# Акустические приборы и системы

УДК 534.8

К.А. Трапезон, канд. техн. наук

## Обобщенный метод симметрий при изучении колебаний упругих элементов

**Приведен метод расчета собственных колебаний акустических стержней переменной жесткости на основе реализации идей симметрий для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Построена схема практического применения метода для ряда прикладных задач физической акустики. Сформулированы основные положения, позволяющие распространить полученный метод на смежные прикладные задачи, где объектом исследования являются обыкновенные дифференциальные уравнения 2-го порядка.**

**The method of calculation of own vibrations of acoustic bars of variable rigidity on the basis of realization of ideas symmetries for the differential equation of the second order with variable factors is resulted. The scheme of application of the method for considerable number of applied problems of physical acoustics is constructed. The substantive provisions are formulated, allowing to extend the received method on adjacent applied problems where object of research are the ordinary differential equations of 2th order.**

**Ключевые слова**: *стержень, симметрия, уравнение, колебание, форма, резонанс, собственное число.*

### Введение

Силовые ультразвуковые электроакустические системы находят практическое применение в различных областях и отраслях народного хозяйства – в машиностроении для финишной обработки деталей при сварке [1,2], при создании ультразвуковых двигателей [3,4], при проведении исследований на усталость материалов, для ускорения различных химико-технологических процессов (очистка, окисление, коагуляция) [5], при создании конструкций новых ультразвуковых химических реакторов [6]. Основную роль в составе таких систем для обеспечения интенсивных продольных или крутильных резонансных колебаний играют стержни переменного сечения, называемые концентраторами, на которых возложена промежуточная или главная функция для обеспечения усиленных механических колебаний, передающихся на технологический объект. Эффективность эксплуатации таких стержней, связанная с обеспечением при этом минимально возможных эргономических показателей и допустимых физико-механических характеристик, является порой трудноразрешимой задачей для проектировщиков, что обусловлено ограниченным набором соответствующих конфигураций стержневых элементов. Возможный выход из сложившейся ситуации находят через использование разнообразных численных методов, где конфигурация-образующая стержня строится точечным способом на основе аппроксимации или линеаризации. Очевидно, что такой подход в силу своей “непрозрачности” и непредсказуемости получаемых результатов является трудоемким и неудобным при конструировании электроакустических систем. Актуальной представляется необходимость рассмотрения и решения вопроса о создании точного аналитического метода, который дал бы возможность не только решить соответствующую задачу на собственные значения, но и позволил бы определить реальные пути развития теории и поиска дальнейших возможностей по созданию новых эффективных экспериментальных образцов упругих элементов, профиль которых можно было бы изменять и рационализировать, не изменяя при этом общих результатов решения краевой задачи.

### Состояние вопроса и постановка задачи

Различные подходы к определению собственных форм продольных колебаний стержней переменного сечения сводятся к решению дифференциального уравнения второго порядка с переменным коэффициентом $F(x)$

$$W''+\frac{F'}{F}W'+k^2W=0, \tag{1}$$

Где $F$ - площадь поперечного сечения; $k=\frac{l\omega}{c}$ - частотное число; $\omega=2\pi f$ - круговая собственная частота колебаний; $f$ -циклическая

частота колебаний; $c = \sqrt{El\rho}$ - скорость распространения продольной волны в стержне, $E$ - модуль упругости, $\rho$ - плотность материала;
$l$ - длина стержня.

Штрихи обозначают производные по переменной $x$, отнесенной к длине $l$ При крутильных колебаниях форма уравнения (1) не изменяется, поэтому в дальнейшем все результаты, полученные для случая продольных колебаний, формально будут оставаться справедливыми и для крутильных при соответствующей замене физико-геометрических параметров.

