

УДК 534.6

**А.В. Коржик**, д-р.тех.наук, **О.Н. Петрищев**, д-р.тех.наукНациональный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,  
ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

## Расчет частотной характеристики сферического монолитного пьезокерамического гидрофона

*В рамках задачи стационарной гидроэлектроупругости о приеме звука электроупругой сферой получено аналитическое решение для сплошного сферического радиально поляризованного преобразователя с полным электродированием поверхности. При этом рассчитана частотная характеристика чувствительности сферического гидрофона в широкой полосе частот и проведено сопоставление с экспериментальными данными. Библ. 15, рис.5.*

**Ключевые слова:** гидрофон, сферический гидрофон, частотная характеристика, задача гидроэлектроупругости, акустическое поле, математическая модель.

### Введение

Предлагаемая работа предполагает создание теоретической базы для ситуации использования таких специфических средств измерений – как измерительные гидрофоны.

Так в современной методологии гидроакустических измерений вопросы проведения калибровки гидроакустических приемников предполагают детальное изучение методов расчета и прогнозирование частотных характеристик чувствительности эталонных измерительных гидрофонов совместно с использованием (либо взамен) первичных методов измерений.

При этом традиционно используемые подходы к расчету гидроакустических приемных преобразователей (например, представленные в работах [1,3]) в значительной степени исчерпали себя. Это связано с невозможностью аргументированного и убедительного введения ограничений, обеспечивающих представление системы с распределенными параметрами – системой с сосредоточенными параметрами в рамках используемых электромеханических аналогий. В особенности при этом страдает аналитическое представление методов расчета приемных пьезокерамических приемных преобразователей, реализуемых в достаточно широкой полосе частот.

Действительно, формирование акустических, механических и электрических полей преобразователей-генераторов при работе в жид-

кости требует детального изучения процесса связанности указанных физических полей – с учетом геометрии преобразователя, особенностей формирования акустического поля, типа поляризации и электродирования пьезокерамических элементов, а также способов включения электродов и внешней электрической нагрузки. Традиционные подходы к расчету пьезокерамических преобразователей не в силах обеспечить одновременный учет даже такого, весьма ограниченного числа факторов, влияющих на конечный результат – оценку электрического напряжения на нагрузке электродов измерительных преобразователей с целью определения чувствительности преобразователя в заданной полосе частот.

Интенсивно развиваемый в последнее время класс задач стационарной (и нестационарной) гидроэлектроупругости предоставляет возможности построения математической модели и решения задачи о приеме звуковых волн в рамках основных теоретических положений электроупругости [5] с учетом проявления эффектов связанности указанных основных физических полей в наиболее широко применяемых пьезокерамических элементах, которые работают в условиях статического и динамического деформирования. Отметим, что указанный класс задач позволяет, задав избыточное (акустическое) давление в падающей на преобразователь волне, найти электрическое напряжение на его нагрузке с учетом всех указанных выше факторов и условий работы преобразователя.

До настоящего времени появилось достаточно большое количество работ по указанной тематике гидроэлектроупругости. Например, работы [6, 7, 12], посвященные решению сквозных задач приема и излучения звука многоэлектродными цилиндрическими преобразователями бесконечной и конечной длины, а также их системами при работе в стационарном режиме. Работы [8, 13, 14], посвященные сферическим (нестационарная постановка) и стержневым преобразователям.

При этом (вне зависимости от типа преобразователя) важным является ответ на вопрос о

возможности прогнозирования неравномерности амплитудно-частотной характеристики гидрофона в исследуемой полосе нижних частот – дорезонансных областях, который частично был поднят в работе [2].

Как отмечено выше, одним из часто используемых в задачах градуировки типов пьезоэлектрических элементов является сферический. Однако, традиционные расчетные модели сферических гидрофонов не поясняли и не обеспечивали его казалась бы очевидные положительные (в силу геометрии преобразователя и возможностей построения электрического тракта) пространственно-энергетические качества как средства измерения. Это проявлялось прежде всего в существенной (до 6-10 дБ) неравномерности характеристики направленности и амплитудно-частотной характеристики чувствительности (до 6 дБ).

И если изменение условий закрепления и герметизации активного элемента позволяли в какой-то мере снижать неравномерность характеристики направленности, то физическая природа неравномерности амплитудно-частотной характеристики чувствительности и пути ее уменьшения оставались невыясненными. Поэтому, предполагается перспективным и актуальным построение адекватной (в приближении к указанному объекту) математической модели, учитывающей эффекты упругого взаимодействия сферической оболочки с окружающей средой (идеальной жидкостью) с использованием классической теории пьезоэлектричества, соответствующих ей упрощенных уравнений Максвелла, уравнений для акустического поля (уравнения Гельмгольца), а также силовых и кинематических условий сопряжения на поверхности “сферический активный элемент – рабочая среда”. Условия закрепления преобразователя при этом идеализируем и считаем не влияющими на результирующую чувствительность.

Таким образом, целями работы являются:

- построение собственно математической модели электроупругих сферических гидрофонов, выполненных как в виде сплошной сферы с полностью электродированной поверхностью;
- проведение численных исследований разработанных математических моделей в части расчета частотной характеристики чувствительности сферического электроупругого гидрофона при различных значениях импеданса электрической нагрузки.

## Постановка и решение задачи

Рассмотрим модельную ситуацию, когда на сплошную сферическую оболочку (рис. 1) из поляризованной по толщине пьезокерамики падает плоская волна избыточного давления  $P_0^* e^{i\omega t}$ , распространяющаяся вдоль луча с координатами  $\varphi_0$  и  $\vartheta_0$ , которые определены в сферической системе координат  $(r, \varphi, \vartheta)$  совмещенной с центром оболочки. Внутренняя и внешняя поверхности оболочки покрыты сплошным тонким слоем металла. Внешняя поверхность всегда имеет нулевой потенциал, т. е. заземлена. К внутренней поверхности через отверстие бесконечно малого диаметра подключается проводник электрического тока. Этот проводник связывает внутреннюю поверхность сферического гидрофона и электрическую нагрузку  $Z_H$  – входной электрический импеданс электронной схемы (как правило, усилителя электрических сигналов), которая подключается непосредственно к пьезоэлектрической оболочке.

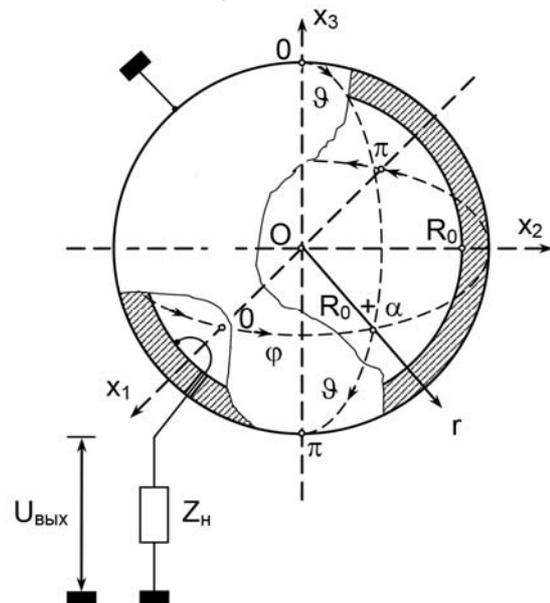


Рис. 1. Расчетная схема сферического гидрофона

Очевидно, что построение адекватной реальному объекту математической модели (а частотная характеристика сферического приемника имеет смысл его математической модели) предполагает использование вполне определенного набора материальных констант. В первую очередь речь идет о пьезомодулях  $e_{kij}$ , модулях упругости  $c_{ijkl}^E$ , которые определяются в режиме постоянства (равенства нулю) напря -

женности электрического поля (верхний символ  $E$ ) и диэлектрических проницаемостях  $\chi_{mn}^\varepsilon$ , которые определяются в режиме постоянства (равенства нулю) упругих деформаций (верхний символ  $\varepsilon$ ).

