УДК 534.232.082.74

Электромагнитный способ возбуждение оссесиметрично распространяющихся сферических волн в упругом полупространстве

А.Г. Горбашова

Национальный Технический Университет Украины «Киевский Политехнический Институт»,

ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

Рассмотрена задача о возбуждении осесимметричными силами Лоренца продольных и поперечных сферических волн в металлическом полупространстве.

Задача решена в приближении дальнего поля с применением интегрального преобразования Ханкеля по радиальной координате. Исследовано влияния размеровпреобразователя в области существования сил Лоренца на амплитудно-частотный спектр возбуждаемых волн. Выполнены сравнительный анализ энергоемкости продольных и поперечных волн. Показано, что поперечные сферические волны являются доминирующими по энергетике.Полученные результаты составляют теоретическую основу для построения математической модели преобразователя электромагнитного типа с осевой симметрией в режиме возбуждения сферических ультразвуковых волн. Библ.6, рис. 2.

Ключевые слова: сила Лоренца, сферические волны, продольные и поперечные волны.

Введение

В настоящее время большое внимание уделяется неразрушающим методам контроля. Внедрение их в производство позволяет сократить материальные и временные затраты, а также автоматизировать контроль и повысить его качество и надежность. Возможности электромагнитного-акустического способа возбуждения и приема ультразвуковых колебаний наиболее перспективно, что касается толщинометрии [3,6].

Известно [2], что под действием изменяющихся во времени нагрузок, которые прикладываются к поверхности массивного твердого тела, в нем возбуждаются поверхностные волны Рэлея, а также продольные и поперечные волны. В работе [1] полностью решена задача об электромагнитном возбуждении поверхностных волн Рэлея в металлах неферромагнитной группы и в ферромагнетиках.

В настоящей работе приводятся строгие решения динамических задач теории упругости о возбуждении осесимметричных сферических продольных и поперечных волн в изотропном полупространстве системой поверхностных и объемных сил.

Постановка граничных задач об электромагнитном возбуждении осесимметричных, радиально распространяющихся сферических продольных и поперечных волн

Рассмотрим металлическое полупространство (рис. 1), над поверхностью которого располагается источник (он на рис. 1 не показан) переменного магнитного поля. Источник генерирует изменяющееся во времени магнитное поле, которое обладает симметрией относительно оси Ox_3 и характеризуется вектором напряженности $\vec{H}^*(x_k)e^{i\omega t}$, где $\vec{H}^*(x_k)$ - амплитуда; x_k $(k=1,2,3)$ - координаты точки наблюдения; $i=\sqrt{-1}$; ω - круговая частота смены знака; t - время. В присутствии постоянного, вертикально ориентированного, поля подмагничивания (источник этого поля на рис. 1 не показан), которое характеризуется магнитной индукцией B^0, не изменяющейся в пределах объема V^f, переменное магнитное поле формирует в этом объеме и на его поверхности S^σ систему поверхностных и объемных сил.

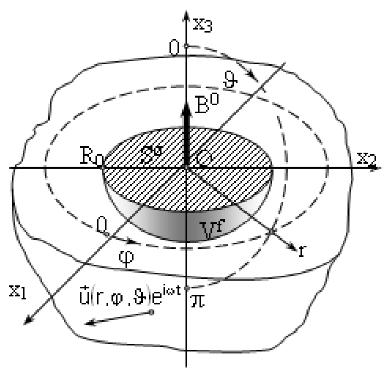

Рис. 1. Расчетная схема задачи об электромагнитном возбуждении ультразвуковых волн в металлическом полупространстве

Силовыми факторами, которые возбуждают ультразвукове волны, являються напряжения Максвелла и силы Лоренца. Для ферромагнетиков поверхностные и объемные нагрузки определяются как алгебраическая сумма пондеромоторных сил электромагнитного поля и магнитострикционных сил [4].

В сферической системе координат (r,φ,ϑ) (рис. 1) граничная задача, решение которой позволит определить компоненты вектора смещений $\vec{u}(r,\varphi,\vartheta)e^{i\omega t}$ в произвольной точке наблюдения за пределами области существования внешних силовых факторов, вне зависимости от типа металла формулируется следующим образом: найти амплитудные значения компонентов вектора смещения $\vec{u}(r,\varphi,\vartheta)$, которые в объеме *V* ($\vartheta>\pi/2$) полупространства удовлетворяют уравнению установившихся гармонических колебаний

$$(\lambda+2G)\,\mathrm{grad\,div}\vec{u}-G\,\mathrm{rot\,rot}\vec{u}+ +\rho_0\omega^2\vec{u}-\vec{f}^*=0\,\forall(r,\phi,\vartheta)\in V \quad (1)$$

(λ, *G* и ρ_0 - модули упругости и плотность металла), а на его свободной поверхности *S* ($\vartheta=\pi/2$) создают напряжения, амплитуды которых $\sigma_{\vartheta\beta}(r,\varphi,\pi/2)$ $(\beta=r,\varphi,\vartheta)$ удовлетворяют третьему закону Ньютона, т. е.

$$\sigma_{\vartheta\beta}(r,\varphi,\pi/2)-\sigma^*_{\vartheta\beta}(r,\varphi,\pi/2)=0\,\forall(r,\varphi)\in S, \quad (2)$$

где $\sigma^*_{\vartheta\beta}(r,\varphi,\pi/2)$ $(\beta=r,\varphi,\vartheta)$ - амплитудные значения поверхностных нагрузок, т. е., в общем случае, алгебраическая сумма соответствующих компонентов тензора Максвелла и магнитострикционных напряжений.

