$$\lambda^2 = \frac{\omega R^2}{H_0} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\gamma}{gE}}.$$

Получить замкнутое решение уравнения (2) в общем случае изменения $H(\rho)$ не представляется возможным, однако приблизиться к решению этой проблемы для отдельных $H(\rho)$ позволяет метод факторизации, согласно которому уравнение четвертого порядка (2) можно разложить на два уравнения второго порядка. Если уравнение (2) представить в виде

$$\left(A \frac{d^2}{d\rho^2} + B \frac{d}{d\rho} + C \right)^2 W - D^4 W = 0, \quad (3)$$

где $A = A(\rho)$; $B = B(\rho)$; $C = C(\rho)$; $D^4 = \text{const}$, то получим следующие два уравнения

$$AW_j'' + BW_j' + CW_j \pm D^2W_j = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (4)$$

сумма решений которых дает решение исходного уравнения (2), т.е. $W = W_{j=1} + W_{j=2}$. После раскрытия (3) и сопоставления образованных

функций при $W^{(4)}, W''', W'', W', W$ с соответствующими функциями исходного уравнения (2) получим следующие выражения для A, B, C, D

$$A = H; \quad B = 2H' + \frac{H}{\rho}; \quad C = (3\nu - 1) \frac{H'}{2\rho} - H''; \quad D^4 = \lambda^4 + \mu^4; \quad \mu^4 = \text{const}. \quad (5)$$

При этом получим также условие, в виде нелинейного уравнения

$$AC'' + BC' + C^2 = \mu^4, \quad (6)$$

ограничивающего значения $H(\rho)$, входящих в выражения для A, B, C . Очевидное решение этого уравнения

$$C = \pm \mu^2 = \text{const},$$

приводит согласно (5) к возможности определения $H(\rho)$ из уравнения

$$H'' - \frac{(3\nu - 1)H'}{2\rho} \pm \mu^2 = 0.$$

Его решение в качестве общего выражения для $H(\rho)$ имеет вид

$$H = a\rho^2 + b\rho^{q+1} + c, \quad (7)$$

где $a = \frac{\pm \mu^2}{2(q-1)}$, b, c – постоянные; $q = (3\nu - 1)/2$.

Если $\nu = 1/3$, что справедливо для большинства металлов, то в этом случае $q = 0$ и поэтому выражение (7) принимает вид квадратного трехчлена

$$H = a\rho^2 + b\rho + c. \quad (8)$$

В зависимости от значений постоянных a, b, c в выражениях (7) или (8) строятся профили пластинки, относящиеся к “дисковому” или “диафрагменному” типу.

Уравнения (4) с учетом (5) и (8) запишутся в виде

$$\left(a\rho^2 + b\rho + c\right)W_j'' + \left(5a\rho + 3b + \frac{c}{\rho}\right)W_j' + \left(k_j^*\right)^2 W_j = 0, \quad (9)$$

где $a = \pm \mu^2/2$; $\left(k_j^*\right)^2 = -2a + \lambda_j$ ($j = 1, 2$);

$$\lambda_{j=1} = -\sqrt{\lambda^4 + 4a^2}; \quad \lambda_{j=2} = \sqrt{\lambda^4 + 4a^2}.$$

Известны решения уравнений (5) и задачи в целом для “диафрагменных” пластин с толщинами $H = \rho^2$; ρ , а также для $H = \rho^{q+1}$ при отдельных $q+1 > 0$, не выходящих за пределы $\frac{1}{4} \geq q > -\frac{1}{2}$, диктуемых реальными пределами физической постоянной ν , лежащей в пределах $\frac{1}{2} \geq \nu \geq 0$. Информация о таких решениях содержится в источниках [2,3]. Для “дисковой” пластинки с толщиной типа $H = b\rho + c$ решение было найдено в рядах только при $c = -b$ и только для первой формы колебаний [3]. Решений для иных случаев, например, для пластинки толщиной $H = a\rho^2 + c$, в литературе пока не обнаружено.

Схема применения метода симметрий для разрешающих дифференциальных уравнений

Уравнение (9), переписанное в общем виде (индекс j опускаем)

$$W'' + \frac{(H^2\rho)}{H^2\rho} W' + \frac{(k_*)^2}{H} W = 0, \quad (10)$$

где $k_*^2 = \mu^2 \pm \sqrt{\lambda^4 + \mu^4}$, преобразуем путем замены переменной $\rho = \rho(x)$ к виду

$$W_{xx} + \frac{F_x}{F} W_x + k^2 W = 0, \quad (11)$$

где $W_x = \frac{dW}{dx}$, $W_{xx} = \frac{d^2W}{dx^2}$, $k^2 = \text{const}$.

Математическая структура уравнения (11) полностью соответствует структуре уравнения форм продольных или крутильных колебаний стержня переменного поперечного сечения площадью $F(x)$, решения которого можно построить методом симметрий [7].

Уравнение (10), выраженное через переменную $x(\rho)$, будет иметь вид

$$x_\rho^2 W_{xx} + \left(x_{\rho\rho} + \frac{(H^2\rho)\rho}{H^2\rho} x_\rho\right) W_x + \frac{k_*^2}{H} W = 0. \quad (12)$$

Требуем, чтобы $x_\rho^2 = \left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2 = \frac{C_1^2}{H}$, т.е.

$$x = C_1 \int \frac{d\rho}{\sqrt{H}} + C_2. \quad (13)$$

где, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Выражение при W_x в уравнении (12), деленное на x_ρ^2 , преобразуем к виду F_x/F , т.е.

$$\frac{F_x}{F} = \frac{1}{x_\rho} \left(x_{\rho\rho} + \frac{(H^2\rho)\rho}{H^2\rho} x_\rho \right) = \frac{(x_\rho H^2 \rho)_x}{(x_\rho H^2 \rho)},$$

откуда следует $F = \rho H^2 x_\rho = C_1 \rho H^{3/2}$. В функции F толщина H соответствует выражению (8), в котором постоянные a, b, c необходимо выбирать в зависимости от требуемого профиля пластинки.

