

УДК 534.121.1

А.В. Богдан, О.Н. Петрищев, д-р техн. наук, Ю.И. Якименко, д-р техн. наук, Ю.Ю. Яновская

Неосесимметричные радиальные колебания тонких пьезоэлектрических дисков

В работе предложена методика математического моделирование неосесимметричных радиальных колебаний тонких дисков. Проведено моделирование нулевого решения задачи.

The non axisymmetric radial oscillations of the thin piezoelectric disc is calculated in this paper. The zero approximation of the solution is provided as well.

Ключевые слова: МЭМС, неосесимметричные радиальные колебания, тонкий пьезоэлектрический диск, моделирование, напряженно-деформированное состояние.

Введение

В последнее время широкое распространение в элементах электронных устройств получили микро электро-механические системы (МЭМС), применение которых позволяет получить ряд преимуществ, таких как: минимизация размеров элементов, высокая надежность, малые потери и возможность использования нескольких резонаторов в одном чипе [1]. Одной из перспективных конструкций МЭМС резонатора, широко используемой для проектирования современных информационных является дисковая конструкция [1]. Дисковые пьезоэлектрические устройства широко применяются в элементах информационных систем: в беспроводной связи [2, 3, 4, 5], элементах спутниковых систем связи, системах глобального позиционирования [6].

Анализируя конструкции современных дисковых пьезоэлементов [7, 8, 9, 10], можно заметить что большинство из них имеют несимметричное расположение электродов на своей поверхности (например см. рис. 1 [7]). Такое расположение электродов, а так же крепление элементов, вызывает наличие неосесимметричных колебаний в дисковых резонаторах. При анализе частотных характеристик таких устройств необходимо учитывать влияние на них этих колебаний.

В ряде работ [11, 12, 13] приведено моделирование неосесимметричных колебаний тонких дисков покрытых несимметричными электродами, но использованные при этом модели элементов отличаются от применяемых в современных устройствах. В работе [14] есть моделирование неосесимметричных колебаний дис-

кового резонатора, но его недостатком является неполный учет пьезоэлектрических свойств резонатора.

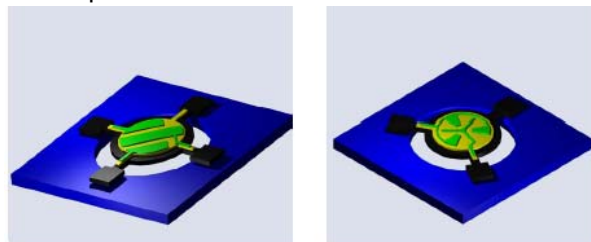


Рис. 1. Модель современных дисковых МЭМС резонаторов

Кинематические характеристики неосесимметричных радиальных колебаний абсолютно точно удается определить только лишь в том случае когда материал диска обладает изотропией упругих свойств при этом компоненты вектора смещений материальных частиц определяются через скалярный потенциал и аксиальный компонент векторного потенциала. Указанные потенциалы удовлетворяют уравнениям Геймгольца, которые являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Описание неосесимметричных колебаний в пьезоэлектрическом диске предполагает совместное решение уравнений движения (2 закон Ньютона в дифференциальной форме) и уравнений электродинамики которые сводятся к условию отсутствия свободных носителей электричества в объеме деформируемого пьезоэлектрика. Связь электрических и упругих полей обеспечивается обобщенным законом Гука [15] для упругих сред с пьезоэлектрическим эффектом.

В этой работе предложена методика математического моделирования неосесимметричных радиальных колебаний тонких дисковых МЭМС с секторным расположением электродов.

1. Неосесимметричные колебания тонкого пьезокерамического диска

Предположим, что тонкий диск (см. рис. 2), размеры которого удовлетворяют сильному неравенству $h/R \ll 1$, изготовлен из поляризованной по толщине пьезоэлектрической керамики. Диск находится в вакууме. На покрытые слоем металла (электроды) поверхности диска $z = \pm h$ от внешнего генератора подается гармонически изменяющаяся во времени по закону $e^{i\omega t}$,

($i = \sqrt{-1}$, ω - круговая частота, t - время) разность электрических потенциалов $U_0 e^{i\omega t}$. Расчеты выполнены в радиальной системе координат с центром совмещенным с центром диска.