В случае объемных волн граничная задача (1), (2) распадается на две самостоятельных граничных задачи, решения которых доставляют информацию об амплитудах возбуждаемых продольных и поперечных волн. Математические формулировки этих задач имеют следующий вид:

а) *продольные волны*

найти вектор смещения $\vec{u}^{\ell}(r,\vartheta)$, который удовлетворяет условию $\mathrm{rot}\vec{u}^{\ell}(r,\vartheta)=0$ в любой точке упругого полупространства, уравнению установившихся колебаний

$$(\lambda+2G)\,\mathrm{grad\,div}\vec{u}^{\ell}+\rho_0\omega^2\vec{u}^{\ell}-\vec{f}^*=0\,\forall(r,\vartheta)\in V, \quad (3)$$

где $\vec{f}^*(r,\vartheta)=\vec{e}_\vartheta f^*_\vartheta(r,\vartheta)$, ($\vec{e}_\vartheta$ - единичный вектор (орт) сферической системы координат) и граничным условиям на поверхности S

$$\sigma_{\vartheta r}(r,\pi/2)=0\,\forall r\in S,$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)-\sigma^*_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)=0\,\forall r\in S; \quad (4)$$

б) *поперечные (сдвиговые) волны*

найти вектор смещения $\vec{u}^{s}(r,\vartheta)$, который удовлетворяет условию $\mathrm{div}\vec{u}^{s}(r,\vartheta)=0$ в любой точке упругого полупространства, уравнению установившихся колебаний

$$-G\,\mathrm{rot\,rot}\vec{u}^{s}+\rho_0\omega^2\vec{u}^{s}-\vec{f}^*=0\,\forall(r,\vartheta)\in V, \quad (5)$$

где $\vec{f}^*(r,\vartheta)=\vec{e}_r f^*_r(r,\vartheta)$, ($\vec{e}_r$ - единичный вектор (орт) сферической системы координат) и граничным условиям на поверхности *S*

$$\sigma_{\vartheta r}(r,\pi/2)-\sigma^*_{\vartheta r}(r,\pi/2)=0\,\forall r\in S,$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)=0\,\forall r\in S. \quad (6)$$

По своему физическому содержанию граничная задача (1), (2) и её частные формулировки (3), (4) и (5), (6) являются обобщением классической задачи Лэмба [2], и по этой причине граничные задачи (1) – (6) можно называть обобщенными задачами Лэмба.

Общие решения обобщенных задач Лэмба для продольных и поперечных волн

Общее решение обобщенной задачи Лэмба (3), (4) записывается в следующем виде

$$\vec{u}^{\ell}(r,\vartheta)=\vec{V}^{\ell}(r,\vartheta)+\vec{W}^{\ell}(r,\vartheta), \quad (7)$$

где $\vec{V}^{\ell}(r,\vartheta)$ - составляющая волнового поля смещений материальных частиц полупространства созданная объемной силой с плотностью $f^*_\vartheta(r,\vartheta)$; $\vec{W}^{\ell}(r,\vartheta)$ - составляющая, которая сформированная поверхностной нагрузкой $\sigma^*_{\vartheta\vartheta}(r,\vartheta)$.

Компоненты векторов $\vec{V}^{\ell}(r,\vartheta)$ и $\vec{W}^{\ell}(r,\vartheta)$ определяются следующими выражениями:

$$V^{\ell}_r(r,\vartheta)=-(k_\ell r)^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}U_{2n}(k_\ell)\left[H^{(2)}_{2n-1/2}(k_\ell r)-\frac{2n+1}{(k_\ell r)}H^{(2)}_{2n+1/2}(k_\ell r)\right]P_{2n}(\xi),$$

$$V^{\ell}_\vartheta(r,\vartheta)=-(k_\ell r)^{-3/2}\sum_{n=1}^{\infty}U_{2n}(k_\ell)H^{(2)}_{2n+1/2}(k_\ell r)\frac{\partial P_{2n}(\xi)}{\partial\vartheta},$$

$$W_r^\ell(r,\vartheta)=k_\ell(k_\ell r)^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}C_{2n}\left[H^{(2)}_{2n-1/2}(k_\ell r)-\frac{2n+1}{(k_\ell r)}H^{(2)}_{2n+1/2}(k_\ell r)\right]P_{2n}(\xi),$$

$$W_\vartheta^\ell(r,\vartheta)=k_\ell(k_\ell r)^{-3/2}\sum_{n=1}^{\infty}C_{2n}H^{(2)}_{2n+1/2}(k_\ell r)\frac{\partial P_{2n}(\xi)}{\partial\vartheta},$$

где $k_\ell=\omega/\sqrt{(\lambda+2G)/\rho_0}$ - волновое число продольных волн; $U_{2n}(k_\ell)$ и C_{2n} - амплитудные множители; $H^{(2)}_{2n\pm1/2}(k_\ell r)$ - функции Ханкеля второго рода полуцелого порядка; $P_{2n}(\xi)$ - функции (полиномы) Лежандра первого рода четной степени $2n$; $\xi=\cos\vartheta$ - аргумент функций Лежандра.

Амплитудные множители $U_{2n}(k_\ell)$ и C_{2n} определяются следующими соотношениями

$$U_{2n}(k_\ell)=\frac{i\pi}{2(\lambda+2G)}\int_0^\infty r(k_\ell r)^{3/2}f^*_{2n}(r)J_{2n+1/2}(k_\ell r)d(k_\ell r)$$

где $$f^*_{2n}(r)=\frac{4n+1}{4n(2n+1)}\int_{-1}^{0}f^*_\vartheta(r,\vartheta)\sin\vartheta\frac{\partial P_{2n}(\xi)}{\partial\xi}d\xi;$$

$J_{2n+1/2}(k_\ell r)$ - функция Бесселя полуцелого порядка;

$$C_{2n}=\frac{1}{4Gk_\ell P_{2n}(0)\beta_1}\int_0^\infty(k_\ell r)^{-1/2}\sigma^*_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_\ell r)-$$
$$-\frac{\beta_2}{\beta_1}U_{2n}(k_\ell)$$

