УДК 519.213:621.391

А.И. Красильников, канд. физ.-мат. наук, К.П. Пилипенко

Идентификация плотности вероятностей пуассоновской последовательности прямоугольных импульсов с гауссовским распределением амплитуд

Установлена возможность применения двухкомпонентной одновершинной гауссовской смеси распределений для нахождения плотности вероятностей пуассоновских импульсных процессов с прямоугольной формой импульсов и нормальным законом распределения амплитуд.

Получены расчетные формулы, позволяющие идентифицировать параметры смеси. Проанализирована погрешность аппроксимации плотности вероятностей пуассоновской последовательности импульсов гауссовским распределением в зависимости от их длительности и интенсивности.

Possibility of application a unimodal two-component Gaussian mixture of distributions for finding probability densities of rectangular Poisson pulse processes with normally distributed amplitudes are determined.

Calculation formulas that allow to identificate the mixture's parameters are obtained. Dependence of the error in Gaussian approximation to the probability densities of Poisson pulse processes on the pulse duration and intensity is analyzed.

Ключевые слова: *пуассоновский импульсный процесс, идентификация плотности вероятностей, гауссовская смесь распределений, кумулянтные коэффициенты, гауссовское распределение.*

Введение

Наиболее распространённой моделью флуктуационных сигналов [1–6], которая основывается на их рассмотрении как результата наложения большого (случайного) числа элементарных импульсов со случайными параметрами, являются процессы Буннимовича-Райса, определяемые выражением:

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k h(t - t_k), \qquad (1)$$

где t_k – случайные моменты времени появления импульсов, являющиеся однородным пуассоновским потоком событий с интенсивностью $\lambda > 0$; $h(t)$ – детерминированная функция, описывающая форму элементарных импульсов; η_k – амплитуды элементарных импульсов, взаимонезависимые, одинаково распределённые случайные величины, не зависящие от t_k; $N(t)$ – однородный процесс Пуассона.

Часто предполагается [1–5], что для процессов (1) выполняется условие $\lambda\tau_u \gg 1$, где τ_u – эффективная длительность элементарного импульса. В этом случае принято считать, что распределение процессов (1) приближенно является гауссовским. Однако в общем случае процессы (1) являются негауссовскими [7] и имеют безгранично делимый закон распределения, вследствие чего непосредственное получение их плотности вероятностей в замкнутом виде возможно лишь в отдельных случаях [6, 7].

Поэтому для нахождения плотности вероятностей флуктуационных сигналов в большинстве случаев необходимо применять приближенные методы, основанные на кумулянтном представлении плотностей вероятностей [8], к которым относятся ортогональные представления плотности вероятностей [4, 5, 9] и смеси распределений [4, 5, 10].

Целью работы является теоретическое нахождение плотностей вероятностей конкретной модели флуктуационных сигналов (1) при малых значениях $\lambda\tau_u$ с применением смесей распределений.

1. Постановка задачи

Пусть элементарный импульс $h(t)$ в формуле (1) имеет прямоугольную форму, т е.

$$h(t) = \begin{cases} A, & t \in (0; \tau_u], \\ 0, & t \notin (0; \tau_u]. \end{cases} \qquad (2)$$

где $A > 0$, а амплитуды η_k имеют гауссовское распределение с параметрами $m_\eta = M\{\eta_k\} = 0$, $\sigma_\eta^2 = D\{\eta_k\}$.

При таких условиях процесс (1) является стационарным стохастически непрерывным случайным процессом с непрерывными мгновенными значениями, поэтому для него существует плотность вероятностей $p(x)$. Остановимся подробней на возможности ее нахождения.

В общем случае характеристическая функция $f(u)$ процессов (1) равна [7]:

$$f(u)=\exp\left\{\lambda\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iuxh(t)}-1\right)dt\,dF_{\eta}(x)\right\},$$

где $F_{\eta}(x)$ – функция распределения случайной величины η_k.