Эффективность работы стержня переменного сечения в режиме резонансных продольных колебаний при соответствующих граничных условиях обусловлена выбором функции $F(x)$, которая описывает геометрическую конфигурацию стержня. Целью такого выбора в случае свободного стержня является обеспечение условий, при которых отношение амплитуд перемещений на свободных концах стержня было как можно большим, но при этом механические напряжения в своих пучностях были ниже предела выносливости материала, из которого изготовлен стержень. Как было отмечено ранее [7], проблема рационального проектирования упругих элементов и конструкций данного типа заключается в крайне ограниченном наборе функций $F = F(x)$ при которых можно получить точное решение уравнения (1). В свою очередь расширение случаев, при которых такое решение может быть получено в замкнутом виде возможно при использовании метода симметрий дифференциальных уравнений второго порядка, как нового метода математической физики.

Целью статьи является разработка с примером реализации обобщенного метода симметрий для уравнения (1), благодаря которому точные решения этого уравнения могут быть получены для целого ряда вновь построенных функций $F(x)$ и, следовательно, эти решения могут быть непосредственно использованы для расчета акустических трансформаторов энергии при профилях, соответствующих этим $F(x)$

**Математическая модель метода симметрий**

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} W = LW_1; \\ W_1 = L_1 W, \end{cases} \tag{2}$$

в которой дифференциальные операторы имеют вид

$$L = \alpha(x)\frac{d}{dx} + \beta(x);$$

$$L_1 = A(x)\frac{d}{dx} + B(x).$$

Система (2) может быть переписана в виде независимых уравнений для искомых функций $W(x)$ и $W_1(x)$, т.е. $W = L(L_1 W)$; $W_1 = L_1(LW_1)$

После раскрытия этих выражений получим

$$W'' + W'\left(\frac{A'}{A} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{B}{A}\right) + W\left(\frac{B'}{A} + \frac{B\beta}{A\alpha} - \frac{1}{A\alpha}\right) = 0; \tag{3}$$

$$W_1'' + W_1'\left(\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{B}{A}\right) + W_1\left(\frac{\beta'}{\alpha} + \frac{B\beta}{A\alpha} - \frac{1}{A\alpha}\right) = 0. \tag{4}$$

Согласно идее метода симметрий [8-10] уравнения (3) и (4) необходимо привести к виду (1), т.е. соответственно

$$W'' + \frac{F'}{F}W' + k^2 W = 0; \tag{5}$$

$$W_1'' + \frac{F_1'}{F_1}W_1' + k_1^2 W_1 = 0. \tag{6}$$

Если полагать в данном случае уравнение (5) исходным, то уравнение (6) будет его симметрией. Если, далее, при заданном $F(x)$ известно (найдено) решение $W$ уравнения (5), то автоматически согласно (2) будет получено решение $W_1$ уравнения (6) при $F_1$, построенном специальным образом согласно нижеследующим зависимостям. Полагаем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{A\alpha} = -k_1^2 = \text{const}; \\ &\frac{B'}{A} + \frac{B\beta}{A\alpha} = \lambda^2 = \text{const}; \\ &\frac{\beta'}{\alpha} + \frac{B\beta}{A\alpha} = 0 \\ &\frac{F'}{F} = \frac{A'}{A} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{B}{A}; \\ &\frac{F_1'}{F_1} = \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{B}{A}; \\ &k^2 = \lambda^2 + k_1^2. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Из системы соотношений (7) следует

$$F_1 = \frac{F}{A^2} = \alpha^2 F; \tag{8}$$

где $\alpha(x)$ будет определяться выражением

$$\alpha = \frac{\int F\beta^2 dx + C}{F\beta} \tag{9}$$

($C$ - произвольная постоянная), а входящая в (9) функция $\beta(x)$ является решением уравнения

$$\beta''+\frac{F'}{F}\beta'+\lambda^2\beta=0. \tag{10}$$

Сравнивая (10) и исходное уравнение (5), общее решение которого $W(x)$ предполагается известным при заданном $F(x)$, заключаем, что при $\lambda^2 \neq 0$ искомая функция $\beta(x)$ с точностью до постоянных множителей при частных решениях уравнения (5) соответствует функции $W(x)$, в которой следует заменить частотный параметр $k^2$ произвольной постоянной $\lambda^2$. В частном случае, когда $\lambda^2=0$ из (10) непосредственно следует

$$\beta=C_1\int\frac{dx}{F}+C_2 \tag{11}$$

($C_1, C_2$ - произвольные постоянные).