где

$$\Phi_{2n}(k_\ell r)=J_{2n-3/2}(k_\ell r)+J_{2n+1/2}(k_\ell r)+J_{2n+5/2}(k_\ell r)$$

$$\beta_1=k_\ell\left[b_1/(4n-1)+b_2/(4n+1)+b_3/(4n+5)\right];$$

$$\beta_2=a_1/(4n-1)+a_2/(4n+1)+a_3/(4n+5);$$

$$b_1=\frac{1}{4n-1}+\left[\frac{\lambda}{2G}-(2n+1)^2\right]\Big/\left(16n^2-1\right);$$

$$b_2=b_1+b_3;$$

$$b_3=\left[\frac{\lambda}{2G}-(2n+1)^2\right]\Big/\left[(4n+1)(4n+3)\right];$$

$$a_1=\frac{1}{4n-1}+(2n+1)\left(2n+1+\frac{\lambda}{2G}\right)\Big/\left(16n^2-1\right);$$

$$a_2=\frac{1}{4n-1}+\frac{\lambda}{2G}+a_3;$$

$$a_1=(2n+1)\left(2n+1+\frac{\lambda}{2G}\right)\Big/\left[(4n+1)(4n+3)\right].$$

Общее решение обобщенной задачи Лэмба (5), (6) записывается в следующем виде:

$$\vec{u}^s(r,\vartheta)=\vec{V}^s(r,\vartheta)+\vec{W}^s(r,\vartheta),\qquad(8)$$

где составляющие волнового поля смещений $\vec{V}^s(r,\vartheta)$ и $\vec{W}^s(r,\vartheta)$ имеют тот же физический смысл, что и составляющие поля смещений $\vec{u}^\ell(r,\vartheta)$.

Компоненты векторов $\vec{V}^s(r,\vartheta)$ и $\vec{W}^s(r,\vartheta)$ определяются следующими выражениями:

$$V_r^s(r,\vartheta)=(k_s r)^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}U_{2n+1}(k_s)H^{(2)}_{2n+3/2}(k_s r)P_{2n+1}(\xi)$$

$$V_\vartheta^s(r,\vartheta)=(k_s r)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_{2n+1}(k_s)}{(2n+1)(2n+2)}\left[H^{(2)}_{2n+1/2}(k_s r)-\right.$$
$$\left.-\frac{2n+1}{(k_s r)}H^{(2)}_{2n+3/2}(k_s r)\right]\frac{\partial P_{2n+1}(\xi)}{\partial\vartheta},$$

$$w_r^s(r,\vartheta)=k_s(k_s r)^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)(2n+2)C_{2n+1}\times$$
$$\times H^{(2)}_{2n+3/2}(k_s r)P_{2n+1}(\xi),$$

$$W_\vartheta^s(r,\vartheta)=k_s(k_s r)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}C_{2n+1}\left[H^{(2)}_{2n+1/2}(k_s r)-\right.$$
$$\left.-\frac{2n+1}{(k_s r)}H^{(2)}_{2n+3/2}(k_s r)\right]\frac{\partial P_{2n+1}(\xi)}{\partial\vartheta},$$

где $k_s=\omega/\sqrt{G/\rho_0}$ - волновое число поперечных (сдвиговых) волн; $U_{2n+1}(k_\ell)$ и C_{2n+1} - амплитудные множители, которые рассчитываются по следующим формулам

$$U_{2n+1}(k_s)=\frac{i\pi}{2G}\int_0^\infty r(k_s r)^{3/2}f^*_{2n+1}(r)J_{2n+3/2}(k_s r)d(k_s r)$$

где $$f^*_{2n+1}(r)=(n+1)\int_{-1}^{0}f^*_r(r,\vartheta)P_{2n+1}(\xi)d\xi;$$

$$C_{2n+1}=\frac{1}{2Gk_s^2P_{2n}(0)Q_n}\int_0^\infty(k_s r)^{-1/2}\sigma^*_{\vartheta r}(r,\pi/2)\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r)-$$
$$-\frac{1}{k_s}U_{2n+1}(k_s)$$

$$Q_n=q_1/(4n-1)+q_2/(4n+3)+q_3/(4n+7);$$

$$q_1=\eta_1/(4n+1)+\eta_3/\left[(4n+1)(4n+3)\right];$$

$$q_2=\eta_1/(4n+1)+\eta_2+\eta_3\left[1/(4n+1)+1/(4n+5)\right]/(4n+3)$$

$$q_3=\eta_3/\left[(4n+3)(4n+5)\right];$$

$\eta_1=b_1^*-(2n+1)a_1^*$; $\eta_2=b_2^*-(2n+1)a_2^*$;

$\eta_3=b_3^*-(2n+1)a_3^*$; $b_1^*=-(3/2)(2n+1)$;

$b_2^*=2n+1$;

$b_3^*=-(2n+1)^2(4n+11/2)$;

$a_1^* = -1/[(2n+1)(n+1)]$; $a_2^* = a_1^*/2$;

$a_3^* = \left(2n^2 + 5n + 2\right)/\left(2n^2 + 3n + 1\right) + 1$;

$\Psi_{2n+1}(k_s r) = J_{2n-1/2}(k_s r) + J_{2n+3/2}(k_s r) + $
$+ J_{2n+7/2}(k_s r)$.

В заключение необходимо особо подчеркнуть то обстоятельство, что амплитудные множители C_{2n} и C_{2n+1} определяются в результате разложения поверхностных нагрузок $\sigma_{\vartheta r}^*(r, \pi/2)$ и $\sigma_{\vartheta\vartheta}^*(r, \pi/2)$ в ряды по функциям $\psi(k_s r) = (k_s r)^{-1/2}\Psi_{2n+1}(k_s r)$ и $\varphi(k_\ell r) = (k_\ell r)^{-1/2}\Phi_{2n}(k_\hbar r)$. По этой причине они определяются не компонентами вектора напряженности переменного магнитного поля, которое создается источником, а его интегральными характеристиками, которые появляются в процессе вычисления коэффициентов разложения в указанные выше ряды. Действительно, так как $\sigma_{\vartheta r}^*(r, \pi/2) = -B^0 H_r^*(r, \pi/2)$ и $\sigma_{\vartheta\vartheta}^*(r, \pi/2) = -B^0 H_\vartheta^*(r, \pi/2)$, то интегральные характеристики компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля на поверхности металлического полупространства $H_r^{(2n+1)}(k_s, \pi/2)$ и $H_\vartheta^{(2n)}(k_\ell, \pi/2)$ определяются следующим образом

$$H_r^{(2n+1)}(k_s, \pi/2) = \int_0^\infty (k_s r)^{-1/2} H_r^*(r, \pi/2)\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r), \quad (9)$$

$$H_\vartheta^{(2n)}(k_\ell, \pi/2) = \int_0^\infty (k_\ell r)^{-1/2} H_\vartheta^*(r, \pi/2)\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_\ell r), \quad (10)$$

Практическая ценность интегральных представлений (9) и (10) заключается в том, что их применение позволяет выполнить строгое и полное решение задачи технической электродинамики о распределении переменного магнитного поля в токопроводящем, анизотропном по магнитным свойствам, полупространстве, которое создается внешним источником, находящимся над поверхностью металла.

