Акустические приборы и системы

УДК 534.21

В.С. Дидковский, д-р тех. наук, **С.С. Калинин**, **С.А. Лунева**, канд. физ.-мат. наук
Национальный технический университет Украини "Киевський политехнический институт",
ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

Метод анализа звуковых полей в узких конических трубах с жёсткими стенками

Разрабатывается метод анализа частотных и импедансных характеристик узких труб с линейно изменяющимся сечением на основе теории четырёхполюсников. Получены выражения для сопротивлений эквивалентной Т-образной схемы, заменяющей такую трубу. Предлагаемый метод является дальнейшим развитием метода анализа полей в трубах постоянного сечения с использованием электроакустических аналогий. Библ. 6, рис. 4.

Ключевые слова: *жесткостенные конические трубы, частотная характеристика, электроакустические аналогии.*

Введение

При решении ряда практических задач, в частности, связанных с проектированием различных технологических трубопроводов, созданием духовых музыкальных инструментов, деталей архитектурных конструкций, исследовании свойств элементов слуховой и речевой систем человека, возникает необходимость анализа акустического поля в трубах конечной длины. Для этих целей удобно использование инженерных методов, предоставляющих расчётные соотношения, которые позволяют получить числовые значения параметров поля в рамках принятых при постановке задачи допущений.

В жёсткостенных трубах малого волнового диаметра, длина которых значительно превосходит длину волны, анализ акустического поля может быть выполнен на основе метода электроакустических аналогий, предполагающего представление трубы в виде эквивалентного четырёхполюсника. Этот метод детально разработан для труб постоянного сечения и позволяет исследовать их частотные и импедансные свойства путём решения эквивалентных электроакустических схем, моделирующих трубу [1,2,5].

Однако, во многих практических случаях модель такого волновода невозможно представить отрезками трубок постоянного сечения. Зачастую, поперечное сечение трубы изменяется по линейному закону вдоль ее длины. Расчёт же полей в таких трубах с применением формул для труб постоянного сечения приводит к существенным погрешностям.

Исходя из практических потребностей, авторами статьи развивается метод анализа акустических полей в трубах с линейно изменяющимся сечением. При этом соотношения для цилиндрических труб представляют собой частный случай более общего решения задачи.

Звуковое поле в узких конических трубах

Трубу с линейно изменяющимся сечением будем полагать узкой, если диаметр (d) выходного отверстия мал по сравнению с длиной (λ) звуковой волны (1):

$$d<0{,}61\cdot\lambda \qquad (1)$$

В такой трубе конического профиля с жесткими стенками, представляющей собой сектор сферы радиуса *r,* распространяется сферически-симметричная одномерная волна [4].

На том основании что, если вдоль трубы с жесткими стенками распространяется только одномерная волна любого профиля, ее можно рассматривать как длинную линию [3], представим коническую трубу в виде эквивалентной Т-образной электроакустической схемы. Для определения сопротивлений такой схемы предварительно выведем формулы, связывающие выходные и входные акустические параметры трубы.

Рассмотрим жёсткостенную трубку конечной длины с равномерно изменяющимся по длине сечением (рис. 1).

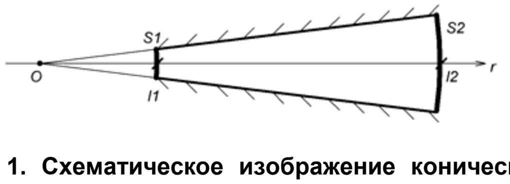

Рис. 1. Схематическое изображение конической трубы с жесткими стенками

Входное сферическое сечение трубки имеет площадь S_1 и соответствует положению $r = l_1$. Площадь выходного сечения равна S_2 и соответствует радиусу сферической поверхности l_2. Звуковые колебания производятся сферическим поршнем в сечении $r = l_1$.

Потенциал колебательной скорости в трубе в виду когерентности волн, бегущих в прямом и обратном направлении, представляется в виде суммы двух сферически-симметричных волн (без учёта временного множителя $e^{i\omega t}$):

$$\phi(r,t) = \frac{A_1}{r} e^{-\gamma r} + \frac{A_2}{r} e^{\gamma r} \qquad (2)$$

где A_1 и A_2 – соответственно, амплитуды прямой и обратной волн, $\gamma = \alpha + ik$ – постоянная распространения, α – коэффициент затухания амплитуды звуковой волны (в случае идеальной жидкости (газа) принимается равным нулю), $k = \omega / c_0$ – волновое число.