При найденных $\alpha(x), \beta(x), F_1(x)$ решение уравнения (6), заданное в виде $W_1=AW'+BW$, можно переписать с учетом взаимосвязи $(A,B)$ и $(\alpha,\beta)$ согласно (7) в виде

$$W_1=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{W}{\beta}\right)'. \tag{12}$$

**Схема применения метода**

Пусть известно решение исходного уравнения форм колебаний $W$ для $F$. При этом функцию $F$ можно взять из ряда функций, полученных методом факторизации.

2. Исходя из соотношения (8) строим функцию $F_1=\alpha^2F$ где коэффициент $\alpha$ определяют через параметр $\beta$ из (9).

3. Находим параметр $\beta$, как решение уравнения (10), причем возможны 2 случая:

– $\lambda^2=0$ решение находят путем простого интегрирования согласно (11).
– $\lambda^2 \neq 0$ уравнение (10) по форме совпадает с уравнением для $W$, но с заменой соответственно $W$ на $\beta$ и $k^2$ на $\lambda^2$. Произведя замену можно сразу же найти параметр $\beta$.

4. Находим решение $W_1$ для построенной функции $F_1$ согласно исходным условиям и уравнению из системы (2):

$W_1=LW=AW'+BW$,

где $A=-\frac{1}{k_1^2\alpha}; B=\frac{\beta'}{k_1^2\alpha\beta}; k_1^2=k^2-\lambda^2$. Таким образом, после соответствующих подстановок с точностью до постоянного множителя получим (12)

$$W_1=\frac{W}{\alpha}\left[\frac{W'}{W}-\frac{\beta'}{\beta}\right]=\frac{W}{\alpha}\left[\frac{(W/\beta)'}{W/\beta}\right]=\frac{\beta}{\alpha}\left[\left(\frac{W}{\beta}\right)'\right].$$

**Пример реализации метода**

Реализацию метода покажем на одном из следующих примеров. Пусть задан стержень круглого переменного сечения, профиль которого описывается функцией вида $F(x)=D^2(x)=x^2$, где $D(x)$ - диаметр поперечного сечения. Решение уравнения (1) для данного типа стержня легко может быть получено на основе метода факторизации. Таким способом для стержня с профилем $D=x$ получим решение $W(x)=\frac{1}{x}\left[A\sin kx+B\cos kx\right]$.

Исходя из метода симметрий по выражению (8), строим функцию $F_1(x)=\alpha^2F(x)=\alpha^2x^2$, где согласно схеме применения метода коэффициент $\alpha$ находим путем соответствующего интегрирования по формуле (9). В эту формулу входит параметр $\beta$, который определяется из (10) в зависимости от значения $\lambda^2$ В случае $\lambda^2=0$ из (11) следует

$$\beta=C_1\int\frac{dx}{x^2}+C_2=-\frac{C_1}{x}+C_2.$$

При найденном $\beta$ из (9) находим

$$\alpha=\frac{\int F\beta^2dx+C}{F\beta}=\frac{\int(C_2x-C_1)^2dx+C}{x(C_2x-C_1)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{3C_2}\right)(C_2x-C_1)^3+C}{x(C_2x-C_1)}=$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{3C_2}(C_2x-C_1)^2+\frac{C}{C_2x-C_1}\right].$$

Отношение $\beta/\alpha$ имеет вид

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{(C_2x-C_1)^2}{C+\frac{(C_2x-C_1)^3}{3C_2}}.$$