Расчет пондеромоторных сил электромагнитного поля осесимметричного индуктора

Рассмотрим индуктор (источник переменного магнитного поля), который образован N концентрически уложенными витками провода (рис. 2). Индуктор в форме кольцевой катушки высотой h и толщиной укладки витков $R_2 - R_1$ расположен на расстоянии δ над поверхностью $x_3 = 0$ (в сферической системе координат $\vartheta = \pi/2$) токопроводящего упругого полупространства с удельной электрической проводимостью r_0. Будем полагать, что материал полупространства является металлом неферромагнитной группы, т. е. в нем отсутствуют магнитострикционные эффекты.

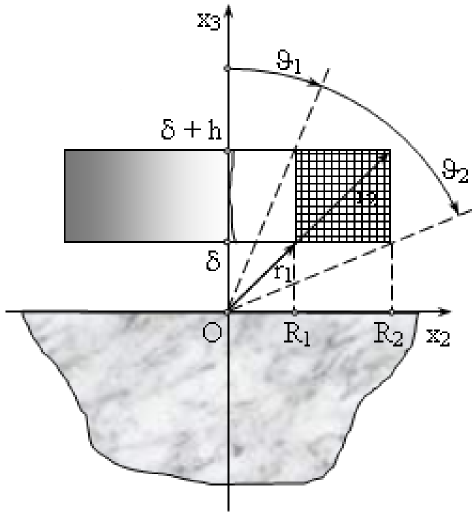

Рис. 2. Расчетная схема осесимметричного индуктора переменного магнитного поля

В присутствии достаточно сильного и не изменяющегося во времени магнитного поля, вектор магнитной индукции которого полностью определяется вертикальным компонентом B_3^0 (источник этого поля на рис. 2 не показан) переменный электрический ток $I_0 e^{i\omega t}$ в витках осесимметричного индуктора создает на поверхности металла поверхностные нагрузки

$$\sigma_{\vartheta r}^*(r, \pi/2) = -B_3^0 H_r^*(r, \pi/2),$$
$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^*(r, \pi/2) = -B_3^0 H_\vartheta^*(r, \pi/2), \quad (11)$$

а в объеме металла – силы Лоренца с объемной плотностью

$$f_r^*(r, \vartheta) = -B_3^0 J_\varphi^*(r, \vartheta)\sin\vartheta,$$
$$f_\vartheta^*(r, \vartheta) = -B_3^0 J_\varphi^*(r, \vartheta)\cos\vartheta., \quad (12)$$

где r и ϑ - текущие значения радиальной координаты и полярного угла сферической системы координат (рис. 1); $H_r^*(r, \pi/2)$, $H_\vartheta^*(r, \pi/2)$ и $J_\varphi^*(r, \vartheta)$ - амплитудные значения гармонически изменяющихся во времени компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля на поверхности металла и поверхностной плотности вихревого тока в объеме полупространства.

Для того, чтобы определить эти величины и построить аналитические конструкции для расчета амплитудных множителей продольных и поперечных сферических волн, рассмотрим вначале переменное магнитное поле в области $\{0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le \vartheta \le \pi/2\}$, т. е. над поверхностью металла.

В этой области существуют сторонние электрические токи, вектор поверхностной плотности которых $\vec{J}^s$ полностью определяется азимутальным компонентом $J_\varphi^s(r,\vartheta)$, причем

$$J_\varphi^s(r,\vartheta) = J_0 f_1(x) f_2(\vartheta), \qquad (13)$$

где $J_0 = I_0 N / [h(R_2 - R_1)]$ - плотность тока в электрическом контуре источника переменного магнитного поля; $f_1(x) = 0 \, \forall \, x \notin [x_1, 1]$ - весовая функция; $x = r/r_2$ и $x_1 = r_1/r_2$ - безразмерные радиальные координаты; $f_2(\vartheta) = 0 \, \forall \, \vartheta \notin [\vartheta_1, \vartheta_2]$ - весовая функция полярного угла; геометрический смысл величин r_1, r_2, ϑ_1 и ϑ_2 следует из приведенных на рис. 2 построений. Введем векторный потенциал $\vec{A}(r,\vartheta)$, такой, что выполняется равенство $\mathrm{rot}\vec{A}(r,\vartheta) = \mu_0 \vec{H}(r,\vartheta)$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м - магнитная проницаемость вакуума; $\vec{H}(r,\vartheta)$ - амплитудное значение гармонически изменяющегося во времени вектора напряженности переменного магнитного поля над поверхностью металла. В этом случае из уравнения Максвелла $\mathrm{rot}\vec{H}(r,\vartheta) = \vec{J}(r,\vartheta)$ получаем уравнение для векторного потенциала $\vec{A}(r,\vartheta)$ в следующем виде

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}(r,\vartheta) = \mu_0 \vec{J}^s(r,\vartheta) \qquad (14)$$

Для осесимметричного, т. е. не зависящего от азимутального угла φ, магнитного поля, общее решение уравнения (14) записывается в следующем виде

$$\vec{A}(r,\vartheta) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(r) \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \vartheta} \qquad (15)$$

где

$$A_\nu(r) = \begin{cases} \left[C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(x)\right] x^\nu + C_2^{(\nu)}(x) x^{-(1+\nu)} & \text{при } x \le 1, \\ \left[C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(1) + C_2^{(\nu)}(1)\right] x^{-(1+\nu)} & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

