Теория сигналов и систем

УДК 621.314 + 517.938

А.В. Кириленко, д-р техн. наук[1], В.Я. Жуйков, д-р техн. наук[2], М.Е. Количенко[2]

Трехкратные перемежающиеся хаотические процессы кусочно-непрерывных систем

В данной статье рассмотрены особенности хаотических процессов для случая комплексно-сопряженных корней характеристического многочлена, кусочно-непрерывных систем с обратной связью.

This article discusses the characteristics of chaotic processes in the case of complex conjugate roots of the characteristic polynomial, piecewise-continuous systems with feedback.

Ключевые слова: *хаос, ШИМ, отображение, фрактал.*

Введение

Исследование хаотических режимов работы в импульсных стабилизаторах напряжения с широтно-импульсным (ШИМ) регулированием, на математической модели [1], показало присутствие хаотических колебаний [2], подтвержденное экспериментом [3]. Особенностью таких процессов является то, что при расчете, значение постоянной типа Фейгенбаума изменяется в зависимости от точки начала расчета, что указывает на более сложную структуру хаотического процесса по сравнению с процессами в системах с гладкими нелинейностями.

В данной статье рассмотрены особенности, структура и постоянные хаотических процессов в понижающем широтно-импульсном преобразователе для случая комплексно-сопряженных корней характеристического многочлена.

1. Описание модели

Рассматривается электрическая схема устройства (рис.1), используемого как широтно-импульсный преобразователь постоянного напряжения в постоянное, для которого характерны два непрерывных состояния, при условии непрерывности тока дросселя i_L. Ключи S1 и S2 работают поочередно и приняты идеальными. Элементы компаратор и инвертор – идеальные и безинерционные.

Система уравнений, которая описывает работу схемы, изображенной на рис.1, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} \dfrac{di_L}{dt} \\ \dfrac{du_C}{dt} \end{vmatrix} = A(\gamma_1)X + B(\gamma_1) = \begin{vmatrix} -\dfrac{\gamma_1 r}{L} & \dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{RC} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_L \\ u_C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1 E \\ 0 \end{vmatrix}, \\ F(u_{co}, u_Г) = u_{oc} = u_Г - u_{co}, \\ u_Г = U_M(t - nT)/T,\ u_{co} = k(u_{оп} - k_Д u_C), \\ \gamma_1(u_{oc}) = \begin{cases} 0, u_{oc} < 0, \\ 1, u_{oc} \ge 0; \end{cases}; \end{cases} \quad (1)$$

где: E - напряжение источника питания; R, r - сопротивления нагрузки, и внутреннее сопротивление источника, соответственно; L, C - линейные индуктивность и емкость, соответственно; $k_д$ - коэффициент уменьшения выходного напряжения поступающего в систему управления; u_C, $u_{оп}$, U_M - напряжения на емкости, опорное и амплитудное с периодом Т, соответственно; u_{co} - сигнал ошибки усиленный в k раз; $u_Г$ - развертывающие пилообразное напряжение; k – коэффициент усиления сигнала ошибки; $\gamma_1(u_{OC})$ - функция принимающая значение либо – «0», либо – «1», в зависимости от значения функционала $F(u_{CO},u_Г)$; n – номер периода развертывающего напряжения, n=0,1,2,3,….

2. Методика моделирования

Моделирование процессов проводится на программном обеспечении написанном на языке С++, на компьютере с микропроцессором Intel® Core™2 Duo 2 ГГц, и оперативной памятью объемом 2 Гб. Расчет дифференциальных уравнений проводится численным методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности, с фиксированным шагом – $\Delta t=10^{-7}$ с. Выбор шага с которым проводится моделирование Δt, осуществлен опытным путем. При относительно больших значениях Δt невозможно получить длительный хаотический процесс из-за малой точности определения координат точки пересечения сигнала ошибки и развертывающего напряжения. При малых значениях Δt время моделирования и объем используемой памяти не позволяет решить поставленную задачу. Поэтому, был выбран шаг $\Delta t=10^{-7}$, при котором