Подставляя в последнее выражение формулу (2), получаем

$$f(u)=\exp\left\{\lambda\tau_u\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iuAx}-1\right)dF_{\eta}(x)\right\}= \\ =\exp\left\{\lambda\tau_u\left(f_{\eta}(uA)-1\right)\right\} \quad (3)$$

где $f_{\eta}(u)$ - характеристическая функция случайной величины η_k, которая в рассматриваемом случае равна

$$f_{\eta}(u)=e^{-\frac{u^2}{2}\sigma_{\eta}^2}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в выражение (3), получаем окончательную формулу для нахождения характеристической функции процессов (1) в рассматриваемом случае

$$f(u)=\exp\left\{\lambda\tau_u\left(e^{-\frac{u^2}{2}A^2\sigma_{\eta}^2}-1\right)\right\}. \quad (5)$$

Из выражения (5) формально можно найти плотность вероятностей процессов (1), используя формулу обращения преобразования Фурье:

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-iux}du \quad (6)$$

Однако вычисление интеграла (6) с функцией (5) не дает решения в замкнутом виде.

Поэтому используем для нахождения плотности вероятностей (6) процесса (1) одновершинную гауссовскую смесь, плотность вероятностей которой имеет вид [10]:

$$p(x)=\frac{d_1}{\sigma_1}\varphi\left(\frac{x-m_N}{\sigma_1}\right)+\frac{d_2}{\sigma_2}\varphi\left(\frac{x-m_N}{\sigma_2}\right), \quad (7)$$

где $\varphi(x)$ – плотность вероятностей стандартной гауссовской случайной величины,

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

m_N, $\sigma_1, \sigma_2>0$, $d_1>0$, $d_2>0$, $d_1+d_2=1$ – параметры смеси.

Таким образом, в рассматриваемой задаче необходимо идентифицировать смесь (7), определив ее параметры для процесса (1), у которого форма импульса определяется формулой (2), а амплитуды имеют гауссовское распределение с нулевым математическим ожиданием.

2. Методика идентификации

В работе [10] разработана методика идентификации неизвестной плотности вероятностей $p(x)$ стационарного случайного процесса с использованием смеси (7), состоящая из следующих этапов.

1. Нахождение математического ожидания m и дисперсии μ_2 случайного процесса.

2. Вычисление кумулянтных коэффициентов γ_4 и γ_6 и проверка неравенства

$$\gamma_6>5\gamma_4\left(\frac{\gamma_4}{3}-1\right). \quad (8)$$

3. Вычисление параметра D ($D=\frac{d_1}{d_2}$)

$$D=B+\sqrt{B^2-1}, \quad (9)$$

где

$$B=1+\frac{3\gamma_6^2}{50\gamma_4^3}. \quad (10)$$

4. Нахождение параметра c ($c=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$) смеси

$$c=\begin{cases} c_1=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{\gamma_4}{3D}}}{1+\sqrt{\dfrac{D\gamma_4}{3}}}, & \text{если}\,\gamma_6>0; \\ c_2=\dfrac{1+\sqrt{\dfrac{\gamma_4}{3D}}}{1-\sqrt{\dfrac{D\gamma_4}{3}}}, & \text{если}\,\gamma_6<0. \end{cases} \quad (11)$$

5. Нахождение весовых коэффициентов d_1 и d_2 смеси

$$d_1=\frac{D}{1+D};\ d_2=1-d_1. \quad (12)$$

6. Нахождение дисперсий σ_2^2 и σ_1^2 смеси

$$\sigma_2^2=\frac{\mu_2}{d_1c+d_2}=\mu_2\frac{1+D}{Dc+1}, \quad (13)$$

$$\sigma_1^2=c\sigma_2^2.$$

7. Нахождение параметра m_N смеси

$$m_N = m .$$

3. Идентификация плотности вероятностей

Получим первые шесть кумулянтов процесса (1) с прямоугольной формой импульса (2), используя формулу (5) и определение кумулянтов [8]

$$\kappa_n = \left.\frac{d^n \ln f(u)}{i^n du^n}\right|_{u=0}$$

$$\kappa_1 = \kappa_3 = \kappa_5 = 0\,;\ \kappa_2 = A^2\sigma_\eta^2 q\,;\ \kappa_4 = 3A^4\sigma_\eta^4 q\,;$$

$$\kappa_6 = 15A^6\sigma_\eta^6 q\,,$$

где

$$q = \lambda\tau_u$$

Найдем кумулянтные коэффициенты γ_4 и γ_6, используя выражение [8]

$$\gamma_n = \frac{\kappa_n}{(\kappa_2)^{n/2}};$$

$$\gamma_4 = \frac{3}{q}\,,\ \gamma_6 = \frac{15}{q^2}. \qquad (14)$$

Выразим коэффициент γ_6 через γ_4, используя формулу (14):

$$\gamma_6 = \frac{5}{3}\gamma_4^2. \qquad (15)$$

Из рис. 1 видно, что зависимость (15) находится в допустимой области значений пары коэффициентов (γ_4, γ_6) для двухкомпонентной симметричной одновершинной гауссовской смеси (7).