Рассмотрим случай $H = 1 - \rho$, при котором толщина $h = H_0 H$ (рис.1) линейно убывает от центра пластинки ($\rho = 0$) до ее края ($\rho = 1$). Здесь $a = 0$, $\mu = 0$, поэтому частотный коэффициент k_*^2 уравнения (10) будет $k_*^2 = \lambda^2$, а коэффициент $k^2 = \lambda^2/C_1^2$.

Согласно

$$x = C_1 \int \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho}} + C_2 = -2C_1 \sqrt{1-\rho} + C_2, \quad \text{т.е.}$$

$$\rho = 1 - \frac{(x - C_2)^2}{4C_1^2}.$$

Если положить $2C_1 = C_2 = 1$, то из приведенных соотношений получим

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 - \sqrt{1 - \rho}; \\ \rho &= 1 - (x - 1)^2 = 1 - (1 - x)^2; \\ F &= F_0 \left[(1 - x)^3 - (1 - x)^5 \right]; \\ k^2 &= 4\lambda^2 = \frac{4\omega^2 R^2}{H_0} \sqrt{\frac{12(1 - \nu^2) \gamma}{gE}}; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где F_0 – произвольно выбираемый коэффициент, поскольку F_x / F при этом не изменяется. Естественным границам переменной $\rho = 0 \div 1$ при данном выборе произвольных постоянных C_1 и C_2 будут соответствовать границы переменной $x = 0 \div 1$, т.е. $\rho \geq 0$ и $x \geq 0$ при любых ρ и x , не выходящих за отмеченные пределы.

Таким образом, надо решить систему дифференциальных уравнений

$$W_{xx} + 2 \frac{D_{1x}}{D_1} W_x \pm k^2 W = 0, \quad (15)$$

в которых частотный параметр k^2 , переменная $x(\rho)$ и

$$D_1 = \sqrt{F} = D_{01} \sqrt{(1 - x)^3 - (1 - x)^5} \quad (16)$$

соответствуют выражениям (14).

Поскольку уравнения (15) при данном $D_1(x)$ не разрешимы в элементарных функциях, найдем их решения приближенным способом, используя метод симметрий. Для этого надо $D_1(x)$ аппроксимировать функцией, при которой решения уравнений (15) можно получить в замкнутом виде.

В качестве аппроксимирующей выберем функцию

$$D = D^* \frac{2n \sin nt}{nt - \sin nt \cos nt + C^*}, \quad (17)$$

где $t = x - 1$; (D^*, C^*, n) – произвольные постоянные, выбираемые при аппроксимации. Функция (17) построена по специальному правилу метода симметрий, а именно:

$$D = \frac{D_0}{V}, \text{ где } V = \int D_0^2 dx + C^*; D_0 = \sin nt.$$

Общее решение уравнения форм осесимметричных колебаний IV порядка, которое сведено к двум уравнениям II порядка (15)

$$W_1'' + 2 \frac{D'}{D} W_1' + k^2 W_1 = 0;$$

$$W_2'' + 2 \frac{D'}{D} W_2' - k^2 W_2 = 0, \quad (18)$$

равно сумме решений этих уравнений, т.е. $W = W_1 + W_2$. Точное решение первого из уравнений (18) для принятой функции (17) согласно методу симметрий запишется в виде

$$W_1 = - \left(k^2 V W_{01} + V W_{01}' \right), \quad (19)$$

где

$$W_{01} = \frac{A_1 \sin \beta t + B_1 \cos \beta t}{\sin nt};$$

$$W_{01}' = - \frac{n \cos nt}{\sin^2 nt} (A_1 \sin \beta t + B_1 \cos \beta t) + \frac{\beta}{\sin nt} (A_1 \cos \beta t - B_1 \sin \beta t).$$

Решение второго из уравнений (18) –

$$W_2 = k^2 V W_{02} - V W_{02}', \quad (20)$$

где

$$W_{02} = \frac{A_2 \text{sh} \alpha t + B_2 \text{ch} \alpha t}{\sin nt};$$

$$W_{02}' = - \frac{n \cos nt}{\sin^2 nt} (A_2 \text{sh} \alpha t + B_2 \text{ch} \alpha t) + \frac{\alpha}{\sin nt} (A_2 \text{ch} \alpha t + B_2 \text{sh} \alpha t).$$

Здесь и выше A_1, B_1, A_2, B_2 – постоянные; $\beta = \sqrt{k^2 + n^2}$; $\alpha = \sqrt{k^2 - n^2}$. Развернутые выражения (19) и (20) имеют вид

$$W_1 = A_1 \left[\left(D_0' - \frac{k^2 V}{D_0} \right) \sin \beta t - \beta D_0 \cos \beta t \right] + B_1 \left[\left(D_0' - \frac{k^2 V}{D_0} \right) \cos \beta t + \beta D_0 \sin \beta t \right];$$

$$W_2 = A_2 \left[\left(D_0' + \frac{k^2 V}{D_0} \right) \text{sh} \alpha t - \alpha D_0 \text{ch} \alpha t \right] + B_2 \left[\left(D_0' + \frac{k^2 V}{D_0} \right) \text{ch} \alpha t - \alpha D_0 \text{sh} \alpha t \right],$$

а общее решение $W = W_1 + W_2$ соответственно

$$\begin{aligned} W &= A_2 (\phi \text{sh} \alpha t - \alpha D_0 \text{ch} \alpha t) + \\ &+ B_2 (\phi \text{ch} \alpha t - \alpha D_0 \text{sh} \alpha t) - \\ &- A_1 (\phi_1 \sin \beta t + \beta D_0 \cos \beta t) - \\ &- B_1 (\phi_1 \cos \beta t - \beta D_0 \sin \beta t), \end{aligned} \quad (21)$$

где введены обозначения

$$\varphi = \frac{k^2 V}{D_0} + D_0'; \quad \varphi_1 = \frac{k^2 V}{D_0} - D_0';$$

$$V = \frac{nt - \sin nt \cos nt + C^*}{2n}.$$

После внесения (21) в граничные условия из системы четырех уравнений относительно постоянных A_i, B_i ($i = 1, 2$) получим частотное уравнение, из которого вычисляются собственные частоты (числа k_i), располагая которыми можно построить собственные формы осесимметричных колебаний пластинки.