Особенностью искусственных пьезоэлектрических материалов, т. е. пьезокерамик, является тот факт, что они, вплоть до последней технологической операции электрической поляризации, являются поликристаллическими, т. е. изотропными по упругим и электрическим свойствам, сегнетоэлектриками. Из этого следует, что упругие и сегнетоэлектрические свойства неполяризованных пьезокерамик описываются изотропными тензорами четвертого ранга. Так, в частности, компонента тензора сегнетоэлектрических констант  $e_{ijkl}$  определяется следующим образом

$$e_{ijkl} = e_2 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{(e_1 - e_2)}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (1)$$

где  $e_1$  и  $e_2$  - экспериментально определяемые константы;  $\delta_{ij}, \dots, \delta_{jk}$  - символы Кронекера. Из определения (1) следует, что  $e_{iiii} = e_1$ ,  $e_{ijij} = e_2$  и  $e_{ijji} = e_{ijji} = e_{jjji} = (e_1 - e_2)/2$ . Другим комбинациям

$$\|e_{k\beta}\| = \begin{bmatrix} e_1 E_1^0 & e_2 E_1^0 & e_2 E_1^0 & 0 & (e_1 - e_2) E_3^0 / 2 & (e_1 - e_2) E_2^0 / 2 \\ e_2 E_2^0 & e_1 E_2^0 & e_2 E_2^0 & (e_1 - e_2) E_3^0 / 2 & 0 & (e_1 - e_2) E_1^0 / 2 \\ e_2 E_3^0 & e_2 E_3^0 & e_2 E_3^0 & (e_1 - e_2) E_2^0 / 2 & (e_1 - e_2) E_1^0 / 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Если пьезокерамическая пластинка расположена в декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  так, как это показано на рис. 2, и при этом указано, что она поляризована по толщине

$$\|e_{k\beta}\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & (e_1 - e_2) E_3^0 / 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (e_1 - e_2) E_3^0 / 2 & 0 & 0 \\ e_2 E_3^0 & e_2 E_3^0 & e_2 E_3^0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

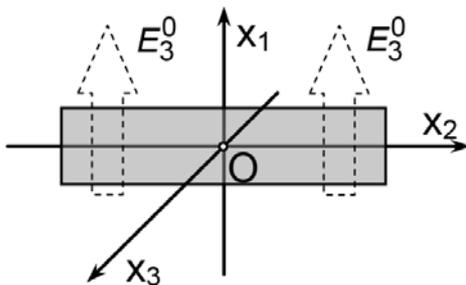


Рис. 2. К определению матрицы пьезомодулей поляризованной по толщине пластинки

индексов соответствуют нулевые значения элементов матрицы компонентов тензора сегнетоэлектрических констант.

В процессе электрической поляризации пьезокерамика приобретает свойства пьезоэлектрика и упругие свойства трансверсально изотропного твердого тела с поворотной осью симметрии бесконечного порядка, которая ориентирована вдоль направления вектора напряженности  $\vec{E}^0$  поляризующего пьезокерамику электрического поля. Элементы матрицы пьезомодулей  $e_{kij}$  определяются следующим образом

$$e_{kij} = e_{pkij} E_p^0, \quad (2)$$

где  $E_p^0$  -  $p$ -й компонент вектора напряженности поляризующего пьезокерамику электрического поля.

В самом общем случае, когда вектор  $\vec{E}^0$  определяется тремя компонентами  $E_1^0, E_2^0$  и  $E_3^0$  из выражения (2) следует, что матрица  $e_{k\beta}$  ( $\beta$  - индекс Фойгта [10], принимающий значения от 1 до 6 и объединяющий два тензорных индекса  $i, j$ ) имеет вид

не, то, очевидно,  $E_3^0 \neq 0$ , а  $E_1^0 = E_2^0 = 0$  и из обобщенной матрицы пьезомодулей (3) следует частный результат

Матрицу (4) обычно записывают в следующем виде

$$\|e_{k\beta}\| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

с обязательным комментарием, что  $e_{31} = e_{32}$  и  $e_{15} = e_{24}$ . При записи в форме (4) эти комментарии не нужны.

Матрица модулей упругости поляризованной по толщине пластинки имеет следующий вид

$$\|c_{\lambda\beta}^E\| = \begin{pmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{66}^E \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\lambda \Leftrightarrow i, j$  и  $\beta \Leftrightarrow k, l$  - индексы Фойгта;  
 $c_{11}^E = c_{22}^E \neq c_{33}^E$ ;  $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{23}^E$ ;  $c_{44}^E = c_{55}^E$ ;  
 $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$ .

Матрица компонентов тензора диэлектрической проницаемости записывается следующим образом

$$\|\chi_{mn}^E\| = \begin{pmatrix} \chi_{11}^E & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^E & 0 \\ & & \chi_{33}^E \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $\chi_{11}^E = \chi_{22}^E \neq \chi_{33}^E$ .

Матрицы (5) и (6) можно использовать при расчете параметров и характеристик физического состояния деформируемого пьезоэлектрика только в том случае, когда поворотная ось симметрии бесконечного порядка совпадает по направлению с координатной осью  $Ox_3$  (рис. 2). Во всех других ситуациях компоненты матриц (5) и (6) необходимо пересчитывать по формулам преобразования компонентов тензоров четвертого и второго рангов, которые записываются следующим образом:

$$c_{mnpq}^E = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\alpha_{qk}\alpha_{pl}c_{ijkl}^E, \quad \chi_{sr}^E = \alpha_{sm}\alpha_{rn}\chi_{mn}^E, \quad (7)$$

где  $c_{mnpq}^E$  и  $\chi_{sr}^E$  - компоненты матриц (5) и (6) в новой, повернутой системе координат;  $\alpha_{mi}, \dots, \alpha_{sr}$  - направляющие косинусы, т. е. косинусы углов между координатными осями повернутой системы координат и исходной, в которой направление поляризации совпадало с осью  $Ox_3$  и матрицы модулей упругости и диэлектрической проницаемости были заданы соотношениями (5) и (6). Преобразование матрицы пьезомодулей выполняется по формуле (2), в которой компоненты  $E_p^0$  определяются в новой системе координат. Сама же матрица сегнетоэлектрических констант, определенная соотношением (1), не меняет своей конструкции при любом произвольном повороте координатных осей.

При построении матриц материальных констант поляризованной по толщине сферической пьезокерамической оболочки необходимо принять во внимание, что единичные векторы (орты) правовинтовой декартовой системы координат (рис. 3) и сопряженной с ней сферической системы координат  $(r, \varphi, \vartheta)$  ( $0 \leq r < \infty$  - радиальная координата;  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  - азимутальная угловая координата;  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  - полярный угол) образуют подобные друг другу правовинтовые трехгранники (рис. 3). Из этого подобия следует подобие индексов координатных осей декартовой системы координат и символов криволинейных осей сферической системы координат, т. е.  $1 \sim r$ ;  $2 \sim \varphi$ ;  $3 \sim \vartheta$  ( $\sim$  - знак подобия).

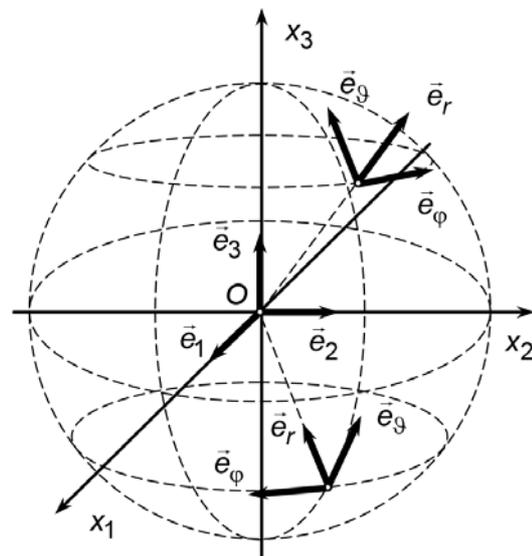


Рис. 3. К определению матрицы пьезомодулей поляризованной по толщине пьезокерамической оболочки

По этой причине в обобщенной матрице (3) пьезоэлектрических модулей поляризованной керамики следует положить  $E_1^0 \equiv E_r^0 \neq 0$ , а  $E_2^0 = E_3^0 = 0$ . После этих действий получаем следующий результат

$$\|e_{k\beta}\| = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{35} & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

где  $e_{11} \neq e_{12} = e_{13}$  и  $e_{26} = e_{35}$ . Численно пьезомодуль  $e_{11}$  равен справочному значению пьезомодуля  $e_{33}$ , если сферическая оболочка изготовлена из той же пьезокерамики, что и пластина (диск) для которой обычно приводятся

справочные данные. Пьезомодули  $e_{12}=e_{13}$  имеют те же значения, что и пьезомодули  $e_{31}=e_{32}$  из справочника. Пьезомодули  $e_{26}=e_{35}$  определяются через значения модулей  $e_{11}$  и  $e_{12}$  следующим образом  $e_{26}=e_{35}=(e_{11}-e_{12})/2$ .