Звуковое давление и колебательная скорость, соответственно, определяются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} p &= i\omega\rho_0\phi = i\omega\rho_0 \frac{A_1}{r} e^{-\gamma r} + i\omega\rho_0 \frac{A_2}{r} e^{\gamma r} \\ v &= -\frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{ikr+1}{r^2} A_1 e^{-\gamma r} - \frac{ikr-1}{r^2} A_2 e^{\gamma r} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Тогда на входе в трубку (при $r = l_1$) звуковое давление и объемная колебательная скорость записываются как:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= i\omega\rho_0 \frac{A_1}{l_1} e^{-\gamma l_1} + i\omega\rho_0 \frac{A_2}{l_1} e^{\gamma l_1} \\ w_1 &= S_1 v_1 = S_1 \left(\frac{\gamma l_1 + 1}{l_1^2} A_1 e^{-\gamma l_1} - \frac{\gamma l_1 - 1}{l_1^2} A_2 e^{\gamma l_1} \right) \end{aligned}\right\}, \qquad (4)$$

где A_1 и A_2 – неизвестные константы, которые возможно определить, решая систему (4) методом Крамера [6].

Выразив значения амплитуд волн через входные параметры звукового поля:

$$A_1 = \frac{l_1}{2\omega\rho_0} \left(\frac{\gamma l_1 - 1}{i\gamma l_1} p_1 - i\rho_0 c_0 \frac{w_1}{S_1} \right) e^{\gamma l_1};$$

$$A_2 = \frac{l_1}{2\omega\rho_0} \left(\frac{\gamma l_1 + 1}{i\gamma l_1} p_1 + i\rho_0 c_0 \frac{w_1}{S_1} \right) e^{-\gamma l_1},$$

учтем их при записи звукового давления p_2 и объёмной колебательной скорости w_2 в выходном сечении трубы ($r = l_2$):

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= \frac{l_1}{l_2} \left[\left(ch(\gamma l) + \frac{l}{l_2} \cdot \frac{sh(\gamma l)}{\gamma l_1} \right) \cdot p_1 - \frac{i\rho_0 c_0}{S_1} sh(\gamma l) \cdot w_1 \right] \\ w_2 &= S_2 \frac{l_1}{l_2} \left\{ \left[sh(\gamma l) \cdot \left(\frac{1}{\gamma l_1 \cdot \gamma l_2} - 1 \right) - \frac{l}{l_1} \cdot \frac{l}{l_2} \cdot \frac{ch(\gamma l)}{\gamma l_1} \right] \cdot \frac{1}{\rho_0 c_0} \cdot p_1 + \left(ch(\gamma l) - \frac{sh(\gamma l)}{\gamma l_2} \right) \cdot \frac{1}{S_1} \cdot w_1 \right\} \end{aligned}\right\}$$

Полученные результаты удобно представить в матричном виде:

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= m_{11} p_1 + m_{12} w_1 \\ w_2 &= m_{21} p_1 + m_{22} w_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Здесь $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22}$ – элементы матрицы.

Для упрощения записи введем обозначения:

$$z_1 = \frac{\rho_0 c_0}{S_1}; \quad z_2 = \frac{\rho_0 c_0}{S_2}; \qquad (6)$$

а также обозначим отношение радиусов входного и выходного сферических сечений через q:

$$q = \frac{R_2}{R_1}, \qquad (7)$$

тогда $l_1 = \dfrac{l}{q-1}$; $\quad l_2 = \dfrac{l \cdot q}{q-1}$;

l_1 и l_2 – радиусы сферических поверхностей, ограничивающих трубку на входе и на выходе; $l = l_1 - l_2$ – длина конической трубки (по образующей); соответственно, площади входного и выходного сечений: $S_1 = \pi R_1^2$; $S_2 = \pi R_2^2$.

В результате выражения для элементов матрицы (5) с учётом (6) и (7) принимают вид:

$$m_{11} = \frac{1}{q} \left(ch(\gamma l) + (q-1) \cdot \frac{sh(\gamma l)}{\gamma l} \right);$$

$$m_{12} = -\frac{1}{q} \cdot z_1 \cdot sh(\gamma l);$$

$$m_{21}=\frac{1}{q}\cdot\frac{i}{z_2}\cdot\left[\left(\frac{(q-1)^2}{q(\gamma l)^2}-1\right)sh(\gamma l)-\frac{(q-1)^2}{q}\cdot\frac{ch(\gamma l)}{\gamma l}\right];$$

$$m_{22}=q\left(ch(\gamma l)-\frac{(q-1)}{q}\cdot\frac{sh(\gamma l)}{\gamma l}\right). \qquad (8)$$

В результате отрезок длинной электрической линии, моделирующей трубу, может быть представлен Т-образной эквивалентной электроакустической схемой, показанной на рис. 2 [2, 5].

