Теория сигналов и систем

УДК 534.8

К.А. Трапезон, канд. техн. наук

Метод факторизации при решении задач на собственные значения

Дано развитие аналитического метода факторизации при решении задач на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Метод позволяет найти ряд точных решений задачи о колебаниях стержней переменного сечения как активных элементов ультразвуковых систем общего назначения. Найдены все те геометрические конфигурации стержней переменного сечения, при которых осуществима реализация метода и на основе чего возможно дальнейшее развитие теоретических основ проектирования и расчета резонансных акустических систем.

Development of analytical method of factorization is given at the decision of tasks on own values for differential equalization the second order with variable coefficients. The method allows to find exact decisions of task about the vibrations of row of bars of variable section, as active elements of ultrasonic systems of the general setting. All those geometrical configurations of bars of variable section at which method realization, on the basis of what probably further development of theoretical bases of designing and calculation of resonant acoustic systems is realizable are found.

Ключевые слова: *факторизация, форма колебаний, частота колебаний, стержень, концентратор, колебательная система.*

Введение

Конструктивные упругие элементы в виде стержней, балок, дисков, пластинок переменной жесткости широко применяются в технических устройствах различных областей науки и техники машиностроении, строительстве, атомной энергетике, нефтяной промышленности, медицине. Отдельный интерес представляют стержневые элементы переменного сечения, которые применяются, например, в ультразвуковых устройствах медицинского назначения [1,2]. В подобных устройствах стержень-концентратор, (рис.1) являясь согласующим рабочим звеном между ультразвуковым преобразователем и нагрузкой, определяет эффективность проведения соответствующих операционных действий (например при соединении или резке биологических тканей разной структуры) [2].

Рис.1. Разновидности медицинских инструментов как стержней переменного сечения

В данном случае, исходя из специфических медицинских требований возникает резонный вопрос о длительности воздействия ультразвука, проходящего через стержень, уровне интенсивности его колебаний и точности воздействия рабочего инструмента на объект операции [3]. Подобные требования и вопросы полностью связаны с общей проблемой эффективности использования стержней переменного сечения в ультразвуковых устройствах, которая в свою очередь напрямую связана с выбором профиля стержня. Профиль стержня, определяемый законом изменения площади его поперечного сечения вдоль длины, выбирается исходя из решения соответствующей краевой задачи и ее анализа (вычисления собственных частот, построения собственных форм колебаний, определения местоположения узлов и пучностей для перемещений и напряжений). Как следует из многочисленных литературных источников, многие исследователи решение подобной задачи для стержня переменного сечения пытаются найти при помощи различных численных методов, среди которых наиболее популярным является метод конечных элементов [4,5]. При этом некоторые авторы для облегчения поиска эффективных профилей используют разнообразное программное обеспечение – ANSYS [4-6], ACELAN [7]. Как показывает практика, указанные программы обладают рядом недостатков и ограничений для задач на собственные значения [8]. Кроме этого, собственно метод конечных элементов не позволяет найти точное аналитическое решение поставленной задачи, приближение к результатам которой требует значительного количества затрат времени и пробных попыток.

Целью статьи является обобщение метода факторизации при решении задач на собственные значения для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Это позволит для установленных профилей стержня, подчиняющихся методу факторизации, упростить поиск решения соответствующего дифференциального уравнения и точного решения краевой задачи. Отметим, что частные модификации метода факторизации используются при решении задач теории упругости [9], задач статистической теории связи, теории теплопроводности, электродинамики [4,10-12].

Состояние проблемы и постановка задачи

Уравнение собственных форм продольных гармонических колебаний стержня переменного сечения имеет вид:

$$W''+\frac{F'}{F}W'+k^2W=0 \qquad (1)$$

где $W=W(x)$ - перемещение поперечного сечения стержня вдоль его продольной оси; $x=X/l$ - относительная (безразмерная) координата сечения; X - абсолютная координата; l - длина стержня; F - площадь поперечного сечения стержня, как тела вращения; $k=\frac{l\omega}{c}$ - частотный параметр (собственное значение); $\omega=2\pi f$ - круговая собственная частота колебаний стержня, f - циклическая частота колебаний;

$c=\sqrt{E/\rho}$ - скорость распространения продольной волны в стержне, E - модуль Юнга, ρ - плотность материала стержня;

Штрихи обозначают производные по относительной переменной x.