Поворотная ось симметрии бесконечного порядка в поляризованной по толщине оболочке совпадает с произвольно выбранным направлением радиальной оси сферической системы координат. Совмещая радиальную ось с координатной осью  $Ox_1$ , получаем возможность наиболее простого определения направляющих косинусов в формулах (7). Выполнив преобразования, которые следуют из определений (7), получаем матрицы следующего вида:

$$\|c_{\lambda\beta}^E\| = \begin{pmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{22}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & 0 \\ & & & & & c_{55}^E \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$P^*(r, \varphi, \vartheta) = P_0^* \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{1/2}(kr) + P_0^* \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n (2n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) P(\cos \vartheta_0) P(\cos \vartheta) + 2P_0^* \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (-i)^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+1/2}(kr) P_n^m(\cos \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \quad (11)$$

где  $P_0^*$  - амплитуда избыточного давления во фронте плоской волны;  $k$  - модуль волнового вектора или волновое число гармонических колебаний материальных частиц жидкости;  $J_{n+1/2}(kr)$  - функция Бесселя дробного порядка;  $P_n(\xi)$  ( $\xi = \cos \vartheta_0; \cos \vartheta$ ) - функции Лежандра первого рода нулевого порядка степени  $n$ ;  $P_n^m(\xi)$  - присоединенные функции Лежандра порядка  $m$  степени  $n$ . Как видно из конструкции выражения (11), амплитудное значение  $P^*(r, \varphi, \vartheta)$  избыточного давления определяется

$$\varepsilon_{\lambda\beta}(\varphi, \vartheta) = \varepsilon_{\lambda\beta}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{\lambda\beta}^n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \varepsilon_{\lambda\beta}^{nm} P_n^m(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}, \quad (12)$$

где комбинации индексов  $\lambda$  и  $\beta$  принимают значения  $rr, \varphi\varphi, \vartheta\vartheta$  и  $\varphi\vartheta$ ;  $\varepsilon_{\lambda\beta}^0$  - центрально

$$\|\chi_{mn}^{\varepsilon}\| = \begin{pmatrix} \chi_{11}^{\varepsilon} & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^{\varepsilon} & 0 \\ & & \chi_{22}^{\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

При записи матриц (9) и (10) одинаковые по своей величине элементы обозначены одинаковыми символами. Между числовыми значениями элементов матрицы (9) и (5) имеются следующие соответствия:  $c_{11}^E \leftrightarrow c_{33}^E$ ;  $c_{22}^E \leftrightarrow c_{11}^E$ ;  $c_{12}^E \leftrightarrow c_{12}^E$ ;  $c_{44}^E \leftrightarrow c_{66}^E$ ;  $c_{55}^E \leftrightarrow c_{44}^E$ . Элемент матрицы (10)  $\chi_{11}^{\varepsilon}$  численно равен элементу  $\chi_{33}^{\varepsilon}$  матрицы (6), а элемент  $\chi_{22}^{\varepsilon}$  - элементу  $\chi_{11}^{\varepsilon}$ .

Амплитуда избыточного давления  $P^*(r, \varphi, \vartheta)$ , которое создается плоской волной в произвольной точке пространства с координатами  $(r, \varphi, \vartheta)$  представляется в виде разложения фазового множителя  $e^{-i(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}$  ( $k_1, k_2$  и  $k_3$  - проекции волнового вектора падающей плоской волны на оси декартовой системы координат  $(x_1, x_2, x_3)$  (рис. 3)) по сферическим гармоникам и записывается в следующем виде [9]:

как алгебраическая сумма центрально симметричной сферической гармоники (первое слагаемое в формуле (11)), совокупности тессеральных гармоник нулевого порядка (второе слагаемое) и системы тессеральных гармоник высших порядков (третье слагаемое).

Под действием избыточного давления, которое в сферической системе координат представляется в виде разложения (11) по сферическим гармоникам, оболочка деформируется и возникающие в ней деформации  $\varepsilon_{\lambda\beta}(\varphi, \vartheta)$  можно, в соответствии с разложением (11), представить следующим образом

симметричные составляющие диагональных компонентов матрицы тензора деформации;

$\varepsilon_{\lambda\beta}^n$  - осесимметричные составляющие;  $\varepsilon_{\lambda\beta}^{nm}$  - неосесимметричные составляющие всех компонентов тензора деформации оболочки.

Классическая теория пьезоэлектрических явлений в твердых телах [11] определяет их физическое состояние с помощью обобщенного закона Гука и закона электрической поляризации диэлектриков с усложненными свойствами. Эти феноменологические соотношения принято называть уравнениями состояния. В адиабатическом приближении их математическая формулировка имеет следующий вид

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (13)$$

$$D_m = e_{mij} \varepsilon_{ij} + \chi_{mn}^E E_n. \quad (14)$$

В соотношениях (13) и (14) предполагается суммирование по дважды повторяющимся индексам и приняты следующие обозначения:  $\sigma_{ij}$  - результирующее механическое напряжение, которое в деформируемом пьезоэлектрике равно алгебраической сумме упругого напряжения  $\sigma_{ij}^{уп} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl}$  ( $\varepsilon_{kl}$  - компонент тензора бесконечно малых деформаций) и поверхностной плотности сил Кулона  $\sigma_{ij}^{эл} = -e_{kij} E_k$  ( $E_k$  - k-й компонент вектора напряженности электрического поля в объеме деформируемого пьезоэлектрика);  $D_m$  - m-й компонент вектора результирующей электрической индукции, который определяется алгебраической суммой  $D_m^{уп} = e_{mij} \varepsilon_{ij}$  электрической поляризации, обусловленной упругими деформациями, и электрической (кулоновской) составляющей  $D_m^{эл} = \chi_{mn}^E E_n$ .

Запишем в явном виде уравнения физического состояния (13) и (14) поляризованной по толщине сферической пьезокерамической оболочки.

Принимая во внимание структуру матриц (8) – (10), получаем следующие выражения для расчета компонентов тензора результирующих механических напряжений:

$$\sigma_{rr} = c_{11}^E \varepsilon_{rr} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - e_{11} E_r, \quad (15)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{12}^E \varepsilon_{rr} + c_{22}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - e_{12} E_r, \quad (16)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = c_{12}^E \varepsilon_{rr} + c_{12}^E \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{22}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - e_{12} E_r, \quad (17)$$

$$\sigma_{\varphi\vartheta} = 2c_{44}^E \varepsilon_{\varphi\vartheta}, \quad (18)$$

$$\sigma_{r\vartheta} = 2c_{55}^E \varepsilon_{r\vartheta} - e_{26} E_\vartheta, \quad (19)$$

$$\sigma_{r\varphi} = 2c_{55}^E \varepsilon_{r\varphi} - e_{26} E_\varphi.$$

При записи соотношений (15) – (19), как и при записи матриц (9) и (10) одинаковые по величине материальные константы обозначены одинаковыми символами.

Компоненты вектора электрической индукции, определенные уравнением состояния (14), в объеме и на поверхности поляризованной по толщине сферической оболочки рассчитываются по следующим формулам:

$$D_r = e_{11} \varepsilon_{rr} + e_{12} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) + \chi_{11}^E E_r, \quad (20)$$

$$D_\varphi = 2e_{26} \varepsilon_{r\varphi} + \chi_{22}^E E_\varphi, \quad (21)$$

$$D_\vartheta = 2e_{26} \varepsilon_{r\vartheta} + \chi_{22}^E E_\vartheta. \quad (22)$$

Поскольку внутренняя и внешняя поверхности пьезокерамической оболочки полностью металлизированы, постольку, очевидно, на этих металлизированных участках поверхности должны абсолютно точно выполняться условия  $D_\varphi = D_\vartheta = 0$ . При этом так как оболочка настолько тонка (по определению), что её физическое состояние не меняется по её толщине, можно утверждать, что выполняется условие следующего смысла:  $D_\varphi = D_\vartheta = 0 \forall (r, \varphi, \vartheta) \in V$  (символом  $V$  обозначен объем сферической оболочки). При таком определении значений азимутального и полярного компонентов вектора электрической индукции из соотношений (21) и (22) немедленно следует, что

$$E_\varphi = -2e_{26} \varepsilon_{r\varphi} / \chi_{22}^E, \quad E_\vartheta = -2e_{26} \varepsilon_{r\vartheta} / \chi_{22}^E. \quad (23)$$

Подставляя соотношения (23) в выражения (19), получаем

$$\sigma_{r\vartheta} = 2c_{55}^D \varepsilon_{r\vartheta}; \quad \sigma_{r\varphi} = 2c_{55}^D \varepsilon_{r\varphi}, \quad (24)$$

где  $c_{55}^D = c_{55}^E + e_{26}^2 / \chi_{22}^E$  - модуль упругости, учитывающий совместное действие сил упругости и сил Кулона в объеме деформируемой пьезокерамической оболочки, т.е. учитывающий связность упругих и электрических полей.