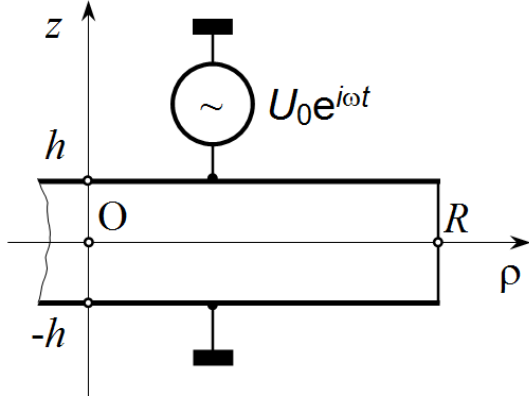


Рис. 2. Расчетная схема тонкого пьезокерамического диска

Рассмотрим неосесимметричные колебания тонкого пьезокерамического диска. Уравнения движения этого диска будут следующими [15]:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) + \rho_0 \omega^2 u_\rho = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\vartheta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial z} + \frac{2}{\rho} \sigma_{\rho\vartheta} + \rho_0 \omega^2 u_\vartheta = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\vartheta z}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \sigma_{\rho z} + \rho_0 \omega^2 u_z = 0 \quad (3)$$

Так как рассматриваемый пьезокерамический диск тонкий, т.е. его высота h равна его радиусу R , то поверхностные напряжения $\sigma_{\rho z}$ и $\sigma_{\vartheta z}$ должны быть равными нулю. Кроме того, так как рассматриваемый диск тонкий, можно также приравнять к нулю изменение напряжения σ_{zz} , тогда смещения $u_z = 0$. Тогда уравнение (3) будет всегда равно нулю, а (1) и (2) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\rho\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\rho} (\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\vartheta\vartheta}) + \rho_0 \omega^2 u_\rho = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\vartheta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{2}{\rho} \sigma_{\rho\vartheta} + \rho_0 \omega^2 u_\vartheta = 0 \quad (5)$$

Радиальный и угловой компонент тензора напряжений можно представить следующим образом:

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11} \varepsilon_\rho + c_{12} \varepsilon_\vartheta + \tilde{e}_{31} E_z, \quad (6)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = c_{12} \varepsilon_\rho + c_{11} \varepsilon_\vartheta + \tilde{e}_{31} E_z,$$

где $c_{11} = c_{11}^E - (c_{13}^E)^2 / c_{33}^E$; $c_{12} = c_{12}^E - (c_{13}^E)^2 / c_{33}^E$; $\tilde{e}_{31} = (c_{13}^E e_{33}) / c_{33}^E - e_{31}$.

Радиально - угловой компонент тензора напряжений, что входит в формулы (4) и (5) можно записать следующим образом:

$$\sigma_{\rho\vartheta} = 2c_{66}^E \varepsilon_{\rho\vartheta}, \quad (7)$$

Значения деформаций из уравнений (6) и (7) будут:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\rho\rho} &= \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \\ \varepsilon_{\vartheta\vartheta} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_\rho}{\rho} \\ \varepsilon_{\rho\vartheta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \rho} - \frac{u_\vartheta}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Предположим, что смещения материальных частиц диска в радиальном и угловом направлении имеют следующий вид:

$$u_\rho = U_\rho(\rho) \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix}, \quad u_\vartheta = U_\vartheta(\rho) \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Подставим (8) и (9) в определение компонентов тензора напряжений и получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho} &= \left[c_{11} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + c_{12} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_\rho}{\rho} \right) \right] + \tilde{e}_{31} E_z = \\ &= \left[c_{11} \frac{\partial U_\rho(\rho)}{\partial \rho} + c_{12} \left(\frac{-n}{\rho} U_\vartheta(\rho) + \frac{U_\rho(\rho)}{\rho} \right) \right] \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix} + \tilde{e}_{31} E_z, \\ \sigma_{\vartheta\vartheta} &= \left[c_{12} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + c_{11} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{u_\rho}{\rho} \right) \right] + \tilde{e}_{31} E_z = \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= \left[c_{12} \frac{\partial U_\rho(\rho)}{\partial \rho} + c_{11} \left(\frac{-n}{\rho} U_\vartheta(\rho) + \frac{U_\rho(\rho)}{\rho} \right) \right] \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix} + \tilde{e}_{31} E_z, \\ \sigma_{\rho\vartheta} &= c_{66}^E \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial \rho} - \frac{u_\vartheta}{\rho} \right] = \\ &= c_{66}^E \left[\frac{n}{\rho} U_\rho(\rho) + \frac{\partial U_\vartheta(\rho)}{\partial \rho} - \frac{U_\vartheta(\rho)}{\rho} \right] \begin{pmatrix} -\sin(n\vartheta) \\ \cos(n\vartheta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подставив соотношения (10) в уравнения движения (4) и (5) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned} c_{11} \frac{\partial^2 U_\rho(\rho)}{\partial \rho^2} + c_{11} \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_\rho(\rho)}{\partial \rho} - c_{11} \frac{1}{\rho^2} U_\rho(\rho) + \\ + c_{66}^E \frac{n^2}{\rho^2} U_\rho(\rho) - c_{66}^E \frac{n}{\rho} \frac{\partial U_\vartheta(\rho)}{\partial \rho} - c_{12} \frac{n}{\rho} \frac{\partial U_\vartheta(\rho)}{\partial \rho} + \\ + c_{11} \frac{n}{\rho^2} U_\vartheta(\rho) + c_{66}^E \frac{n}{\rho^2} U_\vartheta(\rho) + \rho_0 \omega^2 U_\rho(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$c_{66}^E \frac{\partial^2 U_g(\rho)}{\partial \rho^2} + c_{66}^E \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_g(\rho)}{\partial \rho} - c_{66}^E \frac{1}{\rho^2} U_g(\rho) + c_{11} \frac{n^2}{\rho^2} U_g(\rho) + c_{66}^E \frac{n}{\rho} \frac{\partial U_p(\rho)}{\partial \rho} + c_{12} \frac{n}{\rho} \frac{\partial U_p(\rho)}{\partial \rho} + c_{66}^E \frac{n}{\rho^2} U_p(\rho) + c_{11} \frac{n}{\rho^2} U_p(\rho) + \rho_0 \omega^2 U_g(\rho) = 0 \quad (12)$$

Представим (11) в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 U_p(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_p(\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} U_p(\rho) \left((\gamma \rho)^2 - v^2 \right) + F_1(U_g) = 0 \quad (13)$$

где $F_1(U_g) = \frac{1}{c_{11}} \left(-c_{66}^E \frac{n}{\rho} \frac{\partial U_g(\rho)}{\partial \rho} - c_{12} \frac{n}{\rho} \frac{\partial U_g(\rho)}{\partial \rho} + c_{11} \frac{n}{\rho^2} U_g(\rho) + c_{66}^E \frac{n}{\rho^2} U_g(\rho) \right)$;

$$\gamma^2 = \omega^2 \rho_0 / c_{11}, \quad v^2 = 1 + n^2 \frac{c_{66}^E}{c_{11}}$$

Представим функцию $F_1(U_g)$, находящуюся в правой части уравнения (13), в следующем виде:

$$F_1(U_g) = \frac{n}{\rho^2} \cdot \left(1 + \frac{c_{66}^E}{c_{11}} \right) U_g(\rho) - \frac{n}{\rho} \cdot \left(\frac{c_{12} + c_{66}^E}{c_{11}} \right) \frac{\partial U_g(\rho)}{\partial \rho} = \frac{n}{\rho^2} \cdot \left(\alpha_1 U_g(\rho) - \rho \beta_1 \frac{\partial U_g(\rho)}{\partial \rho} \right)$$

где $\alpha_1 = 1 + \frac{c_{66}^E}{c_{11}}$, $\beta_1 = \frac{c_{12} + c_{66}^E}{c_{11}}$.