Пример расчета пластинки линейно-переменной толщины и его анализ

Рассмотрим осесимметричные колебания пластинки, жестко закрепленной по внутренней контуру при $\rho_1 = 0,1$ и со свободным краем при $\rho_2 = 0,5$ (рис.1).

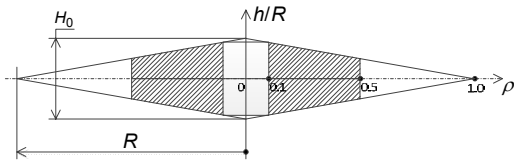


Рис.1. К расчету пластинки

Переходя к переменным x и $t = x - 1$, согласно (14) получим, что в данном случае граничными значениями $\rho_1 = 0,1$ и $\rho_2 = 0,5$, будут соответствовать $x_1 = 0,0513$, $x_2 = 0,293$ или $t_1 = -0,9487$, $t_2 = -0,7071$.

При жесткой заделке контура ($\rho = \rho_1$) пластинки прогибы и углы поворота равны нулю, а для свободного края ($\rho = \rho_2$) при осесимметричном деформировании изгибающие моменты M_r и перерезывающие силы Q_r равны нулю, поэтому граничные условия будут иметь вид [6]

$$(W)_{\rho=\rho_1} = \left(\frac{dW}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_1} = 0.$$

$$(M_r)_{\rho=\rho_2} = -D \left[\frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dW}{d\rho} \right]_{\rho=\rho_2} = 0;$$

$$(Q_r)_{\rho=\rho_2} = -D \left[\frac{d^3 W}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 W}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dW}{d\rho} \right]_{\rho=\rho_2} = 0,$$

где $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость. После перехода к переменной t граничные условия при $\nu = 1/3$ могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} W(t_1) = W_t(t_1) = 0 \\ \left[W_{tt} - \frac{3-t^2}{3t(1-t^2)} W_t \right]_{t_2} = \left[W_{ttt} - \frac{2}{3} \frac{3+5t^2}{(1-t^2)^2} W_t \right]_{t_2} = 0. \end{aligned} \right\} (22)$$

Последнее из условий (22) переписано с учетом того, что при $\rho = \rho_2$ из условия $M_r = 0$ следует $W_{\rho\rho} = -W_\rho / 3\rho$. Для удовлетворения условиям (22) необходимо располагать помимо функции прогибов (21) выражениями для производных

$$\frac{dW}{dx} = \frac{dW}{dt} = W_t = W'; \quad \frac{d^2 W}{dx^2} = \frac{d^2 W}{dt^2} = W_{tt} = W'';$$

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = \frac{d^3 W}{dt^3} = W_{ttt} = W'''.$$

Сводка требуемых выражений имеет вид

$$W' = A_2 \left[(\phi' - \alpha^2 D_0) sh \alpha t + \alpha (\phi - D_0') ch \alpha t \right] +$$

$$+ B_2 \left[(\phi' - \alpha^2 D_0) ch \alpha t + \alpha (\phi - D_0') sh \alpha t \right] -$$

$$- A_1 \left[(\phi_1' - \beta^2 D_0) \sin \beta t + \beta (\phi_1 + D_0') \cos \beta t \right] -$$

$$- B_1 \left[(\phi_1' - \beta^2 D_0) \cos \beta t - \beta (\phi_1 + D_0') \sin \beta t \right];$$

$$W'' = A_2 [P sh \alpha t + Q ch \alpha t] + B_2 [P ch \alpha t + Q sh \alpha t] -$$

$$- A_1 [P_1 \sin \beta t + Q_1 \cos \beta t] - B_1 [P_1 \cos \beta t - Q_1 \sin \beta t];$$

$$W''' = A_2 [(P' + \alpha Q) sh \alpha t + (Q' + \alpha P) ch \alpha t] +$$

$$+ B_2 [(P' + \alpha Q) ch \alpha t + (Q' + \alpha P) sh \alpha t] -$$

$$- A_1 [(P_1' - \beta Q_1) \sin \beta t + (Q_1' + \beta P_1) \cos \beta t] -$$

$$- B_1 [(P_1' - \beta Q_1) \cos \beta t - \sin \beta t (Q_1' + \beta P_1)].$$

Здесь введены обозначения

$$P = \varphi'' + \alpha^2 \varphi - 2\alpha^2 D_0'; \quad P_1 = \varphi_1'' - \beta^2 \varphi_1 - 2\beta^2 D_0';$$

$$Q = \alpha (2\varphi' - D_0'' - \alpha^2 D_0); \quad Q_1 = \beta (2\varphi_1' + D_0'' - \beta^2 D_0),$$

где по определению $D_0 = \sin nt$; $D_0' = n \cos nt$;

$$D_0'' = -n^2 D_0.$$

Для упрощения вычислений заменим в выражениях для W, W', W'', W''' функции с аргументом $\alpha t, \beta t$ функциями с аргументом $\alpha(t - t_2); \beta(t - t_2)$, вследствие чего при удовлетворении граничным условиям при $t_1 = -0,9487$ будем иметь $t_1 - t_2 = -0,2416$, а при $t_2 = -0,7071$ будет

$t_2 - t_2 = 0$, т.е. функции \sin, sh при $t = t_2$ будут равны нулю, а функции \cos, ch равны единице. Таким образом, общее решение (21) для данной конкретной задачи перепишем, опустив попутно индекс "2" при A_2, B_2 в виде

$$W = A[\phi sh\alpha(t + 0.7071) - \alpha D_0 ch\alpha(t + 0.7071)] + B[\phi ch\alpha(t + 0.7071) - \alpha D_0 sh\alpha(t + 0.7071)] - A_1[\varphi_1 \sin \beta(t + 0.7071) + \beta D_0 \cos \beta(t + 0.7071)] - B_1[\varphi_1 \cos \beta(t + 0.7071) - \beta D_0 \sin \beta(t + 0.7071)]. \quad (23)$$

Аналогичным образом следует переписать выражения для производных от W .