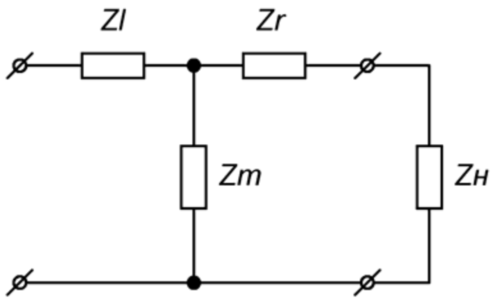

Рис. 2. Эквивалентная электроакустическая схема конической трубки

На основании теории электрических четырехполюсников [2] выражаем сопротивления схемы (рис. 2) через элементы матрицы:

$$\left.\begin{aligned}
&z_l=(1-m_{22})/m_{21}=qz_2\times\\
&\times\left[1-q\cdot\left(ch(\gamma l)-\frac{q-1}{q}\cdot\frac{sh(\gamma l)}{\gamma l}\right)\right]\cdot\frac{1}{A}\\
&z_r=(1-m_{11})/m_{21}=z_2\times\\
&\times\left[ch(\gamma l)-(q-1)\cdot\frac{sh(\gamma l)}{\gamma l}\right]\cdot\frac{1}{A}\\
&z_m=-\frac{1}{m_{21}}=-qz_2\cdot\frac{1}{A}
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

где $A=\left[\frac{(q-1)^2}{q(\gamma l)^2}-1\right]sh(\gamma l)-\frac{(q-1)^2}{q}\cdot\frac{ch(\gamma l)}{\gamma l}$.

Отметим, что в частном случае цилиндрической трубы длины l, когда радиусы входного и выходного сферических сечений равны ($R_1=R_2$), величина q и характеристические сопротивления принимают значения $q=1$, $z_1=z_2=z_0=\frac{\rho_0 c_0}{S_1}$, и элементы матрицы для определения эквивалентных сопротивлений находятся в соответствии с формулами: $m_{11}=ch(\gamma l)$; $m_{12}=-z_0\cdot sh(\gamma l)$;

$$m_{21}=-\frac{1}{z_0}\cdot sh(\gamma l);$$

$$m_{22}=ch(\gamma l).$$

В результате сопротивления схемы (рис.2) на основании соотношений (9) приобретают вид:

$$z_l=z_r=\frac{\rho_0 c_0}{S}\,\mathrm{th}\frac{\gamma l}{2}; \qquad (10)$$

$$z_m=\frac{\rho_0 c_0}{S}\,\mathrm{csh}\,\gamma l, \qquad (11)$$

что соответствует выражениям для эквивалентной схемы трубы постоянного сечения [2, 5] с точностью до масштабного множителя S^2, определяющего переход от акустических сопротивлений к механическим.

Коническая труба, заполненная идеальной жидкостью

В случае заполнения трубы идеальной жидкостью (газом) [3], полагаем коэффициент затухания звуковой волны $\alpha=0$, постоянная распространения определяется волновым числом k ($\gamma=ik$) и уравнения для элементов матрицы принимают вид:

$$m_{11}=\frac{1}{q}\left(\cos kl+(q-1)\cdot\frac{\sin kl}{kl}\right);$$

$$m_{12}=\frac{1}{q}\left(-iz_{01}\cdot\sin kl\right);$$

$$m_{21}=\frac{1}{q}\left\{-\frac{i}{z_{02}}\left[\left(1+\frac{(q-1)^2}{k^2l^2q}\right)\sin kl-\frac{(q-1)^2}{q}\cdot\frac{\cos kl}{kl}\right]\right\};$$

$$m_{22}=q\left(\cos kl-\frac{(q-1)}{q}\cdot\frac{\sin kl}{kl}\right). \qquad (12)$$

Для труб малой волновой длины ($kl<<1$) выражения для элементов матрицы (12) возможно заменить их низкочастотными асимптотическими приближениями, воспользовавшись двумя первыми членами разложения тригонометрических функций в ряд Тейлора [6]:

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!};$$

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}.$$

Тогда величины сопротивлений эквивалентной Т-образной схемы вычисляются по следующим формулам:

$$z_l=i\omega\frac{\rho l}{2S_1}\cdot\frac{2q+1}{q^2+q+1}; \qquad (13)$$

$$z_r=i\omega\frac{\rho l}{2qS_1}\cdot\frac{q+2}{q^2+q+1}; \qquad (14)$$

$$z_m = \frac{3\rho c^2}{i\omega S_1 l \cdot (q^2 + q + 1)}. \qquad (15)$$

В случае трубы постоянного сечения выражения (13 – 15) сводятся к виду:

$$z_r = z_l = i\omega\frac{\rho l}{2S}; \qquad (16)$$

$$z_m = \frac{1}{i\omega\left(\frac{Sl}{\rho c^2}\right)}. \qquad (17)$$

что соответствует представлению сопротивлений $z_l = z_r$ и z_m, соответственно, в виде массы и гибкости объёма среды, заключённого в трубе.

Труба с идеальными нагрузочными сопротивлениями

Проанализируем два крайних варианта идеальной нагрузки выходного сечения трубы и соответствующие этим случаям эквивалентные электроакустические схемы.

Закрытая труба

Модель закрытой трубы [2, 4] соответствует отражению звука от стенки с бесконечно большим сопротивлением, т.е. $z_H = \infty$. В эквивалентной схеме (рис. 2) этот случай соответствует режиму холостого хода. Следовательно, схему можно упростить и представить в виде последовательного соединения сопротивлений z_l и z_m (рис. 3).

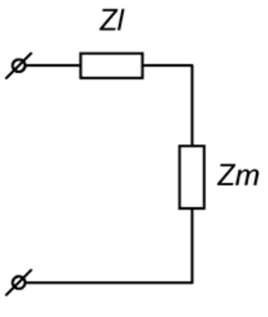

Рис. 3. Эквивалентная электроакустическая схема закрытой трубы

Входное сопротивление схемы при этом определяется как $z_{вх} = z_l + z_r$ и для конической трубы без потерь выражается формулой

$$z_{вх} = -iqz_2 \frac{q \cdot \cos kl - (q-1)\frac{\sin kl}{kl}}{\sin kl + \frac{(q-1)^2}{qkl}\cdot\left(\frac{\sin kl}{kl} - \cos kl\right)}. \qquad (18)$$

В частном случае цилиндрической трубы, когда $q = 1; z_2 = z_0 = \rho_0 c_0 / S$, выражение (18) принимает вид: $z = -i\frac{\rho_0 c_0}{S}\cdot \mathrm{ctg}(kl)$, что соответствует результату, полученному ранее при аналитическом решении задачи [2, 4].

Открытая труба

В случае открытой трубы [2, 4] нагрузочное сопротивление равно нулю ($z_H = 0$), что эквивалентно режиму короткого замыкания выхода в схеме рис. 2. Эквивалентную схему в таком случае можно интерпретировать как последовательное соединение сопротивления z_l с параллельной цепью из сопротивлений z_m и z_r (рис. 4).

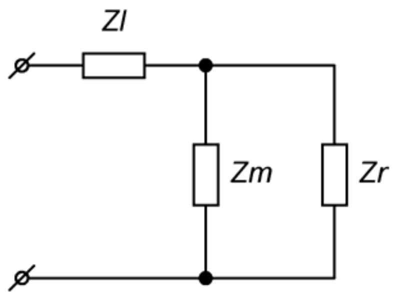

Рис. 4. Эквивалентная электроакустическая схема открытой трубы

Входное сопротивление находим по формуле

$$z_{вх} = z_l + \frac{z_m \cdot z_r}{z_m + z_r}.$$

Для открытой конической трубы без потерь входное сопротивление определяется выражением:

$$z_{вх} = -iqz_2 \frac{A \cdot \left[\cos kl - (q-1)\frac{\sin kl}{kl}\right] - \left[q - \cos kl - (q-1)\frac{\sin kl}{kl}\right]}{A \cdot \left[\sin kl + \frac{(q-1)^2}{qkl} \cdot \left(\frac{\sin kl}{kl} - \cos kl\right)\right]}, \quad (19)$$

где $A = (a-1) \cdot \left(1 - \frac{\sin kl}{kl}\right) - \cos kl$.