Так как сферическая оболочка погружена в идеальную жидкость, то на её внешней поверхности, должны отсутствовать, как того требует третий закон Ньютона, касательные напряжения  $\sigma_{r\varphi}$  и  $\sigma_{r\vartheta}$ . Из-за малости толщины стенок оболочки необходимо потребовать, чтобы  $\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\vartheta} = 0 \forall (r, \varphi, \vartheta) \in V$ , откуда следует, что

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\vartheta} = 0 \forall (r, \varphi, \vartheta) \in V. \quad (25)$$

Из равенства (25) нулю сдвиговых компонентов тензора деформации следуют соотношения, которые связывают между собой компоненты  $u_r$ ,  $u_\varphi$  и  $u_\vartheta$  вектора смещения материальных частиц деформируемой оболочки. Эти соотношения записываются следующим образом:

$$u_\varphi = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi}, \quad u_\vartheta = \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta}. \quad (26)$$

Выражения (26) позволяют выполнить расчет осесимметричных и неосесимметричных составляющих напряженно-деформированного состояния оболочки.

Будем полагать, что внутри оболочки находится воздух. Тогда на её поверхности и в любой точке объема самой оболочки должно выполняться условие

$$\sigma_{rr} = \Delta P = \Delta P_0 = P^{\text{пад}} - P^{\text{отр}}, \quad (27)$$

где  $P^{\text{пад}}$  и  $P^{\text{отр}}$  - избыточные давления, которые формируются на внешней поверхности падающей и отраженной от поверхности оболочки ультразвуковой волной;  $\Delta P$  - разность избыточных давлений. Сравнивая между собой левые и правые части выражений (15) и (27), легко заметить, что

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\Delta P}{c_{11}^E} - \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) + \frac{e_{11}}{c_{11}^E} E_r. \quad (28)$$

Подставляя определенное соотношением (28) значение деформации сжатия-растяжения сферической оболочки вдоль радиально оси в формулы для расчета нормальных напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}$  и  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ , получаем

$$\sigma_{\varphi\varphi} = c_{22}^* \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{12}^* \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - e_{12}^* E_r + \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \Delta P, \quad (29)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = c_{12}^* \varepsilon_{\varphi\varphi} + c_{22}^* \varepsilon_{\vartheta\vartheta} - e_{12}^* E_r + \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \Delta P, \quad (30)$$

где  $c_{12}^* = c_{12}^E \left(1 - \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E}\right)$ ,

$c_{22}^* = c_{22}^E - \left(\frac{c_{12}^E}{c_{11}^E}\right)^2 / c_{11}^E$  - эффективные модули упругости деформируемой оболочки;  $e_{12}^* = e_{12} - e_{11} c_{12}^E / c_{11}^E$  - пьезоэлектрический модуль, соответствующий существующему в сферической оболочке напряженно-деформированному состоянию.

Подстановка выражения (28) в определение (20) радиального компонента  $D_r$  вектора электрической индукции дает следующий результат

$$D_r = e_{12}^* (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\vartheta\vartheta}) + \chi_{11}^* E_r + \frac{e_{12}}{c_{11}^E} \Delta P, \quad (31)$$

где  $\chi_{11}^* = \chi_{11}^E + e_{11} e_{12} / c_{11}^E$  - эффективная диэлектрическая проницаемость сферической пьезо-керамической оболочки.

Конструкция выражений (29) – (31) убедительно свидетельствует в пользу того, что в деформируемой сферической оболочке существуют напряженно-деформированное состояние сжатия-растяжения вдоль криволинейных осей азимутальной ( $\varphi$ ) и полярной ( $\vartheta$ ) угловых координат, параметры и характеристики которого могут быть определены с помощью методов классической теории упругости без привлечения аналитического аппарата теории пологих оболочек. Частотно зависимое изменение деформаций  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  и  $\varepsilon_{\vartheta\vartheta}$  практически полностью определяет частотно зависимое изменение радиального компонента вектора электрической индукции, который формирует выходной электрический сигнал сферической пьезокерамической оболочки при воздействии на неё изменяющегося во времени избыточного давления.

Так как электрическая поляризация деформируемой пьезокерамической оболочки полностью определяется радиальным компонентом  $D_r$  вектора электрической индукции, величина которого рассчитывается по формуле (31), то электрический заряд  $Q$ , который формируется на электродированной поверхности  $r=R_0$  оболочки свободными носителями электрического тока в результате воздействия на них электрического поля поляризационных зарядов деформируемого пьезоэлектрика, определяется следующим образом:

$$Q = - \int_S D_r dS = - R_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D_r(\varphi, \vartheta) \sin \varphi d\vartheta d\varphi. \quad (32)$$

Очевидно, что входящие в состав этого выражения величины  $E_r$  и  $\Delta P(R_0, \varphi, \vartheta)$  можно представить в виде разложений по центрально симметричным, осесимметричным и неосесимметричным составляющими, которые по форме и содержанию подобны разложению (12). После подстановки этих разложений в соотношение (32) получаем следующий результат

$$Q = - 4\pi R_0^2 D_r^0, \quad (33)$$

где

$$D_r^0 = e_{11}\epsilon_{rr}^0 + e_{12}(\epsilon_{\varphi\varphi}^0 + \epsilon_{\vartheta\vartheta}^0) + \chi_{11}^e E_r^0 \quad (34)$$

центрально симметричная составляющая радиального компонента вектора электрической индукции. При записи выражения (33) учтено то обстоятельство, что

$$\int_0^\pi P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = 0 \quad \forall n > 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} d\varphi = 0 \quad \forall m > 0$$

Таким образом, электрический заряд  $q(t)$ , который меняется во времени по гармоническому закону  $e^{i\omega t}$  с амплитудой  $Q$ , в случае полного электродирования поверхностей оболочки формируется исключительно центрально симметричными составляющими физических полей, которые существуют в объеме деформируемой пьезокерамической оболочки.

Амплитудное значение  $I$  переменного электрического тока  $i(t)$ , который протекает через нагрузочное сопротивление  $Z_H$  и формирует на нем падение электрического напряжения  $U_{\text{вых}} e^{i\omega t} = i(t) Z_H = I Z_H e^{i\omega t}$  определяется, очевидно, через скорость изменения электрического заряда  $q(t)$ , т. е.  $I = i\omega Q$ .

Амплитуда разности электрических потенциалов  $U_{\text{вых}}$  на электрической нагрузке  $Z_H$ , т. е. на электрическом выходе сферического гидрофона, определяется следующим образом

$$U_{\text{вых}} = I Z_H = -i\omega Z_H 4\pi R_0^2 D_r^0. \quad (35)$$

Очевидно, что все без исключения величины в составе выражения (34) линейным образом зависят от воздействия, т. е. от амплитудного значения  $\Delta P_0$  давления полного поля, сформированного за счет давления во фронте падающей на сферическую оболочку плоской волны и давления поля рассеяния. По этой причине можно записать, что

$$U_{\text{вых}} = \Delta P_0 W(\omega, \Pi), \quad (36)$$

где  $W(\omega, \Pi)$  - зависящая от частоты  $\omega$  и набора  $\Pi$  параметров физической системы функция, которая определяет чувствительность сферического гидрофона в режиме приема гармонически изменяющейся во времени плоской волны избыточного давления. По математиче-

скому смыслу функция  $W(\omega, \Pi)$  является математической моделью сферического пьезокерамического приемника гармонических плоских волн избыточного давления. Именно таким смыслом наделен термин «математическая модель» объекта или явления в определении академика А.Н. Тихонова [15].