Уравнение (1) совместно с однородными граничными (краевыми) условиями, вытекающими из способа закрепления стержня на концах $x=0$ и $x=1$, представляет собой подлежащую решению краевую задачу. Например, если стержень не закреплен и концы его свободны, то граничные условия задачи должны быть записаны в виде $W'(0)=W'(1)=0$. Если найдено нетривиальное общее решение $W(x)\neq 0$ уравнения (1), то удовлетворив при помощи этого решения граничным условиям, найдем частные решения W_i $(i=0,1,2,\ldots)$, удовлетворяющие этим граничным условиям только при вполне определенных значениях чисел k_i Таким образом, математическое содержание задачи на собственные значения заключается в отыскании W_i (собственных функций) и k_i (собственных значений). Очевидно, что в случае уравнения (1) основная трудность заключается в поиске точных решений этого уравнения при различном законе изменения переменного коэффициента $F(x)$.

Рациональный выбор геометрической конфигурации стержня заключается в выборе закона $F=F(x)$ таким образом, чтобы интенсивность колебаний на его свободном конце (в области взаимодействия с нагрузкой) лежала в некоторых пределах или была бы как можно большей. Как показывает анализ литературных источников [13-15], набор используемых для этой цели функций $F(x)$ является незначительным и в основном ограничен случаями, описанными в работах [16,17]. Расширение ряда $F(x)$, при которых возможно получить точное решение уравнения (1) без использования приближенных или численных методов метода конечных элементов или метода припасовывания на основе кусочно-линейной аппроксимации [18,19], является важной задачей прикладной акустики.

Интерпретация метода факторизации для дифференциального уравнения второго порядка

Запишем уравнение (1) в виде

$$LLW-\left[\left(A^2+A'\right)-k^2\right]W=0, \qquad (2)$$

где $A=D'/D, D=F^{1/2}, L=\frac{d}{dx}+A$

Если положить

$$A^2+A'=\alpha^2=\mathrm{const}, \qquad (3)$$

то уравнение (2) можно представить в операторной форме

$$L_1L_2W=L_2L_1W=0, \qquad (4)$$

где

$$L_1=\frac{d}{dx}+A+\sqrt{\alpha^2-k^2};$$

$$L_2=\frac{d}{dx}+A-\sqrt{\alpha^2-k^2}.$$

Из условия (4) следует, что результат действия операторов L_1 и L_2, благодаря свойству их коммутативности, что легко проверяется раскрытием (4), позволяет записать общее решение уравнения (4) как сумму решений W_1 и W_2 уравнений

$$L_1 W_1 = 0 \text{ и } L_2 W_2 = 0.$$

Таким образом, при выполнении условия (3) решение базового уравнения второго порядка (1) может быть представлено суммой решений 2-х уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} W_1' + \left(A + \sqrt{\alpha^2 - k^2}\right) W_1 = 0; \\ W_2' + \left(A - \sqrt{\alpha^2 - k^2}\right) W_2 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

т.е.

$$W = B_1 * W_1 + B_2 * W_2, \tag{6}$$

где B_1^*, B_2^* произвольные постоянные.

Очевидно, что уравнения (5) легко интегрируются в замкнутом виде.

Следствия и примеры реализации метода

Из первого уравнения системы (5) получим

$$DW_1 = e^{-\sqrt{\alpha^2 - k^2} x},$$

а из второго соответственно

$$DW_2 = e^{\sqrt{\alpha^2 - k^2} x},$$

поэтому общее решение (6) будет иметь вид

$$W = \frac{1}{D}\left(B_1 * e^{-\sqrt{\alpha^2 - k^2} x} + B_2 * e^{\sqrt{\alpha^2 - k^2} x}\right). \tag{7}$$

