

УДК 621.314

Е.В. Вербицкий, д-р техн. наук, В.Я. Ромашко

Применение разностных уравнений в системах упреждающего управления преобразователями постоянного тока

Разработаны дискретные модели относительно части переменных состояния. Проведена оценка точности и трудоемкости полученных моделей. Показаны методы использования дискретных моделей для управления преобразователями постоянного тока.

Discrete models depending of part state variables are developed, accuracy and laboriousness discrete models are researched. Models utilization algorithms for direct current converters are shown.

Ключевые слова: упреждающее управление, преобразователь, разностное уравнение, дискретная модель, переменные состояния.

Введение

Одним из методов повышения динамических характеристик преобразователей постоянного тока является применение систем упреждающего управления [1]. Работа системы упреждающего управления основывается на прогнозе временной последовательности сигналов управления, которая переведет систему из текущего состояния в заданное, для чего используется математическая модель преобразователя. Возможность применения системы упреждающего управления для конкретного типа преобразователя определяется типом его математической модели. Основные требования, предъявляемые к математической модели:

- прогноз состояний системы с помощью математической модели должен происходить быстрее, чем протекает реальный процесс;
- математическая модель с заданной точностью должна отражать возможные режимы работы преобразователя.

Соблюдение данных требований обеспечивается выполнением минимального количества математических операций при прогнозе состояний системы и максимальным соответствием моделируемому преобразователю.

На практике чаще всего используют непрерывную математическую модель преобразователей, которая основывается на аналитической форме описания переходного процесса [2]. Такая математическая модель используется при постоянном количестве реактивных элементов в цепи нагрузки. Переменными величинами в мо-

дели являются значения параметров отдельных элементов нагрузки для определения которых разрабатываются специальные алгоритмы [3]. В этом случае структура аналитических формул модели постоянна. При изменении количества реактивных элементов нагрузки в широких пределах для формирования адекватной математической модели необходимо использовать алгоритмы диагностики структуры цепи нагрузки и решения дифференциальных уравнений преобразователя. Использование непрерывной математической модели приводит к громоздким и трудоемким результатам. Из-за того, что вычисления выполняются в масштабе реального времени, это резко ограничивает круг решаемых задач.

Для уменьшения трудоемкости расчетов в цепях с переменной структурой нагрузки целесообразно использовать дискретную математическую модель, с помощью которой состояния системы прогнозируются в дискретные моменты времени. Шаг дискретизации Δt , как правило, выбирают постоянным. Использование дискретной модели дает следующие преимущества:

- при формировании модели исключается этап решения дифференциального уравнения цепи;
- уменьшается количество математических операций в формулах прогноза за счет использования постоянных коэффициентов вместо трудоемких тригонометрических и экспоненциальных функций.

1. Дискретная модель относительно всех переменных состояния

Для формирования дискретной математической модели дифференциальное уравнение системы заменяется разностным [4, 5]:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y &= f(t); \\ \Downarrow \\ b_n y_{n+k} + \dots + b_1 y_{k+1} + b_0 y_k &= f^*(k). \end{aligned} \quad (1)$$

Один из возможных вариантов дискретной модели разработан для использования в широтно-импульсных преобразователях (ШИП) [6]. Для формирования рассматриваемой математической модели используется метод функций свободного режима (ФСР) [7]. Прогнозная математическая модель в матричной форме для точки k имеет следующий вид:

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{\text{ПЕР}}(\Delta t) + \mathbf{X}_{k-1} \cdot \mathbf{F}(\Delta t), \quad (2)$$

где $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_j, \dots, x_n]^T$ – вектор переменных состояния,

$\mathbf{X}_{\text{ПЕР}}(\Delta t)$ – значения переходной составляющей вектора переменных состояния в точке Δt ; $\mathbf{F}(\Delta t)$ – значения матрицы ФСР в точке Δt .

Итерационное выражение (2) позволяет прогнозировать значения переменных состояния с шагом Δt в цепях с произвольной структурой и параметрами. Следует отметить, что в прогнозных формулах используются только операции сложения и умножения, а трудоемкость вычислений имеет квадратичную зависимость от порядка цепи n .