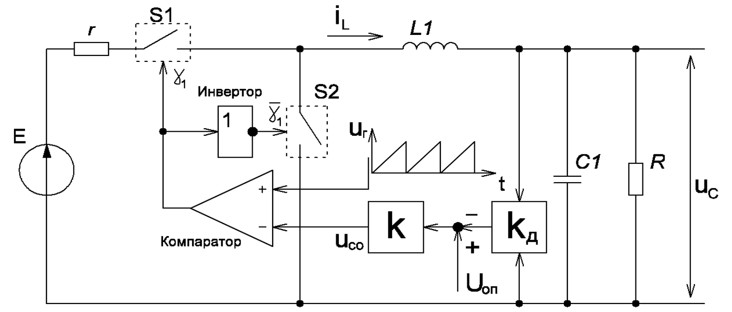

Рис.1. Электрическая схема широтно-импульсного преобразователя с двумя непрерывными состояниями

точность решения позволяет рассчитать хаотический процесс на интервале необходимой длительности, а средняя длительность моделирования процесса составляет 600 секунд. Алгоритм, по которому проводится моделирование, приведен на рис.2.

3. Результаты моделирования

Для параметров схемы: $R=4{,}8$ *Ом*; $r=0{,}01$ *Ом*, $L=0{,}006$ *Гн*, $C=0{,}0002$ *Ф*, $E=48$ *В*, $U_{ОП}=6$ *В*, $U_М=6$ *В*, $T=0{,}001$ *с*, $k_Д=0{,}125$, $k=13$, корни p_1, p_2 характеристического многочлена матрицы А – являются комплексно-сопряженными и при $\gamma_1=0$ – $p_1=-521{,}67+750{,}29i$, $p_2=-521{,}67-750{,}29i$, при $\gamma_1=1$ – $p_1=-520{,}83+749{,}71i$, $p_2=-520{,}83-749{,}71i$, получен следующий вид зависимости напряжения сигнала ошибки u_{OC} от времени (рис.3) и отображение $e_{n+1}+\tau_{n+1}=f(e_n+\tau_n)$ (рис.4), где: τ_n – момент перехода функции $\gamma_1(u_{OC})$ из «1» в «0» на периоде развертывающего напряжения, $0<\tau_n<T$; e_n – целое число периодов развертывающего напряжения вложенных в одно хаотическое колебание; n=1,2,3,….

При заданных параметрах в системе присутствуют три перемежающихся хаотических процесса X1, X2 и X3, с характерными для каждого из них целочисленными фрактальными последовательностями, n_{X1}, n_{X2} и n_{X3}, где n_{Xi} – целое число периодов развертывающего напряжения вложенных в интервал хаотических колебаний Xi. Интервал хаотических колебаний - интервал на временной оси расположенный между точкой начала (первое на интервале пересечение u_{co} и $u_Г$) и точкой срыва (последнее на интервале пересечение u_{co} и $u_Г$) генерации хаотического процесса Xi, i=1,2,3. Для определения интервалов существования процессов X1, X2 и X3 на временной оси используется следующая процедура. Строится отображение $e_{n+1}+\tau_{n+1}=f(e_n+\tau_n)$, и на нем выделяются кривые являющиеся основными для процессов, кривые 1, 2 и 3, рис.3 и кривые 1', 1", 2', 2", 3', 3" через которые происходит переход между основными кривыми процессов. Далее при рассмотрении временной зависимости u_{CO} (рис.4) колебание причисляются к тому процессу на кривые которого ложатся точка переключения соответствующая данному колебанию.

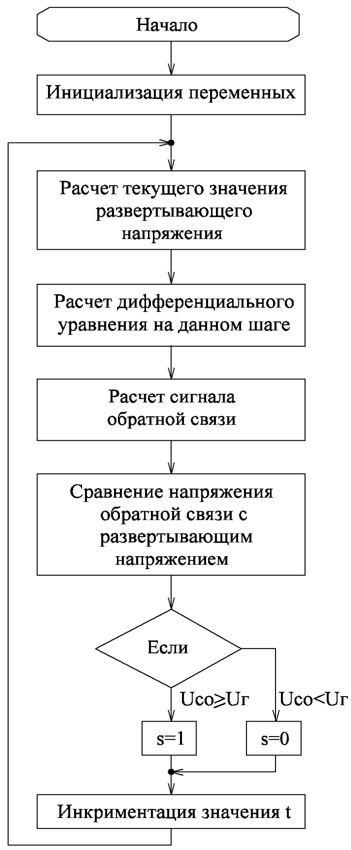

Рис. 2. Алгоритм моделирования

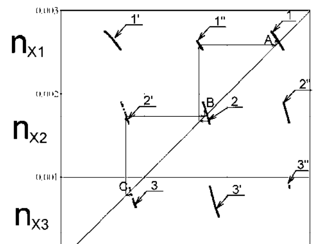

Рис.3. Отображение $e_{n+1}+\tau_{n+1}=f(e_n+\tau_n)$

Зависимость u_{CO} от времени (рис.4) представляет собой непериодические колебания амплитуды которых изменяются, и не повторяются во времени.