Таблица 1. Общие решения уравнения (1) на основе метода факторизации

Профиль стержня $\sqrt{F(x)} = D(x)$	Решение $W(x)$
$C_1 + C_2 x$	$W = \frac{1}{C_1 + C_2 x}\left[A_1 \sin kx + B_1 \cos kx\right]$
$C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$	$W = \frac{1}{C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x}\left[A_1\left(\sin\left(x\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)\right) + B_1 \cos\left(x\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)\right]$
$C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x$	$W = \frac{1}{C_1 \sinh \alpha x + C_2 \cosh \alpha x}\left[A_1\left(\sin\left(x\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)\right) + B_1 \cos\left(x\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)\right)$
$e^{\pm \alpha x}$	$W = \frac{1}{e^{\pm \alpha x}}\left[A_1\left(\sin\left(x\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)\right) + B_1 \cos\left(x\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)\right]$
$C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$	$W = \frac{1}{C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}}\left[A_1\left(\sin\left(x\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)\right) + B_1 \cos\left(x\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)\right]$

Поскольку из физических соображений число k^2 может быть сколь угодно большим, что соответствует математической стороне задач на собственные значения, т.е. в любом случае $k^2 > \alpha^2$ то частные решения W_1 и W_2, следует записать в виде $W_1 = \frac{1}{D} e^{-i\sqrt{k^2 - \alpha^2 x}}$, $W_2 = \frac{1}{D} e^{i\sqrt{k^2 - \alpha^2 x}}$, а общее решение (7) в силу этого можно и следует выразить через тригонометрические функции, т.е.

$$W = \frac{1}{D}\left[B_1 \sin\left(x\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right) + B_2 \cos\left(x\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right)\right], \tag{8}$$

где B_1, B_2 - произвольные постоянные.

Остается определить все те значения функции $F(x) = D^2(x)$ при которых реализуется условие (3), а следовательно, и метод факторизации. Из (3) следует линейное уравнение с постоянными коэффициентами известного типа

$$D'' - \alpha^2 D = 0,$$

вид решений которого зависит от произвольной постоянной α^2. Все решения этого уравнения очевидны и имеют вид

$$D = \begin{cases} C_1 x + C_2; & \alpha^2 = 0 \\ C_1 \cos\alpha x + C_2 \sin\alpha x & \alpha^2 < 0 \\ \begin{bmatrix} C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} \\ C_1 \mathrm{ch}\alpha x + C_2 \mathrm{sh}\alpha x \end{bmatrix} & \alpha^2 > 0 \end{cases} \qquad (9)$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Подстановка результата (9) в (8) дает все возможные замкнутые решения уравнения (1) для частных случаев $D = \mathrm{const}; x; e^{\pm\alpha x}; \sin\alpha x; \cos\alpha x; \mathrm{sh}\alpha x; \mathrm{ch}\alpha x$ или для их линейных комбинаций согласно (9).

В таблице 1 приведены все замкнутые решения уравнения (1), которые получены на основе метода факторизации.

Следует отметить, что применение метода ограничивается только случаями, вытекающими из решений (7) и (8). Удовлетворив граничным условиям на концах стержня, можно получить соответствующее частотное уравнение из которого будет определен спектр собственных частот, а при найденных числах k_i $(i = 0,1,2,...)$ можно построить функции перемещений W_i и при необходимости функции напряжений W_i'.

Выводы

1. Представлена методика решения дифференциального уравнения форм продольных или крутильных колебаний стержня переменного сечения, позволяющая для ряда представленных случаев значительно упростить процедуру решения соответствующей краевой задачи.
2. Получены профили стержней переменного сечения, которые после проведения анализа и оценки эффективности их работы можно задействовать как базу для дальнейшего развития теории проектирования и расчета концентраторов акустической энергии.
3. Обобщен и систематизирован подход к решению задач на собственные значения с использованием принципа факторизации дифференциальных уравнений второго порядка и показан пример его реализации.