Данную математическую модель целесообразно использовать при необходимости прогноза всех переменных состояния. В случаях, когда прогнозировать переменные состояния нагрузки нет необходимости или их измерение невозможно по техническим причинам, разработанная математическая модель является избыточной.

Для уменьшения трудоемкости вычислений целесообразно разработать математические модели относительно части переменных состояния x_j .

2. Дискретная модель относительно одной переменной состояния

Рассмотрим случай прогноза одной переменной состояния. Разностное уравнение рассматриваемой математической модели получается из выражения (1) при условии, что внешнее воздействие $f(t)$ постоянно. Для цепи порядка n общий вид математической модели относительно заданной переменной состояния x_j имеет следующую структуру:

$$x_{jk} = K_{n0} + \sum_{i=1}^n K_{ni} x_{j(k-i)}, \quad (3)$$

где K_{n0} , K_{ni} – постоянные коэффициенты.

Для нахождения коэффициентов K_{ni} необходимо измерить значения переменной состояния x_j , подставить полученные значения в уравнение (3) и решить, составленную из $n+1$ указанных уравнений, систему. Например, обозначив измеренные значения переменной состояния x_j $c_1 \dots c_7$, для цепи третьего порядка получим:

$$\begin{cases} c_4 = K_{30} + c_3 K_{31} + c_2 K_{32} + c_1 K_{33}; \\ c_5 = K_{30} + c_4 K_{31} + c_3 K_{32} + c_2 K_{33}; \\ c_6 = K_{30} + c_5 K_{31} + c_4 K_{32} + c_3 K_{33}; \\ c_7 = K_{30} + c_6 K_{31} + c_5 K_{32} + c_4 K_{33}. \end{cases} \quad (4)$$

Исключив из системы (4) одно уравнение и коэффициент K_{n0} и вычтя первое уравнение из последующих, получим следующую систему:

$$\begin{cases} c_5 - c_4 = (c_4 - c_3)K_{31} + (c_3 - c_2)K_{32} + \\ + (c_2 - c_1)K_{33}; \\ c_6 - c_4 = (c_5 - c_3)K_{31} + (c_4 - c_2)K_{32} + \\ + (c_3 - c_1)K_{33}; \\ c_7 - c_4 = (c_6 - c_3)K_{31} + (c_5 - c_2)K_{32} + \\ + (c_4 - c_1)K_{33}, \end{cases} \quad (5)$$

или в матричной форме:

$$\mathbf{G} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{K}, \quad (6)$$

где \mathbf{G} – вектор значений переменной состояния; \mathbf{Q} – матрица значений переменной состояния; \mathbf{K} – вектор коэффициентов K_{ni} .

Рассчитав коэффициенты K_{ni} , из любого уравнения системы (4) находится K_{n0} .

Используя значения коэффициентов K_{ni} и выражение (4) возможно рассчитать значение вынужденной составляющей X_{1B} , которое необходимо для реализации упреждающего управления. В установившемся режиме $X_{1k} = X_{1(k-1)} = \dots = X_{1(k-n)} = X_{1B}$, тогда

$$X_{1B} = K_{n0} + \sum_{i=1}^n K_{ni} X_{1B} \quad (7)$$

Из (7) определяется вынужденная составляющая:

$$X_{1B} = \frac{K_{n0}}{1 - \sum_{i=1}^n K_{ni}} \quad (8)$$

Как видно из формулы (8) между вынужденной составляющей X_{1B} и коэффициентом K_{ni} существует линейная зависимость и в случае свободного режима $K_{n0} = 0$.

Оценим трудоемкость вычислений при использовании разностных уравнений относительно одной переменной по сравнению с методом ФСР. Трудоемкость оценивается по количеству математических операций, используемых при расчетах. Прогнозные формулы относительно одной переменной состояния имеют структуру подобную формулам метода ФСР. Поскольку математическая модель метода ФСР состоит из n прогнозных формул, а математическая модель относительно одной переменной состояния – из одной, то трудоемкость вычислений в данной математической модели меньше в n раз. На рис. 1 показана зависимость уменьшения трудоемкости данной модели МР.У. по сравнению с методом ФСР в зависимости от порядка цепи n .