Для того, чтобы построить математическую модель или, что то же самое, частотную характеристику сферического гидрофона в режиме приема гармонической плоской волны избыточного давления необходимо определить центрально симметричные компоненты физических полей, т. е. величины  $\epsilon_{rr}^0$ ,  $\epsilon_{\varphi\varphi}^0$ ,  $\epsilon_{\vartheta\vartheta}^0$ ,  $E_r^0$  и  $\Delta P_0(R_0)$ , через амплитуду избыточного давления  $P_0^*$ .

В случае центральной симметрии деформации  $\epsilon_{\varphi\varphi}^0 = \epsilon_{\vartheta\vartheta}^0 = u_r^0 / R_0$ , где  $u_r^0$  - центрально симметричный компонент вектора радиальных смещений, образуют следующий набор компонентов тензора результирующих напряжений (см. общие соотношения (29) и (30)):

$$\sigma_{\varphi\varphi}^0 = Y \frac{u_r^0}{R_0} - e_{12}^* E_r^0 + \frac{c_{12}^E}{c_{12}^E} \Delta P_0(R_0), \quad (37)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^0 = Y \frac{u_r^0}{R_0} - e_{12}^* E_r^0 + \frac{c_{12}^E}{c_{12}^E} \Delta P_0(R_0), \quad (38)$$

где  $Y = c_{12}^* + c_{22}^*$  - модуль упругости;  $\Delta P_0(R_0) = P_0^*(R_0) - P_0^0(R_0)$ ;

$P_0^*(R_0) = P_0^* \sqrt{\frac{\pi}{2kR_0}} J_{1/2}(kR_0)$  - частотно зависящая амплитуда избыточного давления в па-

дающей волне;  $P_0^0(R_0) = -\frac{\lambda}{R_0^2} A_0 P_0(R_0)$  - цен-

трально симметричная составляющая амплитуда давления в рассеяной волне;  $A_0$  - подлежащая определению константа;

$P_0(R_0) = (kR_0)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kR_0}} H_{1/2}^{(2)}(kR_0)$ . При этом

$$\sigma_{rr}^0 = \Delta P_0(R_0).$$

Для того, чтобы определить радиальный компонент  $E_r^0$  вектора напряженности электрического поля в объеме деформируемой пьезокерамической оболочки, обратимся к условию  $\text{div } \vec{D} = 0$  отсутствия свободных носителей электричества в пьезокерамике. Так как вектор  $\vec{D}^0$

определяется единственным компонентом  $D_r^0$ , то из записанного выше условия следует, что

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r^0) = 0.$$

Из последнего уравнения определяется величина  $D_r^0$

$$D_r^0 = \frac{C_1}{r^2}, \quad (39)$$

где  $C_1$  - подлежащая определению константа.

Так как

$$\sigma_{rr}^0 = c_{11}^E \varepsilon_{rr}^0 + \frac{2c_{12}^E}{R_0} u_r^0 - e_{11} E_r^0 = \Delta P_0(R_0),$$

то

$$\varepsilon_{rr}^0 = -\frac{2c_{12}^E}{c_{11}^E R_0} u_r^0 + \frac{e_{11} E_r^0}{c_{11}^E} + \frac{\Delta P_0(R_0)}{c_{11}^E},$$

и выражение (34) для расчета центрально симметричного компонента  $D_r^0$  принимает следующий вид

$$D_r^0 = \frac{2e_{12}^*}{R_0} u_r^0 + \chi_{11}^* E_r^0 + \frac{e_{11}}{c_{11}^E} \Delta P_0(R_0), \quad (40)$$

где  $e_{12}^* = e_{12} - e_{11} c_{12}^E / c_{11}^E$ ;  $\chi_{11}^* = \chi_{11}^E + e_{11}^2 / c_{11}^E$ .

С учетом определения (40) получаем из выражения (39) следующее значение компонента  $E_r^0$

$$E_r^0 = \frac{C_1}{\chi_{11}^* r^2} - \frac{2e_{12}^*}{\chi_{11}^* R_0} u_r^0 - \frac{e_{11}}{\chi_{11}^* c_{11}^E} \Delta P_0(R_0). \quad (41)$$

Подставляя выражение (41) в формулы для расчета компонентов тензора напряжений  $\sigma_{\varphi\varphi}^0$

и  $\sigma_{\vartheta\vartheta}^0$ , получаем

$$\sigma_{\varphi\varphi}^0 = \sigma_{\vartheta\vartheta}^0 = k_0 \Delta P(R_0) + Y^D \frac{u_r^0}{R_0} - \frac{e_{12}^*}{\chi_{11}^* R_0^2} C_1, \quad (42)$$

где 
$$k_0 = \frac{c_{12}^E}{c_{11}^E} \left( 1 + \frac{e_{12}^* e_{11}}{\chi_{11}^* c_{12}^E} \right);$$

$Y^D = c_{12}^* + c_{22}^* + 2(e_{12}^*)^2 / \chi_{11}^*$  - модуль упругости пьезокерамической оболочки, который учитывает связность сил упругости и сил Кулона в объеме деформируемой пьезокерамики.

Так как  $E_r^0 = -\partial\varphi^0/\partial r$ , где  $\varphi^0$  - потенциал центрально симметричного электрического поля, то, интегрируя левую и правую части выра-

жения (41) по радиальной координате, получаем следующее определение потенциала  $\varphi^0$

$$\varphi^0 = \frac{C_1}{\chi_{11}^* r} + C_2 + \left[ \frac{e_{11}}{\chi_{11}^* c_{11}^E} \Delta P_0(R_0) + \frac{2e_{12}^*}{\chi_{11}^* R_0} u_r^0 \right] (r - R_0), \quad (43)$$

где  $C_2$  - подлежащая определению константа.

Определенный выражением (43) потенциал должен удовлетворять очевидным условиям:

$$\varphi^0 \Big|_{r=R_0+\alpha} = 0, \quad (44)$$

$$\varphi^0 \Big|_{r=R_0} = U_{\text{ввых}} = -i\omega Z_H 4\pi C_1. \quad (45)$$

Напряжения  $\sigma_{rr}^0$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}^0$  и  $\sigma_{\vartheta\vartheta}^0$  и смещения  $u_r^0$  удовлетворяют уравнению установившихся гармонических радиальных колебаний поверхности оболочки, т. е. второму закону Ньютона в дифференциальной форме, который для центрально симметричных компонентов напряженно-деформированного состояния записывается в следующем виде [10]

$$\frac{1}{R_0} (2\sigma_{rr}^0 - \sigma_{\varphi\varphi}^0 - \sigma_{\vartheta\vartheta}^0) + \rho_0 \omega^2 u_r^0 = 0 \quad (46)$$

и условиям кинематического сопряжения поверхности колеблющейся оболочки с окружающей средой, которое записывается в следующем виде

$$u_r^0 = (u_r^0 \text{ пад} - u_r^0 \text{ отр}) \Big|_{r=R_0}, \quad (47)$$

где  $u_r^0 \text{ пад}$  и  $u_r^0 \text{ отр}$  - центрально симметричные составляющие радиальных смещений жидкости в падающей и отраженной ультразвуковых волнах.

Для определения компонентов вектора смещения материальных частиц жидкости в падающей плоской волне избыточного давления введем скалярный потенциал  $\Phi^*(r, \varphi, \vartheta) e^{i\omega t}$ , градиент которого определяет компоненты вектора смещения материальных частиц среды  $\bar{U}^*(r, \varphi, \vartheta) e^{i\omega t}$  в падающей на сферическую оболочку волне, и амплитуда которого связана с амплитудой избыточного давления  $P^*(r, \varphi, \vartheta)$  следующим образом

$$P^*(r, \varphi, \vartheta) = -\lambda k^2 \Phi^*(r, \varphi, \vartheta), \quad (48)$$

где  $\lambda$  - модуль всестороннего сжатия жидкости, определяющий скорость распространения  $v_{ж}$  упругих возмущений по формуле  $v_{ж} = \sqrt{\lambda/\rho_{ж}}$  ( $\rho_{ж}$  - плотность жидкости; при  $v_{ж} = 1500$  м/с и

$\rho_{ж} = 1070 \text{ кг/м}^3$  модуль  $\lambda = 2,74 \text{ ГПа}$ ;  $k^2$  - квадрат волнового числа.