После внесения в граничные условия (22) требуемых выражений получим следующую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов A, B, A_1, B_1

$$\left. \begin{aligned} Aa + Bb + A_1c + B_1d &= 0; \\ Aa_1 + Bb_1 + A_1c_1 + B_1d_1 &= 0; \\ A\alpha^* + B\beta^* + A_1\gamma + B_1\theta &= 0; \\ A\alpha_1^* + B\beta_1^* + A_1\gamma_1 + B_1\theta_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} a &= k^2 \eta_1 sh; \quad b = k^2 \eta_1 ch; \quad c = (2\delta_1 - k^2 \eta_1) \sin - 2\beta \cos; \\ d &= (2\delta_1 - k^2 \eta_1) \cos + 2\beta \sin; \\ a_1 &= (k^2 \eta_1 + 2\delta_1) sh - 2\alpha ch; \\ b_1 &= (k^2 \eta_1 + 2\delta_1) ch - 2\alpha sh; \quad c_1 = -k^2 \eta_1 \sin; \\ d_1 &= -k^2 \eta_1 \cos; \quad \alpha^* = \alpha(T - q\eta); \\ \beta^* &= \eta k^2 - \delta(T - q\eta); \quad \gamma = -\beta(T - q\eta); \\ \theta &= \eta k^2 + \delta(T - q\eta); \quad \alpha_1^* = \alpha(\eta k^2 + M - p\eta); \\ \beta_1^* &= k^2 N - \delta(M - p\eta); \quad \gamma_1 = \beta(\eta k^2 - M + p\eta); \\ \theta_1 &= k^2 N + \delta(M - p\eta). \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} sh &= sh\alpha t^*; \quad ch = ch\alpha t^*; \quad \sin = \sin \beta t^*; \quad \cos = \cos \beta t^*; \\ t^* &= t_1 - t_2 = -0,2416; \quad \eta = \left(\frac{V}{D_0^2} \right)_{t=t_2}; \quad \delta = \left(\frac{D_0'}{D_0} \right)_{t=t_2}; \\ N &= 2 - 3\delta\eta; \quad M = \eta(6\delta^2 + 2n^2) - 2\delta; \quad T = 1 - 2\eta\delta; \\ \eta_1 &= \left(\frac{V}{D_0^2} \right)_{t=t_1}; \quad \delta_1 = \left(\frac{D_0'}{D_0} \right)_{t=t_1}; \quad q = \frac{3 - t_2^2}{3t_2(1 - t_2^2)}; \\ p &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3 + 5t_2^2}{(1 - t_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Приравняв нулю определитель системы (24), получим частотное уравнение, из которого будут найдены собственные частоты (числа k_j , $i = 1, 2, 3, \dots$) пластинки. Это уравнение после некоторых преобразований определителя сводится к виду

$$(cd_1 - c_1d)\Delta_1 + (\gamma\theta_1 - \gamma_1\theta)\Delta + R = 0, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= ab_1 - a_1b; \quad \Delta_1 = \alpha^* \beta_1^* - \alpha_1^* \beta^*; \\ R &= (a_1c - ac_1)(\beta^* \theta_1 - \beta_1^* \theta) + (bd_1 - b_1d) \times \\ &\times (\alpha_1^* \gamma - \alpha^* \gamma_1) - (a_1d - ad_1)(\gamma_1 \beta^* - \gamma \beta_1^*) - \\ &- (c_1b - cb_1)(\alpha_1^* \theta - \alpha^* \theta_1). \end{aligned}$$

После внесения в (25) параметров при системе (24) получим расчетное уравнение для вычисления k_j :

$$\begin{aligned} \beta \cos \beta t^* \{ [1] sh\alpha t^* + [2] \alpha ch\alpha t^* \} + \\ + \sin \beta t^* \{ [3] sh\alpha t^* + [4] \alpha ch\alpha t^* \} - \end{aligned} \quad (26)$$

$$-\alpha \beta \eta^2 \eta_1 k^4 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} [1] &= k^4 (k^2 + \eta_1 L) + \\ &+ k^2 \left[(1 - \eta_1 \delta) Y + (\delta - 2\delta_1 - n^2 \eta_1) L - \eta^2 (n^2 + \delta_1^2) \right] + \\ &+ (\delta_1^2 - 2\delta_1 \delta - n^2) Y + (\delta \delta_1^2 - n^2 \delta + 2n^2 \delta_1) L; \\ [2] &= -k^4 \eta^2 \eta_1 + 2(\delta_1 - \delta)(\delta_1 L - Y); \\ [3] &= k^4 \left[\eta_1 Y + (\eta_1 \delta - 2) L - \eta^2 (\eta_1 n^2 + 2\delta_1) \right] + \\ &+ 2(n^2 + \delta \delta_1)(n^2 L + \delta_1 Y); \\ [4] &= k^4 (\eta^2 + \eta_1 L) - k^2 \times \\ &\times \left[(1 - \eta_1 \delta) Y + (\delta - 2\delta_1 - n^2 \eta_1) L - \eta^2 (n^2 + \delta_1^2) \right] + \\ &+ (\delta_1^2 - 2\delta \delta_1 - n^2) Y + (\delta \delta_1^2 - n^2 \delta + 2n^2 \delta_1) L. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} Y &= \eta^2 (2n^2 - p - 3\delta q) + \eta(5\delta + 2q) - 2; \\ L &= -\eta^2 (2\delta + q) + \eta; \\ \delta &= n \cos nt_2 / \sin nt_2; \\ \delta_1 &= n \cos nt_1 / \sin nt_1; \\ \eta &= (nt_2 + C^* - \sin nt_2 \cos nt_2) / [2n(\sin nt_2)^2]; \end{aligned}$$

$$\eta_1 = (nt_1 + C^* - \sin nt_1 \cos nt_1) / [2n(\sin nt_1)^2];$$

$$t^* = -0,2416; t_1 = -0,9487; t_2 = -0,7071;$$

$$\alpha = \sqrt{k^2 - n^2}; \beta = \sqrt{k^2 + n^2}.$$

Аппроксимация функции $D_1(x)$, посредством функции $D(x)$, заданных в виде (16) и (17), проводится по следующей схеме.