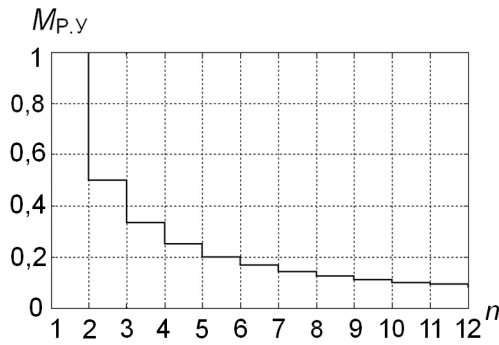


Рис. 1. Уменьшение трудоемкости вычислений модели относительно одной переменной состояния в зависимости от порядка цепи

Из графика видно, что трудоемкость вычислений для цепей 2-5 порядков при использовании математической модели относительно одной переменной состояния снижается в 2-5 раз.

Определим аналитические выражения коэффициентов K_{ni} . Для конкретности рассмотрим свободный процесс в цепи второго порядка, его аналитическая форма записи представлена ниже:

$$X_{CB}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (9)$$

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования; p_1, p_2 – корни характеристического уравнения.

Определив значения свободной составляющей в точках $0, \Delta t, 2\Delta t$:

$$X_{CB}(0) = A_1 + A_2, \quad (10)$$

$$X_{CB}(\Delta t) = A_1 e^{p_1 \Delta t} + A_2 e^{p_2 \Delta t}, \quad (11)$$

$$X_{CB}(2\Delta t) = A_1 e^{p_1 2\Delta t} + A_2 e^{p_2 2\Delta t}. \quad (12)$$

и сделав замены $e^{p_1 \Delta t} = B_1$ и $e^{p_2 \Delta t} = B_2$, получим:

$$X_{CB}(0) = A_1 + A_2, \quad (13)$$

$$X_{CB}(\Delta t) = A_1 B_1 + A_2 B_2, \quad (14)$$

$$X_{CB}(2\Delta t) = A_1 B_1^2 + A_2 B_2^2. \quad (15)$$

Подставив значения свободной составляющей (13)-(15) в (3), получим:

$$A_1 B_1^2 + A_2 B_2^2 = K_{n1}(A_1 B_1 + A_2 B_2) + K_{n2}(A_1 + A_2). \quad (16)$$

Для того, чтобы уравнение (16) стало тождеством, коэффициенты K_{n1} и K_{n2} должны иметь такие значения:

$$K_{21} = B_1 + B_2 = e^{p_1 \Delta t} + e^{p_2 \Delta t}, \quad (17)$$

$$K_{22} = -B_1 B_2 = -e^{(p_1 + p_2) \Delta t}. \quad (18)$$

Аналогично выводится выражения для коэффициентов K_{ni} цепей высших порядков. Для

цепей третьего порядка коэффициенты K_{ni} находятся по следующим формулам:

$$K_{31} = B_1 + B_2 + B_3, \quad (19)$$

$$K_{32} = -(B_1 B_2 + B_2 B_3 + B_3 B_1), \quad (20)$$

$$K_{33} = B_1 B_2 B_3. \quad (21)$$

По полученным результатам можно сделать вывод, что коэффициенты K_{ni} являются коэффициентами полинома степени n , корнями которого являются экспоненты корней характеристического уравнения в момент времени Δt : $q_1 = e^{p_1 \Delta t}$, $q_2 = e^{p_2 \Delta t}$, ..., $q_n = e^{p_n \Delta t}$. Уравнение, из которого определяются экспоненты корней характеристического уравнения, имеет следующий вид:

$$q^n - K_{n1} q^{n-1} - \dots - K_{n(n-1)} q - K_{nn} = 0. \quad (22)$$

Уравнение (22) является аналогом характеристического, но строится оно относительно экспонент корней характеристического уравнения.