Из определения (48) можно найти выражение для расчета амплитудного значения  $\Phi^*(r, \varphi, \vartheta)$  скалярного потенциала, после чего можно определить амплитудное значение

$$U_r^*(r, \varphi, \vartheta) = \frac{P_0^* r}{\lambda} U_0(kr) - \frac{P_0^* r}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(r, \vartheta_0) P_n(\cos \vartheta) - \frac{P_0^* r}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n U_{nm}(r, \vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)], \quad (49)$$

где

$$U_0(kr) = \frac{1}{kr} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{3/2}(kr); \quad U_n(r, \vartheta_0) = \frac{(-i)^n}{kr} (2n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \left[ -J_{n+3/2}(kr) + \frac{n}{kr} J_{n+1/2}(kr) \right] P_n(\cos \vartheta);$$

$$U_{nm}(r, \vartheta_0) = \frac{(-i)^n}{kr} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \left[ -J_{n+3/2}(kr) + \frac{n}{kr} J_{n+1/2}(kr) \right] P_n^m(\cos \vartheta).$$

Падающая на упругую оболочку гармоническая волна избыточного давления порождает в ней упругие колебания, которые формируют отраженную звуковую волну (рассеянное поле), давления и смещения в которой можно описать с помощью скалярного потенциала  $\Psi(r, \varphi, \vartheta) e^{i\omega t}$ . Амплитудное значение  $\Psi(r, \varphi, \vartheta)$

$U_r^*(r, \varphi, \vartheta)$  радиального компонента вектора смещения материальных частиц жидкости в падающей на оболочку волне избыточного давления. Формула для расчета смещения  $U_r^*(r, \varphi, \vartheta)$  записывается в следующем виде:

скалярного потенциала отраженной волны удовлетворяет уравнению Гельмгольца, т. е.

$$\nabla^2 \Psi(r, \varphi, \vartheta) + k^2 \Psi(r, \varphi, \vartheta) = 0. \quad (50)$$

Общее решение уравнения (50) в сферической системе координат  $(r, \varphi, \vartheta)$ , связанной с центром упругой оболочки, записывается следующим образом:

$$\Psi(r, \varphi, \vartheta) = A_0 \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{1/2}^{(2)}(kr) + \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n H_{n+1/2}^{(2)}(kr) P_n(\cos \vartheta) + \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n A_{nm} H_{n+1/2}^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}, \quad (51)$$

где  $A_0$ ,  $A_n$  и  $A_{nm}$  - подлежащие определению в ходе решения задачи коэффициенты;  $H_{n+1/2}^{(2)}(kr)$  - функция Ханкеля второго рода.

Амплитудное значение  $P_0(r, \varphi, \vartheta)$  избыточного давления в отраженной волне определяется через скалярный потенциал и выражение для его расчета записывается в следующем виде

$$P_0(r, \varphi, \vartheta) = -\lambda k^2 \Psi(r, \varphi, \vartheta) = -\frac{\lambda}{r^2} A_0 P_0(r) - \frac{\lambda}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(r, \vartheta) - \frac{\lambda}{r^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n A_{nm} P_{nm}(r, \vartheta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}, \quad (52)$$

где

$$P_0(r) = (kr)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{1/2}^{(2)}(kr);$$

$$P_n(r, \vartheta) = (kr)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr) P_n(\cos \vartheta);$$

$$P_{nm}(r, \vartheta) = (kr)^2 \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{n+1/2}^{(2)}(kr) P_n^m(\cos \vartheta).$$

Амплитудные значения компонентов векто -

ра  $\vec{W}(r, \varphi, \vartheta)$  смещения материальных частиц жидкости, которые формируются отраженной звуковой волной, определяются стандартным образом

$$\vec{W}(r, \varphi, \vartheta) = \text{grad} \Psi(r, \varphi, \vartheta).$$

Из последнего соотношения следует выражение для расчета амплитуды  $W_r(r, \varphi, \vartheta)$  радиального компонента:

$$W_r(r, \varphi, \vartheta) = \frac{\partial \Psi(r, \varphi, \vartheta)}{\partial r} = \frac{A_0}{r} W_0(r) + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n(r, \vartheta) + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n A_{nm} W_{nm}(r, \vartheta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix}, \quad (53)$$

где

$$W_0(r) = -(kr) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H_{3/2}^{(2)}(kr);$$

$$W_n(r) = (kr) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \left[ -H_{n+3/2}^{(2)}(kr) + \frac{n}{kr} H_{n+1/2}^{(2)}(kr) \right] P_n(\cos \vartheta);$$

$$W_{nm}(r) = (kr) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} \left[ -H_{n+3/2}^{(2)}(kr) + \frac{n}{kr} H_{n+1/2}^{(2)}(kr) \right] P_n^m(\cos \vartheta).$$

Условия (44), (45), уравнение (46) и условие (47) образуют алгебраическую систему из четырех уравнений, в которой содержатся четыре неизвестных константы  $C_1, C_2, A_0$  и  $u_r^0$ . Переименуем эти константы следующим образом:  $M_1 = C_1; M_2 = C_2; M_3 = u_r^0$  и  $M_4 = A_0$ . Тогда указанная система уравнений может быть записана следующим образом

$$m_{kn} M_n = P_0^* q_n, \quad k, n = 1, \dots, 4, \quad (54)$$

где  $m_{11} = \frac{1}{\chi_{11}^* R_0} (1 + i\omega C_0^* Z_H \alpha / R_0);$

$C_0^* = 4\pi R_0^2 \chi_{11}^* / \alpha$  - статическая электрическая емкость сферической пьезоэлектрической оболочки;  $m_{12} = 1; m_{13} = m_{14} = 0; q_1 = 0;$

$$m_{21} = \frac{1}{\chi_{11}^* (R_0 + \alpha)}; \quad m_{22} = 1; \quad m_{23} = \frac{2e_{12}^* \alpha}{\chi_{11}^*};$$

$$m_{24} = \frac{\alpha e_{11} \omega^2 \rho_{ж}}{\chi_{11}^* c_{11}^E} \sqrt{\frac{\pi}{2kR_0}} H_{1/2}^{(2)}(kR_0); \quad \rho_{ж} - \text{плотность жидкости};$$

$$k - \text{волновое число упругих колебаний жидкости}; \quad q_2 = -\frac{\alpha e_{11}}{\chi_{11}^* c_{11}^E} \sqrt{\frac{\pi}{2kR_0}} J_{1/2}(kR_0);$$

$$m_{31} = \frac{2e_{12}^*}{R_0 \chi_{11}^* \gamma^D}; \quad m_{32} = 0; \quad m_{33} = -\left[ 2 - (\gamma_r R_0)^2 \right];$$

$$D_c(kR_0) = \left\{ \frac{4(1+k_0)c_{11}^E}{\gamma^D} - \frac{e_{11}}{e_{12}^*} \left[ 2 - (\gamma_r R_0)^2 \right] \right\} \left[ J_{1/2}(kR_0) H_{3/2}^{(2)}(kR_0) - J_{3/2}(kR_0) H_{1/2}^{(2)}(kR_0) \right];$$

$$D_0(kR_0) = D_0^*(kR_0) + \left( 1 + i\omega C_0^* Z_H \frac{\alpha}{R_0} \right) \left\{ \left[ 2 - (\gamma_r R_0)^2 \right] H_{3/2}^{(2)}(kR_0) - \frac{2\lambda}{\gamma^D} (1+k_0)(kR_0) H_{1/2}^{(2)}(kR_0) \right\};$$

$\lambda$  - модуль всестороннего сжатия жидкости, причем  $\lambda = \rho_{ж} v_{ж}^2$ ;  $v_{ж}$  - скорость распространения звука в жидкости;

$\gamma_r = \frac{\omega}{\sqrt{\gamma^D / \rho_0}}$  - волновое число радиальных колебаний пьезокерамической оболочки;  $\rho_0$  - плотность пьезокерамики;