При $q = 1; z_2 = z_0 = \rho_0 c_0 / S$ формула (19) сводится к виду:

$$z_{вх} = i \frac{\rho_0 c_0}{S} \cdot \mathrm{tg}(kl)$$

и представляет собой выражение для входного сопротивления открытой цилиндрической трубы, что полностью совпадает с аналитически полученными результатами, приведёнными в работах [2, 4].

Выводы

Разработан метод анализа звукового поля в узких жёсткостенных конических трубах на основе представления трубы в виде длинной электрической линии с использованием электроакустических аналогий.

Выведены расчётные формулы для сопротивлений эквивалентной Т-образной схемы, моделирующей трубу с линейно изменяющимся сечением, заполненной жидкостью (газом).

Построены эквивалентные электроакустические схемы и получены формулы для расчёта входного сопротивления трубы для двух крайних случаев идеальной нагрузки на выходное сечение трубы.

Выведенные формулы совпадают с известными выражениями для частного случая трубы с постоянным сечением, полученными ранее путём аналитического решения задачи и с использованием метода электроакустических аналогий, что свидетельствует о физической и математической состоятельности разработанного метода.

Предлагаемый метод рекомендуется для расчёта и моделирования звуковых полей в конических трубах малого волнового диаметра с жёсткими стенками.

Список использованных источников

1. *Fastle H., Zwicker E.* Psychoacoustics. Facts and Models. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. – 462 p.
2. *Вахитов Я.Ш.* Теоретические основы электроакустики и электроакустическая аппаратура. – М.: Искусство, 1982. – 415 с.
3. *Исакович М.А.* Общая акустика: учебное пособие. – М.: Наука, глав. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 496 с.
4. *Скучик Е.* Основы акустики.-Т.1 /пер. с англ. под ред. Л.М.Лямшева. – М.: Мир, 1976. – 520 с.
5. *Фланаган Дж.Л.* Анализ, синтез и восприятие речи/ пер. с англ. под ред. А.А.Пирогова. – М.: Связь, 1968. – 392 с.
6. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике /пер. с англ. под общей ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, глав. ред. физ.-мат. лит.,1968 – 720 с.

Поступила в редакцию 20 декабря 2013 г.

УДК 534.21

В.С. Дідковський, д-р техн. наук, **С.С. Калінін**, **С.А. Луньова**, канд. фіз.-мат. наук

Національний Технічний Університет України «Київський політехнічний інститут»,

вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

Метод аналізу звукових полів у вузьких конічних трубах із жорсткими стінками

Розроблюється метод аналізу частотних та імпедансних характеристик вузьких труб лінійно змінного прерізу на основі теорії чотириполюсників. Отримано вирази для опорів еквівалентної Т-подібної схеми, що замінює таку трубу. Описаний метод є подальшим розвитком методу аналізу полів у трубах постійного перерізу з використанням електроакустичних аналогій. Бібл. 6, рис. 4.

Ключові слова: *жорсткостінні конічні труби, частотна характеристика, електроакустичні аналогії.*

UDC 534.21

V.S. Didkovsky, Dr.Sc., **S.S. Kalinin**, **S.A. Luniova**, Ph.D.
National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",
st. Polytechnique, 16, Kiev, 03056, Ukraine.

The method for analyze of acoustic fields in acoustically narrow tapered pipelines

The paper describes a method of acoustic frequency response and impedance analysis of acoustic fields in the acoustically narrow pipelines with variable cross-section (tapered pipes). The method utilizes the theory ofelectro-acoustic analogies. The expressions for the equivalent resistors, replacing the pipeline are gained. The described method is a further development of existing methods to analyze the fields in the pipes of constant cross section. Reference 6, figures 4.

Keywords: *tapered pipelines, frequency response, electro-acoustic analogy.*

References

1. *Fastle H., Zwicker E.* (2007), "Psychoacoustics. Facts and Models". Springer-Verlag Berlin Heidelberg. P. 462.
2. *Vahitov Ya.Sh.* (1982), "Basics of Electroacoustics and Electroacoustical Apparature". Moskva, Iskusstvo. P. 415. (Rus)
3. *Isakovich M.A.* (1973), "General Acoustics". Moskva, Nauka. P. 496. (Rus)
4. *Skudrzyk E.* (1976), "The Foundation of Acoustics". Vol. 1. Moskva, Mir. P. 520. (Rus)
5. *Flanagan J.L.* (1968), "Speech Analysis, Synthesis and Perception". Moskva, Svyaz. P. 392. (Rus)
6. *Korn G., Korn T.* (1968), "Handbook of Mathematics". Moskva, Nauka. P.720. (Rus)