Новый профиль будет изменяться по закону

$$D_1=\alpha x=\frac{1}{3C_2}(C_2x-C_1)^2+\frac{C}{C_2x-C_1}.$$

Согласно схеме применения метода определяем решение уравнения для вновь полученного профиля $D_1$. В соответствии с (12) искомое решение уравнения (6) имеет вид

$$W_1 = \frac{3C_2(C_2x - C_1)^2}{3C_2C + (C_2x - C_1)^3}\left(\frac{A\sin kx + B\cos kx}{C_2x - C_1}\right)',$$

где $k = k_1$ при $\lambda^2 = 0$.

Удовлетворив граничным условиям на концах стержня, например для свободного стержня они будут $W_1'(0) = W_1'(1) = 0$, можно легко получить соответствующее частотное уравнение, из которого будет определен спектр собственных частот, а при найденных частотных числах $k$ построены собственные функции перемещений $W_1$ (формы собственных колебаний) и при необходимости функции напряжений.

## Выводы

1. Приведена математическая модель и формулировка аналитического метода решения задач на собственные значения для дифференциальных уравнений второго порядка, который основан на практической реализации идеи симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений.

2. Приведен алгоритм решения исходного уравнения форм колебаний для стержня переменного сечения как одного из характерных элементов электроакустических ультразвуковых систем технологического назначения. Получены основные соотношения, которые позволяют получить замкнутое решение приведенного дифференциального уравнения.

3. Сформулирована схема применения разработанного обобщенного метода симметрий для уравнений второго порядка и выявлены основные особенности, которые необходимо учитывать при проектировании вновь создаваемых акустических элементов.

## Литература


1. *Asami T.* Longitudinal and torsional vibration characteristics of hollow-type stepped horn required for hole machining by complex ultrasonic vibration / T. Asami, H. Miura // Proceedings of symposium on ultrasonic electronics. — 2010. — Vol. 31. — P. 533—534.
2. *Yan T.* Design of a smart ultrasonic transducer for interconnecting machine applications / T. Yan, W. Wang, Q. Li // Sensors. — 2009. — № 9. — P. 4986—5000.
3. *Chen W.* Actuating mechanism and design of a double driving feet linear ultrasonic motor using longitudinal vibration transducer / W. Chen, Y. Liu, S. Shi // Key engineering materials. — 2010. — Vols. 434-435. — P. 775—778.
4. *Ngaile G.* Influence of ultrasonic vibration on microforming / G. Ngaile, C. Bunget // Transactions of NAMRI/SME. — 2008. — Vol. 36. — P. 137—144.
5. *Khmelev V. N.* The device of ultrasonic cleaning of automobile injectors / V. N. Khmelev, R. V. Barsukov, S. N. Tsyganok // Electron Devices and Materials (4 th Annual 2003 Siberian workshop : 1-4 July 2003 y. : proceeding. — Biysk, 2003. — P. 196-198.
6. *Savin I. I.* Ultrasonic chemical reactors / I. I. Savin, S. N. Tsyganok, A. N. Lebedev // Electron Devices and Materials (EDM ‘07) : proceeding. — Biysk, 2007. — P. 289-292.
7. *Абакумов В. Г.* К анализу эффективности акустических концентраторов / В. Г. Абакумов, К. А. Трапезон // Микроэлектроника и информатика-2005 : межвузов. науч.-техн. конф., 19-21 апр. 2005 г. : тезисы докл. — М., 2005. — С. 153.
8. *Ибрагимов Н. Х.* Азбука группового анализа / Н. Х. Ибрагимов. — М. : Знание, 1989. — 48 с.
9. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных / У. Миллер ; пер. с англ. Г. П. Бабенка. — М. : Мир, 1981. — 344 с.
10. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер ; пер. с англ. И. Г. Щербака. — М. : Мир, 1989. — 639 с.


*Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»*

*Поступила в редакцию 6 марта 2012 г.*