3. Дискретная модель относительно двух переменных состояния

В случае необходимости прогноза более чем одной переменной состояния целесообразно рассмотреть прогнозные формулы относительно нескольких переменных состояния. Рассмотрим случай двух переменных состояния. Для нахождения выражений разностных уравнений составим систему уравнений методом ФСР для цепи третьего порядка при условии, что значения ФСР и переходной составляющей известны в моменты времени $t, t + \Delta t$ и $t + 2\Delta t$:

$$\begin{cases} x_1(t + \Delta t) = x_1(t)f_{11}(\Delta t) + x_2(t)f_{12}(\Delta t) + \\ \quad + x_3(t)f_{13}(\Delta t) + x_{1ПЕР}(\Delta t); \\ x_2(t + \Delta t) = x_1(t)f_{21}(\Delta t) + x_2(t)f_{22}(\Delta t) + \\ \quad + x_3(t)f_{23}(\Delta t) + x_{2ПЕР}(\Delta t); \\ x_1(t + 2\Delta t) = x_1(t)f_{11}(2\Delta t) + x_2(t)f_{12}(2\Delta t) + \\ \quad + x_3(t)f_{13}(2\Delta t) + x_{1ПЕР}(2\Delta t); \\ x_2(t + 2\Delta t) = x_1(t)f_{21}(2\Delta t) + x_2(t)f_{22}(2\Delta t) + \\ \quad + x_3(t)f_{23}(2\Delta t) + x_{2ПЕР}(2\Delta t). \end{cases} \quad (23)$$

Выразив из первого уравнения системы (23) переменную состояния x_3 и подставив ее в уравнения 3 и 4 получим:

$$\begin{cases} x_1(t + 2\Delta t) = v_{11}x_1(t + \Delta t) + \\ \quad + v_{12}x_1(t) + v_{13}x_2(t) + v_{10}; \\ x_2(t + 2\Delta t) = v_{21}x_2(t + \Delta t) + \\ \quad + v_{22}x_2(t) + v_{23}x_1(t) + v_{20}, \end{cases} \quad (24)$$

где $v_{11}-v_{13}, v_{21}-v_{23}$ – постоянные коэффициенты, значения которых зависят только от ФСР; $v_{10}-v_{20}$ – постоянные коэффициенты, значения

которых зависят от ФСР и переходной составляющей.

Кроме разностных уравнений (24) существуют другие формы разностных уравнений, которые получаются выражением переменной x_3 из других уравнений:

$$\begin{cases} x_1(t+2\Delta t) = v_{11}x_1(t+\Delta t) + \\ \quad + v_{12}x_1(t) + v_{13}x_2(t) + v_{10}; \\ x_2(t+2\Delta t) = v'_{21}x_1(t+\Delta t) + \\ \quad + v'_{22}x_1(t) + v'_{23}x_2(t) + v'_{20}, \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} x_1(t+2\Delta t) = v''_{11}x_2(t+\Delta t) + \\ \quad + v''_{12}x_1(t) + v''_{13}x_2(t) + v''_{10}; \\ x_2(t+2\Delta t) = v_{21}x_2(t+\Delta t) + \\ \quad + v_{22}x_1(t) + v_{23}x_2(t) + v_{20}. \end{cases} \quad (26)$$

Коэффициенты v_{pi} рассчитываются аналогично коэффициентам K_{pi} , но поскольку для их нахождения необходимо решить две системы уравнений, то трудоемкость формирования данной математической модели в два раза больше.