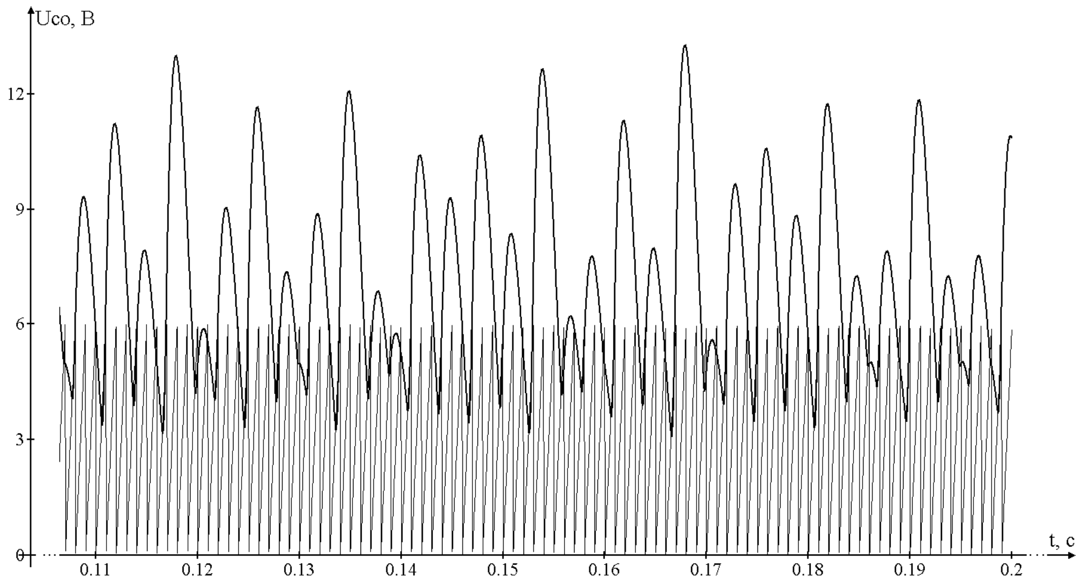

Рис. 4. Зависимость напряжения сигнала ошибки u_{CO} от времени

Исследования показали, что интервал $nT \le t \le (n+1)T$ содержит семь характерных участков, которые изображены на рис.5. Участок I расположен в начале периода развертывающего напряжения, пересечение напряжения обратной связи с развертывающим напряжением на данном интервале невозможно, из-за того, что производная сигнала обратной связи конечна [4]. Точки пересечения располагающиеся на участках II, IV и VI однозначно принадлежат процессам X1, X2 и X3, соответственно. Точки пересечения располагающиеся на интервале III (V) принадлежат либо процессу X1 либо X2 (X2 либо X3) в зависимости от расположения предыдущей точки пересечения u_{CO} с $u_{Г}$. На участке VII, расположенном в конце периода развертывающего напряжения точки пересечения отсутствуют из-за нечувствительности системы на данном участке.

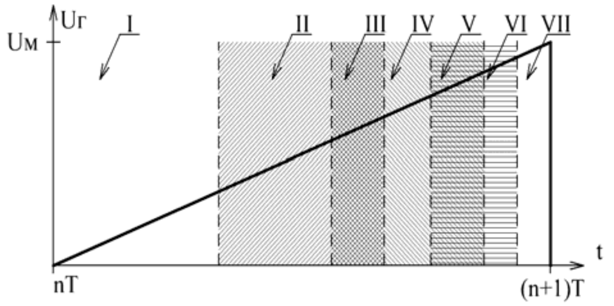

Рис. 5. Характерные участки на периоде развертывающего напряжения

Отображение $(e_{n+1} + \tau_{n+1} = f(e_n + \tau_n))$ - представляет собой итерационную зависимость значения $(e_{n+1} + \tau_{n+1})$ на текущем хаотическом колебании от $(e_n + \tau_n)$ на предыдущем хаотическом колебании, и содержит девять кривых (1, 1’, 1”, 2, 2’, 2” и 3, 3’, 3”) и три точки стремления системы A, B и C, к равновесным неустойчивым состояниям располагающимся на кривых 1, 2 и 3, соответственно.