Устанавливаем, что экстремум $D_{1\max}$ соответствует $t_0 = -0,7746$ ($x_0 = 1 + t_0 = 0,2254$). Из условия $D_1(x_0) = 1$ находим $D_{01} = 2,3193$. Требуя, чтобы экстремум D_{\max} совпадал с экстремумом $D_{1\max}$, из условий $D(t_0) = 1$ и $D'(t_0) = 0$ находим

$$D^* = \sin^2 nt_0 / (n \cos nt_0);$$

$$C^* = [\sin nt_0 (1 + \sin^2 nt_0) - nt_0 \cos nt_0] / (\cos nt_0). \quad (27)$$

Требуем, далее, равенства $D_1 = D$ при $t_1 = -0,9487$. Из этого условия с учетом найденных $D_{01} = 2,3193$, D^* , C^* получаем уравнение, из которого вычисляем $n = 2,849$. Теперь согласно (27) вычисляем $D^* = -0,3824$; $C^* = 4,4375$.

Из графического сопоставления функций (16) и (17) при найденных коэффициентах D_{01}, D^*, C^*, n (рис. 2) делаем вывод о их удовлетворительном совпадении, в частности, на требуемом участке от $x_1 = 0,0513$ ($t_1 = -0,9487$) до $x_2 = 0,293$ ($t_2 = -0,7071$).

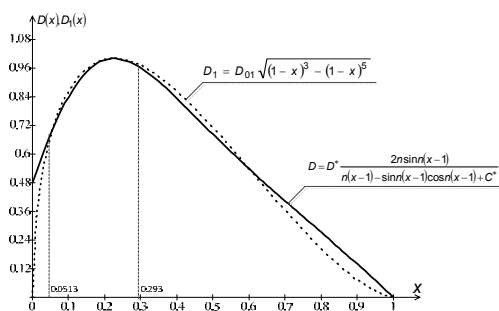


Рис.2. Графическая иллюстрация поиска

С учетом $C^* = 4,4375$ и $n = 2,849$ вычисляем корни трансцендентного уравнения (26):

$$k_1 = 8,6812; k_2 = 19,8728; k_3 = 32,7517. \quad (28)$$

Сравнивая значение k_1 с найденным в работе [3] "точным" по утверждению автора $k_1 = 8,7178$, получим приемлемое для практики

расхождение в $\delta = 0,4\%$. Остается выяснить степень приближения этих двух значений k_1 к некоторому действительно точному значению, поскольку $k_1 = 8,7178$, полученное в [3] методом рядов, также следует полагать не лишенным погрешности. Анализ вопроса проведем по следующей методике.

Предположим, что уравнение (26) имеет корень $k_1 = 8,7178$ при некоторых подлежащих определению неизвестных C^* и n , отличных от установленных выше. Изменяя в сторону увеличения или уменьшения параметр n и связанные с ним согласно (27) величины C^* и D^* при $t_0 = -0,7746$, находим некоторые корни $k(n)$ уравнения (26). Строим зависимость $k(n)$ из которой при $k = 8,7178$ находим требуемые здесь $n = 2,92153772$; $C^* = 4,18397$; $D^* = -0,31782$. Для самопроверки после внесения этих величин в (26) убеждаемся, что действительно первый корень этого уравнения $k_1 = 8,7178$. Строим графики (рис.3) основной функции $D_1(x)$ и двух аппроксимирующих функций $D(x)$ при $n = 2,849$; $C^* = 4,4375$; $D^* = -0,3824$ (аппроксимация I) и при $n = 2,92153772$; $C^* = 4,18397$; $D^* = -0,31782$ (аппроксимация II).

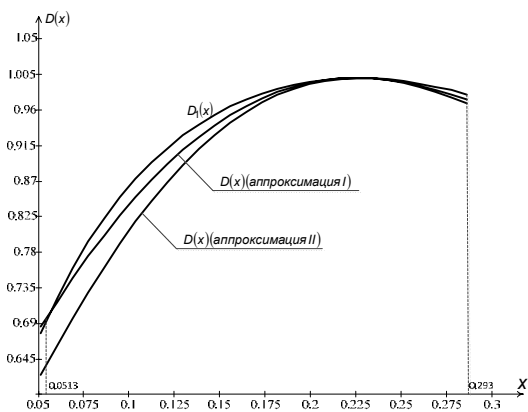


Рис.3. Аппроксимация функций

Из рисунка 3 сразу же заключаем, что воображаемая аппроксимация II является более грубой по сравнению с приведенной в статье аппроксимацией I, поэтому и корень $k_1 = 8,7178$ следует полагать более грубым приближением к точному значению, чем полученный выше корень $k_1 = 8,6812$. Полагаем поэтому, что корни (28) верны с достаточной для практики точностью. Кстати, если согласно аппроксимации II вычислить второй корень, то получим $k_2 = 19,8425$ и расхождение с более точным

корнем k_2 (28) будет $\delta = 0,15\%$; если вычислить $k_3 = 32,7307804$, то $\delta = 0,06\%$. Отсюда следует предположение об ослаблении требований к степени строгости аппроксимации с ростом порядкового номера вычисляемого k_j .

Для анализа напряженно-деформированного состояния пластинки при осесимметричных колебаниях используем известные из теории пластин формулы для максимальных по толщине радиальных σ_r и тангенциальных σ_θ изгибных (нормальных) напряжений [6]

$$\sigma_r = \frac{6M_r}{h^2}; \sigma_\theta = \frac{6M_\theta}{h^2}, \quad (29)$$

где

$$M_r = -D \left(W_{\rho\rho} + \frac{\nu}{\rho} W_\rho \right); \quad M_\theta = -D \left(\nu W_{\rho\rho} + \frac{W_\rho}{\rho} \right).$$

После перехода к переменной $t = -\sqrt{1-\rho}$ и внесения $M_r, M_\theta, \nu = 1/3, h = H_0 R(1-\rho) = H_0 R t^2, D = E h^3 / 12(1-\nu^2)$ в (29) получим

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{R} (W_{tt} - q^* W_t); \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{3R} (W_{tt} - s W_t),$$

где

$$q^* = (3-t^2)/3t(1-t^2); \quad s = (1+5t^2)/t(1-t^2);$$

$$\sigma_0 = 9EH_0 / 64.$$

Для суждения о характере изменения прогибов W и напряжений σ_r, σ_θ вдоль радиуса пластинки в зависимости от частот (чисел k_j) необходимо предварительно определить значения постоянных A, B, A_1, B_1 . Из системы (24)