Введем замену:

$$F_1(U_g) = \frac{n}{\rho^2} \cdot \left(\alpha_1 U_g(\rho) - \rho \beta_1 \frac{\partial U_g(\rho)}{\partial \rho} \right) = \frac{n}{\rho^2} T(U_g),$$

тогда (13) можно представить в виде:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U_p(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U_p(\rho)}{\partial \rho} + U_p(\rho) \left((\gamma \rho)^2 - v^2 \right) + n T(U_g) = 0 \quad (14)$$

Решать это уравнение предложено методом последовательных приближений, то есть если:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 m U_p(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial m U_p(\rho)}{\partial \rho} + m U_p(\rho) \left((\gamma \rho)^2 - v^2 \right) = -n T(m^{-1} U_g) \quad (15)$$

Сделав похожие замены в выражение (12) получаем:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 m U_g(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial m U_g(\rho)}{\partial \rho} + m U_g(\rho) \left((k \rho)^2 - \mu^2 \right) = -n R(m^{-1} U_p) \quad (16)$$

где $\gamma^2 = \omega^2 \rho_0 / c_{66}^E$; $\mu^2 = 1 + n^2 \frac{c_{11}}{c_{66}^E}$; $\alpha_2 = 1 + \frac{c_{11}}{c_{66}^E}$;

$$R(U_p) = \left(\alpha_2 U_p(\rho) - \rho \beta_2 \frac{\partial U_p(\rho)}{\partial \rho} \right); \quad \beta_2 = 1 + \frac{c_{11}}{c_{66}^E}$$

Рассмотрим нулевое приближение уравнений (15) и (16). Для этого приравняем правую часть этих выражений 0:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 {}^0 U_p(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial {}^0 U_p(\rho)}{\partial \rho} + {}^0 U_p(\rho) \left((\gamma \rho)^2 - v^2 \right) = 0, \quad (17)$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 {}^0 U_g(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial {}^0 U_g(\rho)}{\partial \rho} + {}^0 U_g(\rho) \left((k \rho)^2 - \mu^2 \right) = 0. \quad (18)$$

Решение уравнений (17) и (18) будет:

$$\begin{aligned} {}^0 U_p(\rho) &= A_v^0 J_v(\gamma \rho), \\ {}^0 U_g(\rho) &= B_\mu^0 J_\mu(k \rho). \end{aligned} \quad (19)$$

где A_v^0 и B_μ^0 - неизвестные константы, которые можно определить из граничных условий:

$$\begin{cases} \sigma_{\rho\rho} \Big|_{\rho=R} = 0, \\ \sigma_{\rho g} \Big|_{\rho=R} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Подставив выражения (19) в граничные условия (20), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_v^0 \left(J_{v-1}(\gamma R) + \frac{\zeta - v}{\gamma R} J_v(\gamma R) \right) - B_\mu^0 \left(\frac{n \cdot \zeta}{\gamma R} J_\mu(k R) \right) = -\frac{\tilde{e}_{31} E_z}{c_{11} \gamma R}, \\ A_v^0 \left(\frac{n}{\gamma R} J_v(\gamma R) \right) + B_\mu^0 \frac{c_{11}}{c_{66}^E} \left(J_{\mu-1}(k R) - \frac{1 + \mu}{k R} J_\mu(k R) \right) = 0. \end{cases} \quad (21)$$

где $\zeta = c_{12} / c_{11}$.

Решив систему (21) получим значения неизвестных констант. Запишем систему уравнений (21) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_v^0 \\ B_\mu^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\tilde{e}_{31} E_z}{c_{11} \gamma R} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где $m_{11} = J_{v-1}(\gamma R) + \frac{\zeta - v}{\gamma R} J_v(\gamma R)$, $m_{12} = -\frac{n \cdot \zeta}{\gamma R} J_\mu(k R)$,

$$m_{21} = \frac{n}{\gamma R} J_v(\gamma R), \quad m_{22} = \frac{c_{11}}{c_{66}^E} \left(J_{\mu-1}(k R) - \frac{1 + \mu}{k R} J_\mu(k R) \right).$$