$C_1^{(\nu)}$ - подлежащие определению константы; $C_1^{(\nu)}(x)$ и $C_2^{(\nu)}(x)$ - варьируемые константы, причем

$$C_1^{(\nu)}(x) = -J_0 r_2^2 \mu_0 F_1^{(\nu)}(x);$$

$$C_2^{(\nu)}(x) = J_0 r_2^2 \mu_0 F_2^{(\nu)}(x);$$

$$F_1^{(\nu)}(x) = \frac{1}{2\nu(\nu+1)} \int_{x_1}^{x} x^{1-\nu} f_1(x) \Phi_\nu(x) dx;$$

$$F_2^{(\nu)}(x) = \frac{1}{2\nu(\nu+1)} \int_{x_1}^{x} x^{2+\nu} f_1(x) \Phi_\nu(x) dx;$$

$$\Phi_\nu(x) = \int_{-1}^{1} f_2(\vartheta) \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \vartheta} d\xi;$$

$P_\nu(\xi)$ - функция Лежандра первого рода степени ν; $\xi = \cos\vartheta$ - аргумент функции Лежандра.

Из определения амплитудных значений векторного потенциала следуют расчетные соотношения для компонентов вектора напряженности магнитного поля над поверхностью металла

$$H_r(r,\vartheta) = -\frac{1}{\mu_0 r_2} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_r^{(\nu)}(r) P_\nu(\xi),$$

$$H_\vartheta(r,\vartheta) = -\frac{1}{\mu_0 r_2} \sum_{\nu=1}^{\infty} H_\vartheta^{(\nu)}(r) \frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial \vartheta}, \qquad (16)$$

где

$$H_r^{(\nu)}(r) = \begin{cases} \nu(\nu+1)\left\{\left[C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(x)\right] x^{\nu-1} + C_2^{(\nu)}(x) x^{-(2+\nu)}\right\} \forall x \le 1, \\ \nu(\nu+1)\left\{\left[C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(1) + C_2^{(\nu)}(1)\right] x^{-(2+\nu)}\right\} \forall x > 1; \end{cases}$$

$$H_\vartheta^{(\nu)}(r) = \begin{cases} \left\{(\nu+1)\left[C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(x)\right] x^{\nu-1} - \nu C_2^{(\nu)}(x) x^{-(2+\nu)}\right\} \forall x \le 1, \\ \left\{-\nu\left[C_1^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}(1) + C_2^{(\nu)}(1)\right] x^{-(2+\nu)}\right\} \forall x > 1. \end{cases}$$

Электромагнитное поле в объеме металла удовлетворяет уравнениям Максвелла, которые в квазистационарной формулировке записываются в следующем виде:

$$\mathrm{rot}\vec{H}^*(r,\vartheta) = r_0 \vec{E}^*(r,\vartheta),$$

$$\mathrm{rot}\vec{E}^*(r,\vartheta) = -i\omega \vec{B}^*(r,\vartheta), \qquad (17)$$

где $\vec{H}^*(r,\vartheta)$ и $\vec{E}^*(r,\vartheta)$ - амплитудные значения гармонически изменяющихся во времени векторов напряженностей магнитного и электрического полей; $\vec{B}^*(r,\vartheta)$ - амплитуда вектора магнитной индукции. В присутствии постоянного поля подмагничивания может возникать анизотропия магнитной проницаемости, и поэтому справедлива запись $B_k^*(r,\vartheta)=\mu_{km}H_m^*(r,\vartheta)$, где μ_{km} - компонент тензора магнитной проницаемости. Тензор магнитной проницаемости определяется, за редким исключением, матрицей диагонального типа, которая записывается следующим образом

$$|\mu_{km}|=\begin{vmatrix}\mu_{11} & 0 & 0\\ & \mu_{22} & 0\\ & & \mu_{33}\end{vmatrix}. \qquad (18)$$

Применительно к рассматриваемому случаю вертикального подмагничивания элементы матрицы (18) соотносятся между собой следующим образом $\mu_{11}=\mu_{22}\neq\mu_{33}$.

Поскольку электромагнитное поле в объеме токопроводящего полупространства обладает осевой симметрией, постольку уравнения Максвелла (17) можно свернуть в одно дифференциальное уравнение для азимутального компонента $E_\varphi^*(r,\vartheta)$ вектора напряженности электрического поля. Это уравнение имеет следующий вид

$$\frac{1}{i\omega\mu_{33}}\left[\frac{\partial^2E_\varphi^*(r,\vartheta)}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial E_\varphi^*(r,\vartheta)}{\partial r}\right]+ \\ +\frac{1}{i\omega\mu_{33}r^2}\left[\frac{\partial^2E_\varphi^*(r,\vartheta)}{\partial\vartheta^2}+\mathrm{ctg}\vartheta\frac{\partial E_\varphi^*(r,\vartheta)}{\partial\vartheta}-\frac{E_\varphi^*(r,\vartheta)}{\sin^2\vartheta}\right]=r_0E_0^*(r,\vartheta). \qquad (19)$$

Общее решение уравнения (19) имеет следующий вид

$$E_\varphi^*(r,\vartheta)=-(\zeta r)^{-1/2}\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu e_\varphi^{(\nu)}(r)\frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial\vartheta}, \qquad (20)$$

где $\zeta=\sqrt{i\omega\mu_{33}r_0}$ - комплексное волновое число электромагнитных колебаний в объеме токопроводящего (металлического) полупространства; A_ν - подлежащие определению константы;

$$e_\phi^{(\nu)}(r)=\begin{cases}I_{\beta_\nu}(\zeta r)\forall r\le r_2\,,\\ I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)K_{\beta_\nu}(\zeta r)/K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)\forall r>r_2\,;\end{cases}$$

$I_{\beta_\nu}(\zeta r)$ и $K_{\beta_\nu}(\zeta r)$ - модифицированные функции Бесселя и Макдональда порядка $\beta_\nu=\sqrt{\mu_{33}\nu(\nu+1)/\mu_{11}+1/4}$; в отсутствии анизотропии магнитной проницаемости $\beta_\nu=\nu+1/2$.