можно вычислить их отношения $A_1^* = A_1 / B_1$;

$A^* = A / B_1$; $B^* = B / B_1$ по формулам

$$A_1^* = \frac{\Delta(\beta^* \theta_1 - \beta_1^* \theta) - \Delta_1(bd_1 - b_1d)}{\Delta_1(c_1b - cb_1) - \Delta(\gamma_1\beta^* - \gamma\beta_1^*)};$$

$$A^* = [(c_1b - cb_1)A_1^* + bd_1 - b_1d] / \Delta;$$

$$B^* = [(a_1c - ac_1)A_1^* + a_1d - ad_1] / \Delta.$$

Параметры для вычисления этих амплитудных коэффициентов в зависимости от чисел k_j приведены при выражениях (24)-(26). В результате получено (табл.1):

Таблица 1. Величины амплитудных коэффициентов

Числа k_j	Амплитудные коэффициенты		
	A_1^*	A^*	B^*
$k_1 = 8,6812$	0,5913	-0,59046	-0,79985
$k_2 = 19,8728$	0,86445	-0,86027	-0,84454
$k_3 = 32,75169$	0,89975	-0,89788	-0,89958

Анализ напряженно-деформированного состояния пластинки и оценка ее работоспособности в качестве активного акустического элемента

Выражения для расчета $W, \sigma_r, \sigma_\theta$ с учетом зависимостей W', W'' запишутся в виде

$$W = B_1 D_0 \left\{ \left[A^* \left(k \frac{V}{D_0^2} + \frac{D_0'}{D_0} \right) - \alpha B^* \right] sh \alpha(t-t_2) + \left[B^* \left(k^2 \frac{V}{D_0^2} + \frac{D_0'}{D_0} \right) - \alpha A^* \right] ch \alpha(t-t_2) + \left[\beta - A_1^* \left(k^2 \frac{V}{D_0^2} - \frac{D_0'}{D_0} \right) \right] \sin \beta(t-t_2) - \left[\beta A_1^* + k^2 \frac{V}{D_0^2} - \frac{D_0'}{D_0} \right] \cos \beta(t-t_2) \right\}; \quad (30)$$

$$\sigma_r \left(\frac{R}{\sigma_0} \right) = B_1 k^2 D_0 \left\{ \left[\left(k^2 \frac{V}{D_0^2} - \frac{D_0'}{D_0} \right) A^* + \alpha B^* \right] sh \alpha(t-t_2) + \right.$$

$$+ \left[\left(k^2 \frac{V}{D_0^2} - \frac{D_0'}{D_0} y \right) B^* + \alpha y A^* \right] \text{ch} \alpha(t-t_2) +$$

$$+ \left[\left(k^2 \frac{V}{D_0^2} + \frac{D_0'}{D_0} y \right) A_1^* + \beta y \right] \sin \beta(t-t_2) + \left[k^2 \frac{V}{D_0^2} + \frac{D_0'}{D_0} y - \beta y A_1^* \right] \cos \beta(t-t_2); \quad (31)$$

$$\sigma_\theta \left(\frac{3R}{\sigma_0} \right) = B_1 k^2 D_0 \left\{ \left[\left(k^2 \frac{V}{D_0^2} - \frac{D_0'}{D_0} z \right) A^* + \alpha z B^* \right] \text{sh} \alpha(t-t_2) + \right.$$

$$+ \left[\left(k^2 \frac{V}{D_0^2} - \frac{D_0'}{D_0} z \right) B^* + \alpha z A^* \right] \text{ch} \alpha(t-t_2) +$$

$$\left. + \left[\left(k^2 \frac{V}{D_0^2} + \frac{D_0'}{D_0} z \right) A_1^* + \beta z \right] \sin \beta(t-t_2) + \left[k^2 \frac{V}{D_0^2} + \frac{D_0'}{D_0} z - \beta z A_1^* \right] \cos \beta(t-t_2) \right\}, \quad (32)$$

где

$$D_0 = \sin nt; \quad \frac{D_0'}{D_0} = n \frac{\cos nt}{\sin nt}; \quad V = \frac{nt + C^* - \sin nt \cos nt}{2n}; \quad y = 1 - \frac{V}{D_0^2} \left(2 \frac{D_0'}{D_0} + q^* \right); \quad z = 1 - \frac{V}{D_0^2} \left(2 \frac{D_0'}{D_0} + s \right);$$

$B_1 = B_j$ – постоянная, зависящая от форм колебаний при k_j .

Характер изменения функций $W, \sigma_r, \sigma_\theta$, выраженных через переменную $\rho = 1 - t^2$, пред-

ставлен посредством нормированных графиков для первых трех собственных частот пластинки (рис.4).