Например для разностных уравнений типа (24) и цепи третьего порядка коэффициенты v_{pi} рассчитываются с использованием двух систем:

$$\begin{cases} c_{14} - c_{13} = (c_{13} - c_{12})v_{11} + (c_{12} - c_{11})v_{12} + \\ \quad + (c_{22} - c_{21})v_{13}; \\ c_{15} - c_{13} = (c_{14} - c_{12})v_{11} + (c_{13} - c_{11})v_{12} + \\ \quad + (c_{23} - c_{21})v_{13}; \\ c_{16} - c_{13} = (c_{15} - c_{12})v_{11} + (c_{14} - c_{11})v_{12} + \\ \quad + (c_{24} - c_{21})v_{13}, \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} c_{24} - c_{23} = (c_{23} - c_{22})v_{21} + (c_{22} - c_{21})v_{22} + \\ \quad + (c_{12} - c_{11})v_{23}; \\ c_{15} - c_{13} = (c_{24} - c_{22})v_{21} + (c_{23} - c_{21})v_{22} + \\ \quad + (c_{13} - c_{11})v_{23}; \\ c_{26} - c_{23} = (c_{25} - c_{22})v_{21} + (c_{24} - c_{21})v_{22} + \\ \quad + (c_{14} - c_{11})v_{23}, \end{cases} \quad (28)$$

где c_{1i} , c_{2i} – значение переменных состояния x_1 и x_2 , или в матричной форме:

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{Q}_1 \cdot \mathbf{V}_1, \quad (29)$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{V}_2, \quad (30)$$

где \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_2 – векторы значений переменных состояния; \mathbf{Q}_1 , \mathbf{Q}_2 – матрицы значений переменных состояния; \mathbf{V}_1 , \mathbf{V}_2 – векторы коэффициентов v_{pi} .

4. Сравнение эффективности применения дискретных моделей

Из-за того, что математическая модель относительно одной переменной состояния общая

для всех переменных состояния, трудоемкость данной математической модели наименьшая. Но по точности прогноза модель относительно одной переменной состояния намного проигрывает им. Для демонстрации величины погрешности в моделях относительно разного количества переменных состояния проанализированы процессы в линейной цепи четвертого порядка, изображенной на рис. 2.

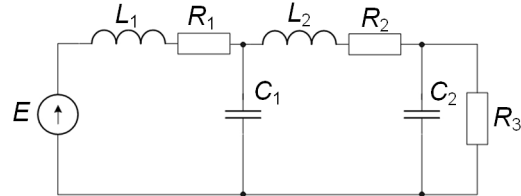


Рис. 2. Цепь четвертого порядка

Параметры элементов цепи: $E = 100$ В, $L_1 = L_2 = 10$ мкГн, $C_1 = C_2 = 50$ мкФ, $R_1 = R_2 = 0,2$ Ом, $R_3 = 100$ Ом. В данной цепи рассмотрено изменение напряжения на конденсаторе C_2 во время переходного процесса со следующими начальными условиями: $i_{L1} = -0,3$ А, $i_{L2} = 0,1$ А, $u_{C1} = 60$ В, $u_{C2} = 59$ В. Расчет переходного процесса проводился в программном пакете MatLab численным методом и с помощью дискретных моделей относительно одной, двух и четырех переменных состояния. Для численного метода использовался шаг интегрирования $\Delta t_i = 5 \cdot 10^{-9}$ с, для дискретных моделей – $\Delta t_i = 5 \cdot 10^{-7}$ с. Поскольку шаг интегрирования численного метода на два порядка меньше, то результаты расчета этим методом использовались как эталонные для сравнения погрешностей расчета с помощью дискретных моделей.

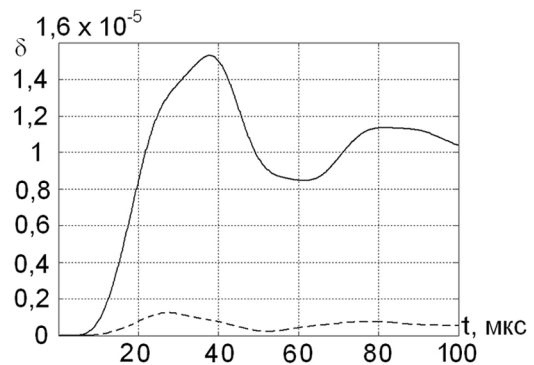


Рис. 3. Погрешность дискретных моделей относительно двух (—) и четырех (---) переменных состояния

Результаты расчета относительных погрешностей приведены на рис. 3 и рис. 4.