Из второго уравнения системы уравнений Максвелла (17) следуют выражения для расчета амплитудных значений компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля в объеме токопроводящего полупространства:

$$H_r^*(r,\vartheta)=-\frac{\zeta(\zeta r)^{-3/2}}{i\omega\mu_{11}}\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu h_r^{(\nu)}(r)P_\nu(\xi),$$

$$H_\vartheta^*(r,\vartheta)=-\frac{\zeta(\zeta r)^{-1/2}}{i\omega\mu_{33}}\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu h_\vartheta^{(\nu)}(r)\frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial\vartheta}, \qquad (21)$$

где

$$h_r^{(\nu)}(r)=\begin{cases}\nu(\nu+1)I_{\beta_\nu}(\zeta r)\forall r\le r_2\,,\\ \nu(\nu+1)I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)K_{\beta_\nu}(\zeta r)/K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)\forall r>r_2\,;\end{cases}$$

$$h_\vartheta^{(\nu)}(r)=\begin{cases}\left[I_{\beta_\nu-1}(\zeta r)-\dfrac{\beta_\nu-1/2}{\zeta r}I_{\beta_\nu}(\zeta r)\right]\forall r\le r_2\,,\\ -\left\{I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)\left[K_{\beta_\nu-1}(\zeta r)+\dfrac{\beta_\nu-1/2}{\zeta r}K_{\beta_\nu}(\zeta r)\right]\Big/K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)\right\}\forall r>r_2\,.\end{cases}$$

Неизвестные константы $C_1^{(\nu)}$ и A_ν определяются из условий сопряжения магнитных полей на границе $\vartheta=\pi/2$ раздела сред с различными электрофизическими свойствами. Эти условия записываются следующим образом [6]:

$$H_r(r,\pi/2)=H_r^*(r,\pi/2), \qquad (22)$$

$$\mu_0H_\vartheta(r,\pi/2)=\mu_{33}H_\vartheta^*(r,\pi/2). \qquad (23)$$

Так как поверхностная плотность пондеромоторных сил электромагнитного поля, т. е. напряжения $\sigma^*_{\vartheta r}(r,\pi/2)$ и $\sigma^*_{\vartheta\vartheta}(r,\pi/2)$ представляются рядами по функциям $\psi(k_s r)$ и $\varphi(k_\ell r)$, то в контексте решаемой задачи это равносильно разложению в аналогичные ряды компонентов $H^*_r(r,\pi/2)$ и $H^*_\vartheta(r,\pi/2)$ вектора напряженности переменного магнитного поля. Принимая во внимание конструкцию выражений (9) и (10) для расчета коэффициентов разложения в указанные ряды, умножим левую и правую части граничного условия (22) на функцию $\psi(k_s r) = (k_s r)^{-1/2}\Psi_{2n+1}(k_s r)$ $(n = 0,1,2,...)$, а левую и правую части условия (23) на функцию $\varphi(k_\ell r) = (k_\ell r)^{-1/2}\Phi_{2n}(k_\hbar r)$ $(n = 1,2,...)$. Полученные результаты проинтегрируем по переменным $k_s r$ и $k_\ell r$ соответственно в пределах от нуля до бесконечности. После выполнения указанных операций граничные условия (22) и (23) можно записать в следующем виде

$$-\frac{1}{\mu_0 r_2}C_1^{(\nu)}c_{\nu n}(k_s) + \frac{\zeta}{i\omega\mu_{11}}A_\nu a_{\nu n}(\zeta,k_s) = J_0 r_2 \Xi_{\nu n}(k_s), \qquad (24)$$

$$-\frac{1}{r_2}C_1^{(\nu)}d_{\nu n}(k_\ell) + \frac{\zeta}{i\omega}A_\nu b_{\nu n}(\zeta,k_\ell) = J_0\mu_0 r_2 \Pi_{\nu n}(k_\ell), \qquad (25)$$

где

$$c_{\nu n}(k_s) = \nu(\nu+1)\left\{\frac{1}{(k_s r_2)^{\nu-1}}\int_0^{k_s r_2}(k_s r)^{\nu-3/2}\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r) + (k_s r_2)^{2+\nu}\int_{k_s r_2}^{\infty}(k_s r)^{-(\nu+5/2)}\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r)\right\};$$

$$a_{\nu n}(\zeta,k_s) = \nu(\nu+1)\left\{\int_0^{k_s r_2}(\zeta r)^{-3/2}(k_s r)^{-1/2}I_{\beta_\nu}(\zeta r)\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r) + \right.$$

$$\left. + \frac{I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}{K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}\int_0^{k_s r_2}(\zeta r)^{-3/2}(k_s r)^{-1/2}K_{\beta_\nu}(\zeta r)\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r)\right\};$$

$$\Xi_{\nu n}(k_s) = \nu(\nu+1)\left\{\frac{1}{(k_s r_2)^{\nu-1}}\int_{k_s r_1}^{k_s r_2}F_1^{(\nu)}(x)(k_s r)^{\nu-3/2}\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r) + (k_s r_2)^{2+\nu}\times\right.$$

$$\times\int_{k_s r_1}^{k_s r_2}F_2^{(\nu)}(x)(k_s r)^{-(\nu+5/2)}\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r) + (k_s r_2)^{2+\nu}\left[F_1^{(\nu)}(1) + \right.$$

$$\left.\left. + F_2^{(\nu)}(1)\int_{k_s r_2}^{\infty}(k_s r)^{-(\nu+5/2)}\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r)\right]\right\};$$

$$d_{\nu n}(k_\ell) = \frac{(\nu+1)}{(k_\ell r_2)^{\nu-1}}\int_0^{k_\ell r_2}(k_\ell r)^{\nu-3/2}\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_\ell r) -$$

$$-\nu(k_s r_2)^{2+\nu}\int_{k_{\ell s} r_2}^{\infty}(k_\ell r)^{-(\nu+5/2)}\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_\ell r);$$