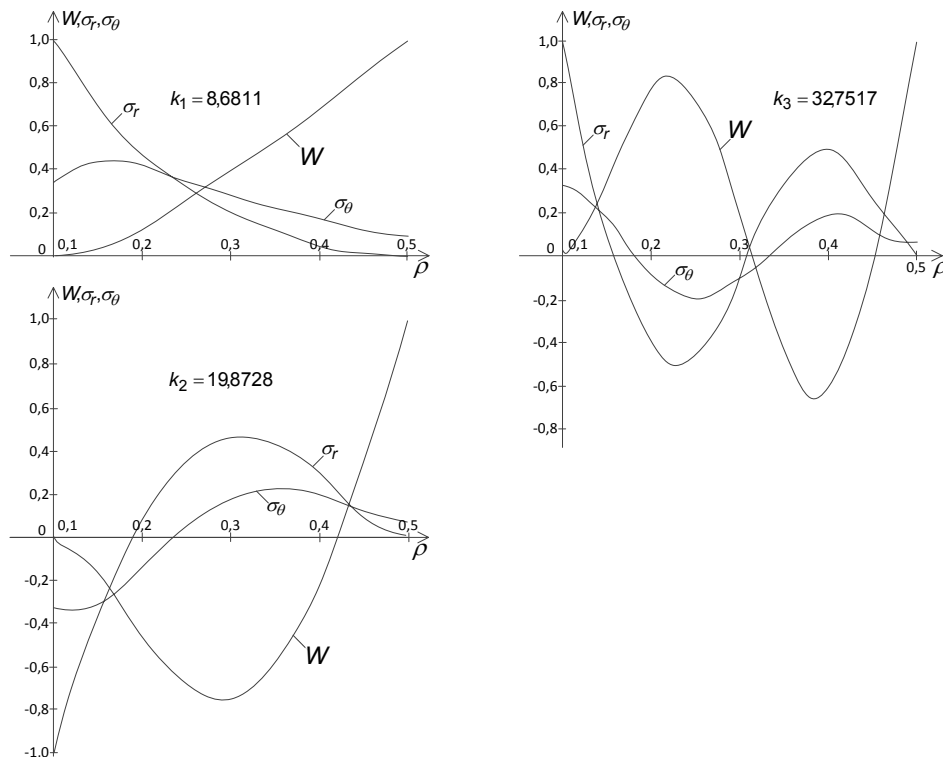


Рис.4. Прогибы W и напряжения σ_r, σ_θ вдоль радиуса пластинки при ее колебаниях на первых трех собственных частотах

Из графиков для σ_r и σ_θ заключаем, что максимальные нормальные напряжения $\sigma_r = 1$ действуют по окружности жесткого закрепления ($\rho = 0,1$) и поэтому это место является наиболее опасным с точки зрения усталостной прочности пластинки при ее продолжительных резонансных колебаниях в качестве активного акустического элемента. Представляется необходимым в связи с этим дать схему оценки работоспособности подобной колебательной системы, установив предельно допустимые амплитуды колебаний.

Ввиду того, что каждая точка опасного сечения $\rho = 0,1$ находится в условиях плоского напряженного состояния (ПНС), т.е. каждое из главных напряжений $\sigma_r = \sigma_1$ и $\sigma_\theta = \sigma_2$ отлично от нуля, то для сравнения действующих в этом сечении напряжений σ_1 и σ_2 с табличным пределом выносливости σ_{-1} , экспериментально получены при одноосном нагружении, например, при простом циклическом изгибе ($\sigma_2 = 0$), необходимо заменить ПНС некоторым эквивалентным одноосным. Такая замена производится при помощи различных гипотез прочности [5], наиболее употребительной из которых является гипотеза Генки-Мизеса, которая удовлетворительно подтверждается для большинства традиционных конструкционных материалов. Согласно этой гипотезе для ПНС получим

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta}$$

откуда следует, что при колебаниях пластинки необходимо обеспечить выполнение условия

$$\sigma_r \sqrt{1+m^2} - m \leq \sigma_{-1} \cdot (m = \sigma_\theta / \sigma_r) \quad (33)$$

Рассмотрим последовательно случаи собственных (резонансных) колебаний пластинки на трех различных формах, соответствующих найденным значениям k_j . Предположим, что при работе контролируется амплитуда W_{0j} колебаний свободного края пластинки ($\rho = 0,5$). Согласно (30) вычислим при $\rho = 0,5$ для каждого из k_j ($j = 1,2,3$)

$$W_{01} = B_1 \cdot 53,906 \text{ (мм)}; W_{02} = B_2 \cdot 288,298 \text{ (мм)};$$

$$W_{03} = B_3 \cdot 805,561 \text{ (мм)},$$

откуда соответственно получим

$$B_1 = W_{01} / 53,906; B_2 = W_{02} / 288,298;$$

$$B_3 = W_{03} / 805,561.$$

Согласно (31) и (32) учитывая, что $R = R_j$ вычисляем $(\sigma_r)_i$ и $(\sigma_\theta)_i$ при $\rho = 0,1$ для первой формы ($k_j = k_1$)

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{R_1} B_1 (6,124 \cdot 10^3) = \frac{\sigma_0}{R_1} W_{01} 113,6051;$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{R_1} B_1 (2,01 \cdot 10^3) = \frac{\sigma_0}{R_1} W_{01} 37,287129;$$

$$m_1 = 0,328217;$$

для второй формы ($k_j = k_2$)

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{R_2} B_2 (-1,664 \cdot 10^5) = -\frac{\sigma_0}{R_2} W_{02} 577,1805562;$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{R_2} B_2 (-5,462 \cdot 10^4) = -\frac{\sigma_0}{R_2} W_{02} 189,4567427;$$

$$m_2 = 0,32824;$$

для третьей формы ($k_j = k_3$)

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{R_3} B_3 (1,246 \cdot 10^6) = \frac{\sigma_0}{R_3} W_{03} 1546,7481;$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{R_3} B_3 (4,091 \cdot 10^5) = \frac{\sigma_0}{R_3} W_{03} 507,8448435;$$

$$m_3 = 0,3283306.$$

Поскольку, как видно из результатов вычислений для трех форм колебаний отношение $m = \sigma_\theta / \sigma_r = 0,328$ неизменно, то условие (33) запишется в виде

$$0,883(\sigma_r)_i \leq \sigma_{-1}, \quad (34)$$

где

$$(\sigma_r)_i = \sigma_0 \frac{(W_0)_i}{R_i} C_i; \quad (C)_{i=1} = 113,6; \quad (C)_{i=2} = -577,18;$$

$$(C)_{i=3} = 1546,75.$$

Предельно допустимые амплитуды $(W_0)_i$, контролируемые на свободном крае пластинки, устанавливаются согласно (34) из условия

$$(W_0)_i \leq 1,132 \frac{R_i \sigma_{-1}}{C_i \sigma_0}, \quad (35)$$

в котором радиус R_j вычисляется из последнего выражения соотношений системы (14) при соответствующем значении k_j и заданной рабочей частоте f .

Пример. Пластинка толщиной $h = H_0 R(1 - \rho)$ изготовлена из титанового сплава ($E = 1,1 \cdot 10^5$ МПа, $\gamma = 4,5 \cdot 10^{-6}$ кг/мм³, $\sigma_{-1} = 340$ МПа, $\nu = 1/3$).