Главный определитель (22) представляет собой частотное уравнение позволяющее найти резонансные частоты неосесимметричных радиальных колебаний тонкого диска:

$$\Delta = m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} = 0. \quad (23)$$

А неизвестные константы будут, соответственно:

$$A_V^0 = -\frac{m_{22} \tilde{e}_{31} E_z}{\Delta c_{11} \gamma R};$$

$$B_V^0 = \frac{m_{21} \tilde{e}_{31} E_z}{\Delta c_{11} \gamma R}.$$

Подставив найденные значения констант A_V^0 и B_V^0 в (19) мы получаем нулевое приближение решения уравнений (15) и (16).

Первое приближение решения (15) и (16) можно найти, подставив найденные значения ${}^0U_p(\rho)$ и ${}^0U_g(\rho)$ в правую часть этих уравнений:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 {}^1U_p(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial {}^1U_p(\rho)}{\partial \rho} + {}^1U_p(\rho) \left((\gamma \rho)^2 - \nu^2 \right) = -nT({}^0U_g). \quad (24)$$

$$\rho^2 \frac{\partial^2 {}^1U_g(\rho)}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial {}^1U_g(\rho)}{\partial \rho} + {}^1U_g(\rho) \left((k\rho)^2 - \mu^2 \right) = -nR({}^0U_p). \quad (25)$$

2. Результаты моделирования

Проведем моделирование нулевого приближения решения (15) для диска выполненного из пьезокерамики типа ЦТС-19 ($\rho_0 = 74 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_{11}^E = 112$ ГПа, $c_{12}^E = 62$ ГПа, $c_{31}^E = 106$ ГПа, $e_{31} = -8$ Кл/м², $e_{33} = 18$ Кл/м², $\chi_{33}^{\epsilon} = 1000\chi_0$, $\chi_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, добротность материала $Q = 100$). Геометрические размеры: отношение ширины диска к его радиусу предполагается равным 0,1.

Смоделируем радиальные смещения частиц материала диска с электродами, показанными на рис. 1. а), для первых трех резонансных частот. Для такого диска $n=3$, то есть:

$$u_p = \sum_{n=0}^3 U_p(\rho) \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^3 n A_V^0 J_n(\gamma \rho) \begin{pmatrix} \cos(n\vartheta) \\ \sin(n\vartheta) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Примем угол $\vartheta = 0$ и отношение радиуса диска к его толщине равным 0.1. В табл. 1 приведены значения 3 первых безразмерных резонансных частот для разных n полученные из (23). Значения этих частот будем подставлять в (26) для получения смещений.

Таблица 1. Резонансные частоты

$n \backslash \gamma$	0	1	2	3
1	2.0436	3.0707	1.5405	2.2618
2	5.3877	5.5900	6.0639	6.6174
3	8.5710	8.7828	9.2875	9.9188

Сравним полученные результаты с реальными значениями частот предложенными в [7] и [14]. Относительные частоты первых трех резонансов [7] будут: 2.063, 6.35, 9.537. Заметно, что уже при нулевом приближении решения относительная погрешность решения (для частот $n=3$) будет 9%, 4% и 4%.

На рис. 3 приведено моделирование радиальных смещений для первых 2-х резонансных частот, выполненных по (26), в программном пакете MathLab.

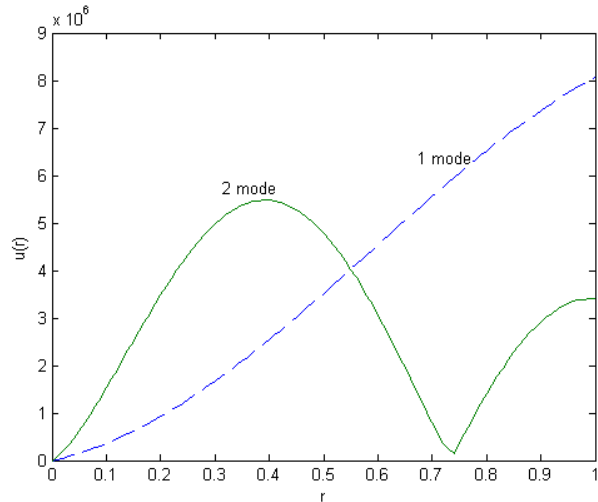


Рис. 3. Неосесимметричные радиальные смещения диска

Выводы

В работе предложена методика математического моделирования неосесимметричных радиальных колебаний тонких пьезоэлектрических дисков на базе метода последовательных приближений: то есть когда каждое последующее приближение решения находится через предыдущее.