$$b_{\nu n}\left(\zeta,k_\ell\right) = \int_0^{k_\ell r_2}(\zeta r)^{-1/2}\left[I_{\beta_\nu-1}(\zeta r) - \frac{\beta_\nu - 1/2}{\zeta r}I_{\beta_\nu}(\zeta r)\right](k_\ell r)^{-1/2}\times$$

$$\times\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_\ell r) - \frac{I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}{K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}\int_0^{k_s r_2}(\zeta r)^{-1/2}\left[K_{\beta_\nu-1}(\zeta r) + \frac{\beta_\nu - 1/2}{\zeta r}K_{\beta_\nu}(\zeta r)\right]\times$$

$$\times(k_\ell r)^{-1/2}K_{\beta_\nu}(\zeta r)\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_{\ell s} r);$$

$$\Pi_{\nu n}(k_\ell)=\frac{(\nu+1)}{(k_\ell r_2)^{\nu-1}}\int\limits_{k_\ell r_1}^{k_\ell r_2}F_1^{(\nu)}(x)(k_\ell r)^{\nu-3/2}\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_\ell r)-\nu(k_\ell r_2)^{2+\nu}\times$$

$$\times\int\limits_{k_{\ell s} r_1}^{k_\ell r_2}F_2^{(\nu)}(x)(k_\ell r)^{-(\nu+5/2)}\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_\ell r)-\nu(k_\ell r_2)^{2+\nu}\left[F_1^{(\nu)}(1)+F_2^{(\nu)}(1)\right]\times$$

$$\int\limits_{k_\ell r_2}^{\infty}(k_\ell r)^{-(\nu+5/2)}\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_\ell r).$$

Решение системы уравнений (24), (25) очевидно:

$$C_1^{(\nu)}=\mu_0 J_0 r_2^2\frac{C_{\nu n}(\zeta,k_s,k_\ell)}{\Gamma_{\nu n}(\zeta,k_s,k_\ell)},\quad A_\nu=\frac{\mu_0 J_0}{\mu_{33}r_0}(\zeta r_2)\frac{A_{\nu n}(k_s,k_\ell)}{\Gamma_{\nu n}(\zeta,k_s,k_\ell)},\tag{26}$$

где $C_{\nu n}(\zeta,k_s,k_\ell)=\Xi_{\nu n}(k_s)b_{\nu n}(\zeta,k_\ell)-\mu_0\Pi_{\nu n}(k_\ell)a_{\nu n}(\zeta,k_s)/\mu_{11}$;

$\Gamma_{\nu n}(\zeta,k_s,k_\ell)=\mu_0 d_{\nu n}(k_\ell)a_{\nu n}(\zeta,k_s)/\mu_{11}-c_{\nu n}(k_s)b_{\nu n}(\zeta,k_\ell)$;

$A_{\nu n}(k_s,k_\ell)=\Xi_{\nu n}(k_s)d_{\nu n}(k_\ell)-\Pi_{\nu n}(k_\ell)c_{\nu n}(k_s)$.

После определения коэффициентов A_ν, разложения компонентов вектора напряженности магнитного поля $\vec{H}^*(r,\vartheta)$ в ряды по функциям $\psi(k_s r)$ и $\varphi(k_\ell r)$ записывается следующим образом

$$H_r^*(r,\vartheta)=-\frac{\mu_0}{\mu_{11}}J_0 r_2(k_s r)^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{\nu n}(k_s,k_\ell)a_{\nu n}(\zeta,k_s)}{s_n\Gamma(\zeta,k_s,k_\ell)}\Psi_{2n+1}(k_s r)P_\nu(\xi),\tag{27}$$

$$H_\vartheta^*(r,\vartheta)=-\frac{\mu_0}{\mu_{33}}J_0 r_2(k_\ell r)^{-1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{\nu n}(k_s,k_\ell)b_{\nu n}(\zeta,k_\ell)}{\ell_n\Gamma(\zeta,k_s,k_\ell)}\Phi_{2n}(k_\ell r)\frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial\vartheta},\tag{28}$$

где $s_n=1/(4n-1)+1/(4n+3)+1/(4n+7)$; $\ell_n=1/(4n-3)+1/(4n+1)+1/(4n+5)$.

Соотношения (27) и (28) при значении аргумента функции Лежандра $\xi=0$ с точностью до постоянного множителя B_3^0, взятому с обратным знаком, определяют пространственное распределение и частотную зависимость поверхностных плотностей $\sigma_{\vartheta r}^*(r,\pi/2)$ и $\sigma_{\vartheta\vartheta}^*(r,\pi/2)$ пондеромоторных сил электромагнитного поля осесимметричного индуктора.

Окружной компонент $E_\varphi^*(r,\vartheta)$ вектора напряженности переменного электрического поля в объеме металлического полупространства также можно представить в виде рядов по функциям $\psi(k_s r)$ и $\varphi(k_\ell r)$. Выполнив эти разложения и умножив полученные результаты на удельную электрическую проводимость r_0, получаем два эквивалентных представления поверхностной плотности вихревого тока $J_\varphi^*(r,\vartheta)$, который фигурирует в определениях (12) объемных плотностей сил Лоренца. Подставляя значения вихревого тока в соотношения (12), получаем формулы для расчета радиального и полярного компонентов вектора объемной плотности сил Лоренца:

$$f_r^*(r,\vartheta)=\frac{\mu_0}{\mu_{33}}B_3^0 J_0(\zeta r_2)(k_s r)^{-1/2}\sin\vartheta\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{\nu n}(k_s,k_\ell)e_{\nu n}(\zeta,k_s)}{s_n\Gamma(\zeta,k_s,k_\ell)}\times\Psi_{2n+1}(k_s r)\frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial\vartheta}\tag{29}$$

$$f_\vartheta^*(r,\vartheta)=\frac{\mu_0}{\mu_{33}}B_3^0 J_0(\zeta r_2)(k_\ell r)^{-1/2}\cos\vartheta\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{A_{\nu n}(k_s,k_\ell)e_{\nu n}(\zeta,k_\ell)}{\ell_n\Gamma(\zeta,k_s,k_\ell)}\times\Phi_{2n}(k_\ell r)\frac{\partial P_\nu(\xi)}{\partial\vartheta},\tag{30}$$