Литература

1. *Bansevicius R*. Investigation of ultrasonic probe for medical purposes / R. Bansevicius, A. Bubulis, V. Jurenas // Ultragarsas. — 2005. — Vol. 55, № 2. — P. 44—46.
2. *Kvashnin S*. Optimization of ultrasonic multi-function electroacoustic transducers of longitudinal vibrations for surgery / S. Kvashnin, I. Zorina // XXII Session of the Russian acoustical society. Session of the scientific council of Russian academy of science on acoustics : 15-17 june 2010 y. : proceedings. — Moscow, 2010. — P. 334-338.
3. *Шалимов М. П*. Сварка вчера, сегодня, завтра / М. П. Шалимов, В. И. Панов. — Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2006. — 227 с.
4. *Amza G*. Ultrasonic welding. Vibration modes and working parameters optimization / G. Amza, D. Nitoi, C. Amza // Annals of the Oradea university. Fascicle of management and technological engineering. — 2005. — Vol. IV. — P. 586—591.
5. *Ngaile G*. Influence of ultrasonic vibration on microforming / G. Ngaile, C. Bunget // Transactions of NAMRI/SME. — 2008. — Vol. 36. — P. 137—144.
6. *Amza G*. Contributions to finite element analysis of an ultra-acoustic system used in active applications of ultrasound – part I / G. Amza, C. Radu, Z. Apostolescu // Proceedings of the 1st WSEAS Int. Conference on visualization, Imaging and simulation (VIS08) : work mater. — Bucharest, 2008. — P. 137—140.
7. *Белоконь А. В*. Новые возможности пакета ACELAN для расчета характеристик пьезопреобразователей с неоднородной поляризацией / А. В. Белоконь, А. В. Наседкин, А. Н. Соловьев // Современные проблемы механики сплошной среды : IX международная конференция, посвященная 85-летию со дня рождения академика РАН И.И. Воровича, 11-15 окт. 2005 г. : труды. — Т. 2. — Ростов-на-Дону : Изд-во ООО “ЦВВР”, 2006. — С. 20—24.
8. *Cahrbulova M*. Ultrasonic resonant system parts characteristics / M. Cahrbulova, F. Pechasek // Machine design. 49th anniversary of the faculty of technical sciences : proceedings. — Trnava, 2009. — P. 319—322.
9. *Болотин В. В*. Вибрации в технике : справочник в 6-ти томах. Т. 1. Колебания линейных систем / В. В. Болотин ; под ред. В. В. Болотина. — М. : Машиностроение, 1978. — 352, [1] с.
10. *Григорян Э. Х*. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн / Э. Х. Григорян, К.Л. Агаян // Доклады национальной академии наук Армении. Секция “Теория упругости”. — 2010. — Т. 110, № 3. — С. 261—271.

11. *Базовкин А. В.* Метод факторизации для численного решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости / А. В. Базовкин, В. М. Ковеня, О. М. Вавилова // Вычислительные технологии. — 2009. — Т. 14, № 2. — С. 13—31.
12. *Инфельд Л.* Метод факторизации / Л. Инфельд, Т. Халл // Математика, период. сб. переводов иностр. статей. — 1966. — № 3. — С. 39—125.
13. *Bansevicius R.* Investigation of ultrasonic probe for medical purposes / R. Bansevicius, A. Bubulis, V. Jurenas // Ultragarsas. — 2005. — Vol. 55, № 2. — P. 44—46.
14. *Chen W.* Actuating mechanism and design of a double driving feet linear ultrasonic motor using longitudinal vibration transducer / W. Chen, Y. Liu, S. Shi // Key engineering materials. — 2010. — Vols. 434-435. — P. 775—778.
15. *Sandoz G. L.* Ultrasonic solid wood evaluation in industrial applications / G. L. Sandoz // NDNet. — 1996. — Vol. 1, № 12. — P. 123—125.
16. Расчет переходных стержней для магнитострикционных вибраторов / М. М. Писаревский // Труды научно-технического совещания по изучению рассеяния энергии при колебаниях упругих тел. — К. : Изд-во АН УССР, 1958. — С. 54—89.
17. *Меркулов Л. Г.* Расчет ультразвуковых концентраторов / Л. Г. Меркулов // Акустический журнал. — 1957. — Т. 3, № 3. — С. 230—238.
18. *Ганиев М. М.* Ультразвуковые виброударные системы в процессах формирования заданных свойств металлических и композиционных материалов в машиностроении : автореф. дис. на соискание уч. степени докт. техн. наук : спец. 05.02.02 „Машиноведение, системы приводов и детали машин” / М. М. Ганиев. — Казань, 2010. — 35, [1] с.
19. *Pis P.* Design of an ultrasonic concentrator / P. Pis, I. Balaz, M. Minarik // J. of electrical engineering. — 1997. — Vol. 48, № 5-6. — P. 131—139.

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Поступила в редакцию 30 августа 2012 г.