$m_{34} = \frac{2R_0(1+k_0)}{\gamma^D} \omega^2 \rho_{ж} \sqrt{\frac{\pi}{2kR_0}} H_{1/2}^{(2)}(kR_0);$

$$q_4 = \frac{2R_0(1+k_0)}{\gamma^D} \sqrt{\frac{\pi}{2kR_0}} J_{1/2}(kR_0); \quad m_{41} = m_{42} = 0;$$

$$m_{43} = 1; \quad m_{44} = -k \sqrt{\frac{\pi}{2kR_0}} H_{3/2}^{(2)}(kR_0);$$

$$q_4 = \frac{k}{\omega^2 \rho_{ж}} \sqrt{\frac{\pi}{2kR_0}} J_{3/2}(kR_0).$$

Решение системы уравнений (54) относительно константы  $C_1$  записывается следующим образом

$$C_1 = P_0^* \frac{e_{12}^* R_0 \alpha}{c_{11}^E} D(kR_0), \quad (55)$$

где

$$D(kR_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2kR_0}} \frac{D_c(kR_0)}{D_0(kR_0)};$$

$$D_0^*(kR_0) = \frac{1}{1 + \alpha/R_0} \left\{ \left[ 2 - (\gamma_r R_0)^2 \right] H_{3/2}^{(2)}(kR_0) - \right. \\ \left. - \frac{2\lambda}{\gamma^D} (1 + k_0)(kR_0) H_{1/2}^{(2)}(kR_0) \right\} + 2K^2 \frac{\alpha}{R_0} \left[ 2H_{3/2}^{(2)}(kR_0) + \frac{e_{11}\lambda}{e_{12}^* c_{11}^E} (kR_0) H_{1/2}^{(2)}(kR_0) \right];$$

$$K^2 = \frac{(e_{12}^*)^2}{\chi_{11}^* \gamma^D} \quad - \text{квадрат электромеханической}$$

связи пьезокерамики для режима центрально симметричных радиальных колебаний оболочки.

После определения константы  $C_1$  в форме (55) можно записать выражение для расчета амплитудного значения сигнала на электрическом выходе сферического гидрофона в следующем виде

$$U_{\text{вых}} = -i\omega C_0^* Z_H P_0^* \frac{e_{12}^* \alpha^2}{\chi_{11}^* c_{11}^E R_0} D(kR_0). \quad (56)$$

Из сопоставления между собой выражений (36) и (56) следует, что чувствительность сферического пьезокерамического гидрофона в режиме приема плоской гармонической волны избыточного давления определяется следующим образом

$$W(\omega, \Pi) = -i\omega C_0^* Z_H \frac{e_{12}^* \alpha^2}{\chi_{11}^* c_{11}^E R_0} D(kR_0). \quad (57)$$

В том случае, когда  $Z_H \rightarrow \infty$ , что соответствует режиму холостого хода в смысле электрической нагрузки ультразвукового преобразователя, из общего выражения (57) следует соотношение для расчета  $W_{xx}(\omega, \Pi)$ , т. е. чувствительности сферического гидрофона в режиме холостого хода

$$W_{xx}(\omega, \Pi) = -\frac{e_{12}^* \alpha}{\chi_{11}^* c_{11}^E} D_{xx}(kR_0). \quad (58)$$

$$\text{где } D_{xx}(kR_0) = \sqrt{\frac{\pi}{2kR_0}} \frac{D_c(kR_0)}{D_{xx}(kR_0)};$$

На рис. 4 показан график модуля чувствительности  $W_{xx}(\omega, \Pi)$  сферического гидрофона из пьезокерамики типа ЦТС со следующим набором материальных параметров:  $c_{11}^E = 106$  ГПа;  $c_{12}^E = 62$  ГПа;  $c_{22}^E = 112$  ГПа; добротность пьезокерамики  $Q = 100$ ;  $\rho_0 = 7400$  кг/м<sup>3</sup>;  $e_{11} = 18$  Кл/м<sup>2</sup>;  $e_{12} = -7$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\chi_{11}^E = 1000\chi_0$ ;  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м - диэлектрическая проницаемость вакуума; толщина обо-

лочка  $\alpha = 10^{-3}$  м; радиус  $R_0 = 10^{-2}$  м. При этом электрическая статическая емкость пьезокерамической оболочки  $C_0^* = 9,63 \cdot 10^{-9}$  Ф. Параметры жидкости:  $\rho_{ж} = 1070$  кг/м<sup>3</sup>;  $v_{ж} = 1500$  м/с. По оси ординат отложены значения  $|W_{xx}(\omega, \Pi)/W_{xx}(0, \Pi)|$  в децибелах. Абсолютная чувствительность  $W_{xx}(0, \Pi)$  в квазистатическом режиме ( $\omega \approx 0$ ) составляет 65,9 мкВ/Па. По оси абсцисс отложены значения безразмерного волнового числа  $kR_0$ . Хорошо видно, что в предшествующем радиальному резонансу частотном диапазоне наблюдается монотонное уменьшение чувствительности гидрофона почти что на 6 дБ. Это объясняется эффектами упругого взаимодействия оболочки с окружающей средой, т. е. возрастанием её отражательной способности.

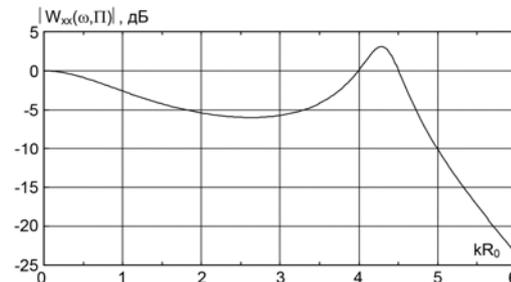


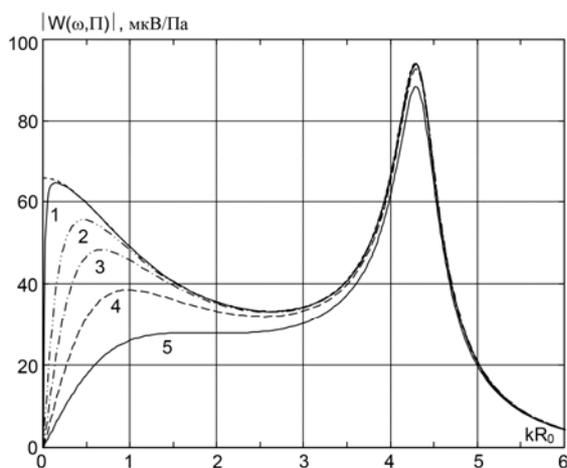
Рис. 4. График чувствительности сферического пьезокерамического гидрофона в режиме холостого хода

Таким образом, уменьшение чувствительности сферического гидрофона практически на 6 дБ является объективным фактором, который обусловлен упругостью и формой сферической оболочки. Это уменьшение чувствительности будет наблюдаться для всех без исключения сферических приемников ультразвуковых колебаний в жидкости. В этой ситуации единственным способом управления параметрами частотной характеристики гидрофона является изменение его электрической нагрузки.

Действительно, чувствительность  $W_{xx}(\omega, \Pi)$  в режиме холостого хода является довольно абстрактным понятием, поскольку приводит к нереальному результату – конечному значению разности потенциалов на электрической сторо-

не преобразователя при его статическом нагружении. Известно, что ни один из пьезоэлектрических преобразователей не работает в статическом режиме, т. е. на нулевой частоте. На нулевой частоте чувствительность любого пьезоэлектрического преобразователя равна нулю. Как видно из приведенного графика (рис. 4), чувствительность  $W_{xx}(\omega, \Pi)$  при  $\omega=0$  равна нулю.

Более адекватные реальной ситуации результаты можно получить при исследовании математической модели сферического приемника, которая задается соотношением (57).



**Рис. 5. Графики чувствительности сферического гидрофона при различных значениях модуля электрического импеданса электрической нагрузки**

На рис. 5 показана серия кривых, которые отражают частотно зависимое изменение модуля чувствительности  $W(\omega, \Pi)$ , определенной выражением (57) для сферического гидрофона с тем же набором параметров, которые были использованы при расчете чувствительности  $W_{xx}(\omega, \Pi)$ . По оси ординат на рис. 5 отложены значения модуля чувствительности гидрофона в микровольтах деленных на паскаль. По оси абсцисс – безразмерные волновые числа  $kR_0$ . Изменяющимся параметром семейства кривых, показанных на рис. 5, является относительное значение постоянной времени электрической нагрузки  $\hat{\tau}_3 = \tau_3 / \tau_0$ , где  $\tau_3 = C_0^* Z_H$  - абсолютное значение постоянной времени электрической нагрузки;

$kR_0 > 0,2 \quad \tau_0 = R_0 / v_{ж} = 10^{-2} / 1600 = 0,625 \text{ мкс}$  - временной масштаб. Модуль чувствительности  $W_{xx}(\omega, \Pi)$  в режиме холостого хода изображен на рис. 5 штриховой кривой. При  $\hat{\tau}_3 = 100000$

(кривая под номером 1 на рис. 5) реальная чувствительность  $W(\omega, \Pi)$  при практически не отличается от чувствительности в режиме холостого хода. По мере уменьшения параметра  $\hat{\tau}_3$  (кривая 2 построена для  $\hat{\tau}_3 = 10000$ ; кривой 3 соответствует  $\hat{\tau}_3 = 5000$ ;  $\hat{\tau}_3 = 2500$  для кривой 4; кривая 5 -  $\hat{\tau}_3 = 1250$ ) происходит общее снижение уровня чувствительности с одновременным уменьшением неравномерности частотной характеристики в диапазоне безразмерных волновых чисел от  $kR_0 = 0,5$  до  $kR_0 = 3$ . При выбранных для расчета параметров пьезокерамики и размерах сферической оболочки, относительному значению  $\hat{\tau}_3 = 1250$  соответствует модуль электрического импеданса  $Z_H \approx 1 \text{ МОм}$ .