где

$$e_{\nu n}(\zeta,k_s)=\int\limits_0^{k_s r_2}(\zeta r)^{-1/2}I_{\beta_\nu}(\zeta r)(k_s r)^{-1/2}\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r)+\frac{I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}{K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}\int\limits_{k_s r_2}^{\infty}(\zeta r)^{-1/2}K_{\beta_\nu}(\zeta r)(k_s r)^{-1/2}\Psi_{2n+1}(k_s r)d(k_s r);$$

$$e_{\nu n}(\zeta,k_\ell)=\int\limits_0^{k_\ell r_2}(\zeta r)^{-1/2}I_{\beta_\nu}(\zeta r)(k_\ell r)^{-1/2}\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_\ell r)+\frac{I_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}{K_{\beta_\nu}(\zeta r_2)}\int\limits_{k_s r_2}^{\infty}(\zeta r)^{-1/2}K_{\beta_\nu}(\zeta r)(k_\ell r)^{-1/2}\Phi_{2n}(k_\ell r)d(k_\ell r).$$

Таким образом, полностью определены все силовые факторы, которые входят в состав аналитических конструкций для расчета амплитудных множителей продольных и поперечных волн, которые возбуждаются осесимметричным источником переменного магнитного поля.

Выводы

Впервые сформулированы и математически строго решены обобщенные задачи Лэмба для осесимметричных, радиально распространяющихся сферических продольных и поперечных волн в изотропном упругом полупространстве. Полностью определены компоненты пондеромоторных сил электромагнитного поля, которое возбуждается в металлах неферромагнитной группы осесимметричным источником конечных размеров. Полученные результаты составляют теоретическую основу для построения математической модели преобразователя электромагнитного типа с осевой симметрией в режиме возбуждения сферических ультразвуковых волн.

Литература

1. *Горбашова А. Г., Петрищев О. Н., Сучков Г. М.* Электромагнитное возбуждение радиально распространяющихся поверхностных волн Рэлея // Вестник НТУ «ХПИ». Харьков. – 2010.- Вып. 19. – С. 159 – 182.
2. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 283 с.
3. Неразрушающий контроль: Справочник: В 7 т. Под общ. ред. В. В. Клюева. Т. 3. Ультразвуковой контроль / И. Н. Ермолов, Ю. В. Ланге. – М.: Машиностроение, 2004. – 864 с.
4. *Петрищев О. Н.* Принципы построения математических моделей ультразвуковых преобразователей электромагнитного типа в режиме возбуждения упругих волн // Электроника и связь. – 2005. - №25. – С. 50 – 61.
5. *Сучков Г. М.* Современные возможности ЭМА дефектоскопии // Дефектоскопия. – 2005. - № 12. – С. 24 – 39.
6. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.

УДК 534.232.082.74

Електромагнітний спосіб збудження сферичних хвиль, які розповсюджуються осесиметрично, у металевому просторі

Г.Г. Горбашова

Національний Технічний Університет України «Київський Політехнічний Інститут»,

вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

Розглянуто задачу про збудження осесиметричними силами Лоренца поздовжніх і поперечних сферичних хвиль в металевому півпросторі.

Задача розв'язана в наближенні дальнього поля із застосуванням інтегрального перетворення Ханкеля по радіальній координаті. Досліджено вплив розмірів перетворювача в області існування сил Лоренца на амплітудно-частотний спектр збуджуючих хвиль. Виконано порівняльний аналіз енергоємності поздовжніх і поперечних хвиль. Показано, що поперечні сферичні хвилі є домінуючими по енергетиці. Отримані результати являються теоретичною основою для побудови математичної моделі перетворювача електромагнітного типу з осьовою симетрією в режимі збудження сферичних ультразвукових хвиль. Бібл. 6, рис. 2.

Ключові слова:*сила Лоренца, сферичні хвилі, поздовжні і поперечні хвилі.*

UDC 534.232.082.74

Electromagnetic excitation method of spherical wave propagating axisymmetric in metal space

G.G. Gorbashova

National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute",

st.Polytechnique, 16, Kiev, 03056, Ukraine.

The problem of the excitation of axisymmetric Lorentz forces and shear waves in a spherical metal half.

The problem is solved in the approximation of the far field using the integral Hankel transform to the radial coordinate. Investigated the influence of the size of the inverter in the existence Lorentz forces on the amplitude-frequency spectrum of the excited waves. A comparative analysis of the energy of longitudinal and transverse waves. It is shown that the transverse spherical waves are dominant on energy. These results constitute the theoretical basis for the construction of a mathematical model of the electromagnetic transducer type with axial symmetry in the mode of excitation of spherical ultrasonic waves.Reference 6, figures 2.

Keywords: *Lorentz force, spherical waves, longitudinal and transverse waves.*

References

1. *Gorbashova A.G., Petrishchev O.N., Suchkov G.M.* (2010), [Electromagnetic excitation of radially propagating Rayleigh waves]. Herald of NTU "KPI". Kharkiv. No. 19. pp. 159 - 182. (Rus)
2. *Grinchenko V.T., Meleshko V.V.* (1981), [Harmonic Waves in elastic bodies]. Kiev: NaukovaDumka, P. 283. (Rus)
3. Non-destructive control: Ref.: In 7 vol. Ed. *V. V Klyuyev*. V.3: Ultrasonic testing. *N Yermolov*, *Y. V Lange*. Mashinostroenie, 2004. P. 864. (Rus)
4. *Petrishchev O.N.* (2005), [Principles of mathematical models of ultrasonic transducers electromagnetic type mode excitation of elastic waves]. Electronics and communication. No 25. Pp. 50 - 61. (Rus)
5. *Suchkov G.M.* (1976), [Current possibilities EMA inspection]. Flaw. No 12. Pp. 24 - 39. (Rus)
6. *Tamm I. E.* (1976), [Fundamentals of the theory of electricity]. M: Nauka. P. 616. (Rus)

Поступила в редакцию 12 марта 2013 г.