В качестве примера на рис. 3 показан, отраженный стрелками, переход процесса X3 (кривая 3) на процесс x2 (кривая 2), и с X2 на X1 (кривая 2 - кривая 1). Отметим, что переход с одного основного процесса, например, с X1 на другой, X2 или X3 и так далее, осуществляется только через вспомогательные кривые отображений 1’, 1”, 2’, 2”, 3’ и 3”.

В таблице 1 приведены целочисленные фрактальные последовательности для процессов X1, X2 и X3, переходы между которыми обозначены стрелками. Последовательность n_{X1} состоит из чисел: 2, 5, 8, 11, 14, …; n_{X2} состоит из чисел: 1, 3, …; n_{X3} состоит из чисел: 0, 1, …. Данные последовательности являются фрактальными и неповторяющимися.

Таблица 1. Целочисленные фрактальные последовательности для процессов X1, X2 и X3

	…	n_{i+1}	n_{i+2}	n_{i+3}	n_{i+4}	n_{i+5}	n_{i+6}	n_{i+7}	n_{i+8}	n_{i+9}	n_{i+10}	n_{i+11}	n_{i+12}	n_{i+13}	n_{i+14}	n_{i+15}	n_{i+16}	…
X1	…	5	2	5	5	8	5	2	5	5	14	2	2	11	-	2	-	…
X2	…	1	1	-	1	1	1	1	1	3	3	1	-	1	1	1	1	…
X3	…	0	-	1	0	0	0	-	0	-	0	0	1	0	0	0	0	…

Элементы последовательности n_{Xi} определяются по формуле $n_{Xi} = n_{Ximin} + (n_{Ximin} + 1)(j - 1)$, где n_{Ximin} - минимальное значение n_{Xi}, которое определяется из отображения $e_{n+1} + \tau_{n+1} = f(e_n + \tau_n)$, и для процессов X1, X2 и X3 соответственно равно 2, 1 и 0; j - количество колебаний в интервале хаотических колебаний, j=1,2,3,….

Расчет постоянных типа Фейгенбаума проведенный по формуле $\delta = \left|(\tau_n - \tau_{n-1})/(\tau_{n+1} - \tau_n)\right|$ для основных кривых отображения 1, 2 и 3 (рис.3), дает следующие значения постоянных процессов соответственно равных: для X1 - $\delta_{X1} \approx 0{,}37$, для X2 - $\delta_{X2} \approx 0{,}28$ и для X3 - $\delta_{X3} \approx 0{,}33$.

Отметим, что Возможность генерации хаотического процесса в системе определяется значениями всех коэффициентов дифференциального уравнения и уравнения обратной связи

Выводы

Таким образом, рассматриваемый хаотический процесс состоит из перемежающихся хаотических процессов, каждый из которых содержит целочисленную, непериодическую, фрактальную последовательность и детерминированную хаотическую составляющую с присущей ей постоянной процесса, что указывает на более сложный процесс, протекающий в системе по сравнению с хаотическими процессами генерируемыми в системах с гладкими нелинейностями.

Литература

1. Жуйков В.Я., Леонов А.О., Хаотические процессы в электротехнических системах. // Изв. АН СССР Энергетика и транспорт. – 1991. №1. С. 121-127.
2. Савицки А. Анализ условий и разработка критериев возникновения хаотических процессов в электрических цепях применительно к задачам электротехники и электроэнергетики // Дис. канд. наук. Киев. 1988. 201 с.
3. Korotyeyev I., Zhuikov V., Kasperek R., Electrotechnical Systems: Calculation and Analysis with Mathematica and PSpice. – CRC Press, 2010.
4. Жуйков В.Я., Количенко М.Е., Исследование хаотических процессов в системе с ключами. // Технічна електродинаміка, тематичний випуск «Проблеми сучасної електроніки», Частина 2. – Киев 2010. – С. 20 – 25.

[1] *Институт электродинамики, Киев, Украина*

[2] *Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»*