Если частота $f = 10^4$ 1/сек = 10 кГц, при которой пластинка должна работать в резонансном режиме, например, по второй собственной форме ($k_2 = 19,8728$), то из (14) получим $R = 48,539 \sqrt{H_0}$ (мм). Из приведенной выше формулы для σ_0 следует $\sigma_0 = 154,687 \cdot 10^2 H_0$ (МПа). Правая часть условия (35) будет равна $0,209244 \cdot 10^{-2} / \sqrt{H_0}$. Пусть задана величина внутреннего радиуса $R(0,1) = R_{01} = 2,25$ мм, тогда из соотношения $R_{01} = 0,1R = 0,1 \cdot (48,539 \sqrt{H_0})$ получим $H_0 = 0,21487$. Наружный радиус при этом будет $R(0,5) = R/2 = 11,25$ мм. Толщина в месте закрепления ($\rho = 0,1$) $h_{01} = H_0 R \cdot 0,9 = 4,35$ мм, толщина на свободном крае $h_{05} = H_0 R \cdot 0,5 = 2,42$ мм (рис.5). Условие (35) дает $W_0 \leq 0,0045$ мм.

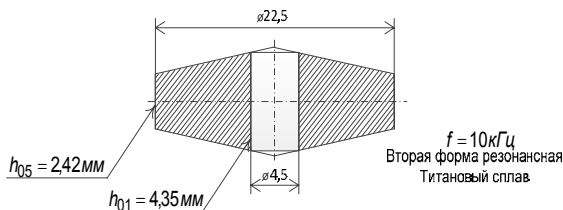


Рис.5. Размеры пластинки из Ti-сплава заделанной по $\varnothing 4,5$ мм, работающей по II форме колебаний

Таким образом, титановая пластина, изготовленная по приведенным резонансным размерам и работающая на второй форме при частоте 10 кГц должна иметь амплитуды колебаний свободного края не более 4,5 мкм. Аналогичным образом устанавливаются предельные амплитуды и резонансные геометрические параметры пластинок, предназначенных для работы при иных формах колебаний, иных частотах нагружения и изготовленных из иных конструктивных материалов.

Выводы

1. Решена задача о колебаниях круглой пластинки линейно-переменной толщины методом симметрий. Приведены частотное уравнение и уравнение форм собственных колебаний.
2. Подтверждена эффективность метода на примере вычисления первых трех частот и построения соответствующих им собственных форм колебаний.
3. Приведен алгоритм применения метода для пластинок, толщина которых может изменяться по закону, отличному от линейно-переменного, который рассмотрен в работе.
4. Выполнен анализ напряженно-деформированного состояния. Приведены соответствующие графики перемещений и нормальных напряжений.
5. Предложена схема оценки долговечности и эксплуатационного ресурса пластинки при ее возможном использовании в качестве активного элемента резонансных технологических устройств.

Литература

1. *Болотин В.В.* Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. Т. 1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
2. *Гонткевич В.С.* Собственные колебания пластинок и оболочек: Справочное пособие. К.: Наукова думка, 1964. 288 с.
3. *Коваленко А.Д.* Круглые пластинки переменной толщины: Монография. М.: Физматгиз, 1959. 294 с.
4. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями: Монография. М.: Наука, 1968. 504 с.
5. *Соппротивление материалов:* Монография / Г.С. Писаренко, В.А. Агарев, А.Л. Квитка и др. К.: Вища школа, 1973. 671 с.
6. *Трапезон К.А.* Обобщенный метод симметрий при изучении колебаний упругих элементов // *Электроника и связь*. 2012. № 2. С. 31-34.
7. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки: Монография. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.

УДК 534.8

Метод симетрії при коливаннях кругових пластинок зі змінною товщиною

К.О. Трапезон, канд. техн. наук,

Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут",

пр. Перемоги, 37, Київ-56, 03056, Україна.

Розв'язано задачу про коливання круглої пластинки з лінійним законом зміни товщини на основі використання методу симетрій. Наведено частотні рівняння та рівняння форм власних коливань. Виконано аналіз напружено-деформованого стану пластинки змінної товщини. Запропоновано схему оцінки довговічності та експлуатаційного ресурсу пластинки за умови її можливого використання в якості активного акустичного елемента резонансних пристроїв. Бібл. 7, рис. 5, табл. 1.

Ключові слова: симетрія, коливання, пластинка, змінна товщина, рівняння частот, форма коливань, резонанс.

Method of symmetries at the vibrations of circular plates of variable thickness

K.A. Trapezon

National Technical University of Ukraine 'Kyiv Polytechnic Institute',

pr. Peremogy, 37, Kyiv-56, 03056, Ukraine.

A task is decided about the vibrations of round plate of arcwise-variable thickness by the method of symmetries. Frequency equalizations over and equalizations of forms of native are brought. The analysis of the tensely-deformed state of plate of variable thickness is executed. The chart of estimation of longevity and operating resource of plate is offered at her possible using as an active acoustic element of resonant devices. Reference 7, figures 5, tables 1.

Key words: symmetry, vibrations, plate, variable thickness, frequency equation, mode shape, resonance.

1. Bolotin V.V. Chatter in technics: Manual in 6 volumes. Vol. 1. Vibrations linear systems. – Moscow: Mashinostroenie, 1978. – 352 p. (Rus)
2. Gontkevich V.S. Natural vibrations of plates and hulls: Manual. – Kiev: Naukova dumka, 1964. – 288 p. (Rus)
3. Kovalenko A.D. Round plates with variable thickness: Monograph. – Moscow: Phisimatgiz, 1959. – 294 p. (Rus)
4. Kollatz L. Eigenvalue problems with technical applications: Monograph. – Moscow: Nauka, 1968. – 504 p. (Rus)
5. Strength of materials: Monograph / G.S. Pisarenko, V.A. Agarev, A.L. Kvitka and others. – Kiev.: Visha shkola, 1973. – 671 p. (Rus)
6. Timoshenko S.P., Vojnovskiy-Kriger S. Plates and hulls: Monograph. – Moscow: Phisimatgiz, 1963. – 636 p. (Rus)
7. Trapezon K.A. Generalized method of symmetries at the study of vibrations of resilient elements // Electronics and communications. – 2012. – № 2. – Pp. 31-34. (Rus)

Поступила в редакцію 11 ноября 2012 г.