Установлено что для пьезоэлектрика упругие свойства которого эквивалентны (не отличаются) от упругих свойств изотропного твердого тела наблюдается вполне удовлетворительная и достаточная для технических расчетов точность определения резонансных частот для первых мод неосесимметричных радиальных колебаний. За точные значения принимаются значения резонансных частот, которые были определены через потенциалы [14]. Эти значения сравнивались со значениями частот которые были полу-

чены в результате удовлетворения граничным условиям с использованием первого приближения для компонентов вектора смещения.

Литература

1. В. Варадан, К. Виной, К. Джозе ВЧ МЭМС и их применение, Москва: Техносфера, 2004. – 528 с.
2. G. Piazza, P.J. Stephanou, A.P. Pisano, A1N Contour-Mode Vibrating RF MEMS for Next generation Wireless Communications, MEMS 2006, pp. 906-909, 2006
3. S.S. Li, Y.W. Lin, Y. Xie, C.C. Nguyen, 1.51 GHz polydiamond micromechanical disk resonator with impedance-mismatched isolating support // Proceedings, 17th Int. IEEE MEMS Conf., Maastricht, The Netherland, Jan. 25-29, 2004, pp. 821-824
4. Y.W. Lin, S.S. Li, Z. Ren, C.C. Nguyen Third-Order Intermodulation Distortion in Capacitively-Driven micromechanical resonators// IEEE Int. Ultrasonic Symposium, Sept. 18-21, 2005, pp.1592-1595
5. R. Ruby “Micromachined cellular filters, Microwave Symposium Digest”, IEEE MTT-S International, pp. 370-377, 1996
6. M.K. Lakin, G.R. Kline, K.T. McCarron. Thin Film Bulk Acoustic Wave Filters for GPS, Ultrasonics Symposium, 1992. Proceedings., IEEE 1992
7. Le Yan. Piezoelectric Micromechanical Disk Resonators towards UHF Band / Le Yan, Jian Wu, William C. Tang //IEEE International Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency control Joint 56th Anniversary Conference – 2004. – P. 926-929.
8. Jing Wang. 1.156 – GHz Self-Aligned Vibrating Micromechanical Disk Resonator / Jing Wang, Zeying Ren, T. – C. Nguyen // IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2004. – Vol. 51, No 12. – P.1607-1628
9. C.T. C. Nguyen. Integrated Micromechanical Circuit Fueled by Vibrating RF MEMS Technology / C.T.C. Nguyen // I.E.E.E. Ultrasonic Symposium. – 2006. – P. 952-962
10. C. T. C. Nguyen. MEMS Technology for Timing and Frequency Control / C. T. C. Nguyen // IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2005. – Vol. 52, No 8. – P.1-11
11. Chi-Hung Huang. Theoretical Analysis and Experimental Measurement for Resonant Vibration of Piezoceramic Circular Plates / Chi-Hung Huang, Yu-Chih Lin, Chien-Ching Ma // IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2004. – Vol. 51, No 1. – P.12-24
12. Experimental Measurement and numerical analyses on Resonant Vibration of Piezoceramic Circular Disc with partial electrode design / Chi-Hung Huang, Yu-Chih Lin, Chien-Ching Ma // IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2004. – Vol. 51, No 1. – P.12-24
13. Chi-Hung Huang. Resonant Vibration Investigation for Piezoceramic Disks and Annuli by Using the Equivalent Constant Method / Chi-Hung Huang // IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectrics and Frequency Control. – 2005. – Vol. 52, No 8. – P.1217-1228
14. М.О. Шульга. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. / М.О. Шульга, В.Л. Карлаш - К.: Наукова думка, 2008. – 270 с
15. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.