Максимальное значение погрешности для модели относительно одной переменной состояния составляет $\delta_{\max(1)} = 1\%$, относительно двух переменных состояния $\delta_{\max(2)} =$

0,0016 %, относительно четырех переменных состояния $\delta \max(n) = 0,00016$ %. Уменьшение

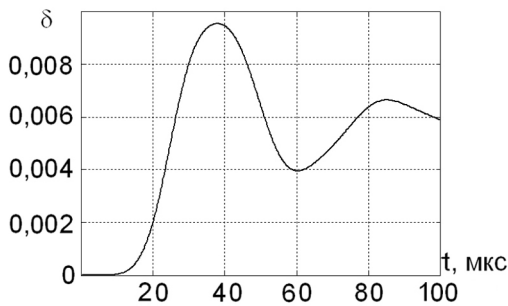


Рис. 4. Погрешность дискретной модели относительно одной переменной состояния

погрешности при использовании прогнозных формул относительно большего количества переменных состояния объясняется взаимной компенсацией погрешностей переменных состояния, что уменьшает суммарную погрешность расчетов. Исходя из этого, для уменьшения погрешности расчетов необходимо использовать прогнозные формулы относительно максимально возможного количества переменных состояния.

Перед применением разработанных моделей необходимо определить порядок цепи преобразователя. Порядок цепи определяется из условия вырожденности одной из матриц Q_1 , Q_2 в уравнениях (29), (30). Для определения вырожденности матрицы сначала рассматривается цепь с минимальным порядком. Потом порядок цепи постепенно увеличивается. Так продолжается до тех пор, пока матрицы Q_1 или Q_2 не станут вырожденными. Если матрицы вырождены для цепи порядка $n+1$, то действительный порядок цепи – n .

Трудоёмкость данного алгоритма эквивалентна решению системы из $n + 1$ уравнений, что незначительно увеличивает трудоёмкость формирования математической модели.

Выводы

Дискретные математические модели относительно части переменных состояния дают возможность применять системы упреждающего управления в преобразователях с нагрузкой, параметры которой изменяются в широких пре-

делах. Данные модели строятся на основании разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Коэффициенты математических моделей описывают суммарное влияние элементов цепи на переходной процесс, поэтому при коммутациях нагрузки для повторного формирования моделей достаточно пересчитать значения этих коэффициентов. Трудоёмкость прогноза и формирования дискретных моделей значительно меньше прогноза с помощью непрерывной модели, из-за отсутствия в формулах расчета трудоёмких экспоненциальных и тригонометрических функций.

Литература

1. Жуйков В.Я., Павлов В.Б., Стжелецки Р.Г. Системы упреждающего управления вентильными преобразователями. – К.: Наук. думка, 1991. – 240 с.
2. Сокол Е.И., Коноплев И.А., Вержановская М.Р. Расширение прогнозного диапазона с использованием разностных уравнений // Техническая электродинамика. Тем. вып. Силовая электроника и энергоэффективность. – 2002. – Ч. 2. – С. 82–86.
3. Коноплев И.А., Вержановская М.Р., Сокол Е.И. Методика идентификации параметров инвертора второго порядка с использованием кратных производных // Техническая электродинамика. Тем. вып. Силовая электроника и энергоэффективность. – 2001. – Ч. 1. – С. 36–39.
4. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. М.: Физматгиз, 1963. – 968 с.
5. Вентильные преобразователи переменной структуры. Тонкаль В.Е., Руденко В.С., Жуйков В.Я. и др. – К.: Наук. думка, 1989. – 336 с.
6. Жуйков В.Я., Ромашко В.Я., Вербицкий С.В. Використання метода функцій вільного режиму у системах упреждувального керування // Технічна електродинаміка. Тем. вип. Силова електроніка та енергоефективність – 2011. – Ч. 2. – С. 164–170.
7. Ромашко В.Я. Дискретно-лінійні електричні ланцюги. Теорія та розрахунок. – К.: Аверс, 2005. – 175 с.