Таким образом, изменяя значения электрической нагрузки сферического гидрофона можно добиться практически линейной частотной характеристики в широком частотном диапазоне. Расплатой за это достижение является снижение уровня чувствительности сферического гидрофона во всей полосе рабочих частот.

## Выводы

Построена теория монолитного сферического гидрофона, представленного тонкостенной радиально поляризованной пьезокерамической оболочкой с полностью электродированными поверхностями, которая учитывает эффекты упругого взаимодействия оболочки с окружающей средой, опирается на классическую теорию пьезоэлектрических явлений и полностью объясняет экспериментально наблюдаемые результаты.

## Список использованных источников

1. Аронов Б.С. Электро-механические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. -Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 271 с.
2. Боббер Р. Дж. Гидроакустические измерения. Пер. с англ./ Под ред. А.Н. Голенкова. – М.: Мир, 1974. –359 с.
3. Подводные электроакустические преобразователи. Расчет и проектирование. Справочник: / Под ред. В.В. Богородского – Л.: Судостроение, 1983. – 248 с.
4. Гринченко В.Т., Вовк І.В., Маципура В.Т. Основы акустики. – К.: Наукова думка, 2007 – 640с.
5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах

- конструкції: В 5 т. – К.: Наукова думка, 1989. – Т.5. Електроупругість. – 280 с.
6. Дидковський В.С., Климів А.Е., Лейко А.Г., Петрищев О.Н. Радиальні коливання циліндричної п'єзокерамічної оболочкі// Електроніка і зв'язь.-2009.-№ 6(53). –С. 31-40.
  7. Коржик А.В. Амплитудно-частотні характеристики деяких форм коливань п'єзокерамічних циліндричних приймачів звуку при різних видах електродування в умовах зв'язності // Акустичний вісник, 2009.-Т.12,-№ 3. – С.33-40.
  8. Коржик О.В., Найда С.А., Денисенко В.І. Один із методів розв'язання задачі стаціонарної гідроелектропружності для режиму прийому звукових хвиль антенними решітками, що утворені системами стержневих перетворювачів// Техническая диагностика и неразрушающий контроль, - 2012.- № 1. – С.29–34.
  9. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методи теоретическої фізики. Том 2. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 886 с.
  10. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 873 с.
  11. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
  12. Петрищев О.Н., Коржик А.В., Филиппова Н.Ю. Осесимметричные колебания циліндричної п'єзокерамічної оболочкі конечной высоты// Електроніка і зв'язь. – 2011. – №6. – С. 33-39
  13. Савин В.Г. Преобразование акустических импульсов в электрические циліндричної п'єзокерамічної оболочкой//Акуст. журнал, 1992. – Т. 33. вып.1. – С.144–149.
  14. Савин В.Г. , Моргунов И.О. Реакция экранированных сферических преобразователей на импульсное акустическое воздействие//Информационные системы, механика та керування , -2009.- № 2. – С.11–24.
  15. Тихонов А.Н. Математическая модель // Математическая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – Т.3. – С. 574 – 575.

Поступила в редакцию 18 марта 2014 г.

УДК 534.6

**О.М. Петрищев**, д-р.тех.наук, **О.В. Коржик**, д-р.тех.наук

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,  
вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

## Розрахунок частотної характеристики сферичного монолітного п'єзокерамічного гідрофону

В рамках задачі стаціонарної гідроелектропружності про прийом звукових хвиль електропружною сферою отримано аналітичний розв'язок для суцільного радіально поляризованого перетворювача з повним електродуванням поверхонь. При цьому розраховано частотну характеристику чутливості сферичного гідрофону в широкій смузі частот та проведено співставлення з експериментальними даними. Бібл. 15, рис.5.

**Ключові слова:** гідрофон, сферичний гідрофон, частотна характеристика, задача гідроелектроупругості, акустичне поле, математична модель.

UDC 534.6

**O.N. Petrishchev**, Dr.Sc., **A.V. Korzhyk**, Dr.Sc.

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",  
st. Polytechnichna, 16, Kyiv, 03056, Ukraine.

## Calculation of the frequency response of a spherical monolithic piezoceramic hydrophone

In order to the "through" hydroacoustic problem the modeling and analytic solutions the tasks about the receiving of sound waves by electroelastic spherical thin-shell was obtained. The model based on the spherical thin-shell with full electrodes surfaces for radial type polarization. The amplitude-frequency characteristics of the sensibility have been calculated for wide frequency diapason. Reference 15, figures 5.

**Keywords:** hydrophone, spherical hydrophone, frequency response, hydroelectroelasticity task, acoustic field, mathematical model.

## References

1. Aronov B. S. (1990), «Electro-mechanical transducers of piezoelectric ceramics». Leningrad, Energoatomizdat. P. 271. (Rus)
2. Bobber R. J. (1974), «Hydroacoustic measurements». Ed. A. N. Golenkova. Moscow, Mir. P. 359. (Rus)
3. V. V. Bogorodskii (1983), «Underwater electroacoustic transducers. Calculation and Designing Directory». Leningrad, Sudostroenie. P. 248. (Rus)
4. Hrinchenko V.T., Vovk I.V., Matsipura V.T. (2007), «Fundamentals of acoustics». Kiev, Naukova Dumka. P. 640. (Ukr)
5. Hrinchenko V.T., Uliitko A.F., Shulga N.A. (1989), «Mechanics related fields in structural elements». Kiev: Naukova Dumka . Vol.5 . Electroelasticity. P. 280. (Rus)
6. Didkovskij V.S., Klimov A.E., Leiko A.G., Petrishchev O.N. (2009), «Radial oscillations of a cylindrical piezoceramic shell». Electronics and communications, No 6 (53). pp. 31 – 40. (Rus)
7. Korzhik A.V. (2009), «Amplitude-frequency characteristics of some waveforms piezoceramic cylindrical sound receivers at various kinds elektrodivovaniya under bondage». Akustichny visnyk , Vol.12, No 3. pp.33 – 40. (Rus)
8. Korzhik O.V., Naida S.A., Denisenko V.I. (2012), «One of metodiv rozv'yazannya zadachi statsionarnoi gidroelektropruzhnosti regime for Priya sound Hvilya antenna reshitkami scho utvoreni systems sterzhnovih peretvoryuvachiv». // Technical diagnostics and nondestructive testing, No 1. pp. 29 – 34. (Ukr).
9. Morse P.M., Feshbach G. (1960), «Methods of Theoretical Physics». Vol. 2. Moscow: Foreign Literature Publishing House. P. 886. (Rus)
10. Novatskiy V. (1975), «Theory of elasticity». Moscow, Mir. P. 875 . (Rus)
11. Novatskiy V. (1986), «Electromagnetic effects in solids». Moscow, Mir. P. 160. (Rus)
12. Petrishchev O.N., Korzhik A.V., Filippov N.Y. (2011), «Axisymmetric oscillations of a cylindrical piezoceramic shell finite height». Electronics and Communications, No 6. pp. 33-39. (Rus)
13. Savin V.G. (1992), «Converting acoustic pulses into electrical cylindrical piezoceramic shell». Acoustic magazine, Vol. 33. Issue 1. P.144 -149
14. Savin V.G., Morgunov I.O. (2009), «Reaction shielded spherical transducers on acoustic impact impulse». Information Systems, Engineering and Management, No 2. P.11 -24 .
15. Tikhonov A.N. (1982), «Mathematical model». Mathematical Encyclopedia. Moscow, Sovetskaya entsiklopediya, Vol.3. Pp. 574 – 575.