Математическое ожидание и дисперсия процесса (1) соответственно равны:

$$m = \kappa_1 = 0\,,\ \mu_2 = \kappa_2 = A^2\sigma_\eta^2 q\,. \qquad (16)$$

Согласно приведенному выше алгоритму идентификации подставляем (14) в (10) и получаем

$$B = 1 + \frac{1}{2q^2}. \qquad (17)$$

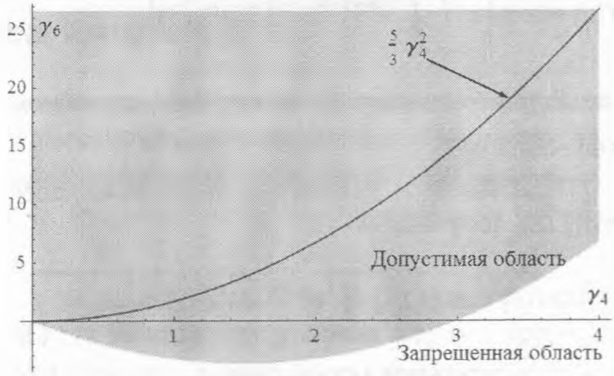

Рис. 1

Подставляя (17) в (9), находим параметр D:

$$D = 1 + \frac{1}{2q^2} + \sqrt{\frac{1}{q^4} + \frac{4}{q^2}} = 1 + \frac{1}{2q^2} + Q\,, \qquad (18)$$

где $Q = \sqrt{\frac{1}{q^4} + \frac{4}{q^2}}$.

Далее по формуле (11) находим параметр c:

$$c = \frac{2\left(1 - \sqrt{\dfrac{2}{1+(2+Q)q^2}}\right)}{2 + \sqrt{\dfrac{2+2(2+Q)q^2}{q^4}}} \qquad (19)$$

Перейдем теперь непосредственно к нахождению параметров смеси (7).

Весовые коэффициенты d_1 и d_2, согласно формулам (12) и (18), равны:

$$d_1 = \frac{1+(2+Q)q^2}{1+(4+Q)q^2}\,,\ d_2 = \frac{2q^2}{1+(4+Q)q^2} \qquad (20)$$

а дисперсии составляющих компонент смеси с учетом (13), (19) и (20) определяются выражениями:

$$\sigma_2^2 = \frac{A^2 q^3\left(4 + Q + \dfrac{1}{q^2}\right)\left(2 + \sqrt{\dfrac{2+2(2+Q)q^2}{q^4}}\right)}{2\left(q^2\left(2 + \sqrt{\dfrac{2+2(2+Q)q^2}{q^4}}\right) - \left(1+(2+Q)q^2\right)\left(\sqrt{\dfrac{2}{1+(2+Q)q^2}} - 1\right)\right)},$$

$$\sigma_1^2 = \frac{A^2 q\left(1+(4+Q)q^2\right)\left(\sqrt{\dfrac{2}{1+(2+Q)q^2}} - 1\right)}{\sqrt{\dfrac{2}{1+(2+Q)q^2}} - 1 + q^2\left(-4 - Q + (2+Q)\sqrt{\dfrac{2}{1+(2+Q)q^2}} - \sqrt{\dfrac{2+2(2+Q)q^2}{q^4}}\right)}$$

4. Анализ результатов

Используя полученные результаты проанализируем возможность гауссовской аппроксимации плотности вероятностей процессов (1) в рассматриваемой задаче.

На рис. 2 представлены графики зависимости кумулянтных коэффициентов γ_4 и γ_6 от параметра $q = \lambda\tau_u$ процесса (1), на рис. 3 изображены зависимости параметров D и c от q. Из рис. 2 видно, что кумулянтные коэффициенты достаточно быстро убывают с ростом параметра q. В частности, можно считать, что γ_4=0 при q=20, а γ_6=0 при q=10.

Из рис. 3 видим, что при $q \to \infty$ параметры D и c стремятся к единице. Для смеси распределений (7) это означает, что $d_1 = d_2 = 0{,}5$, а $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ и смесь распределений представляет из себя гауссовское распределение. С другой стороны, при малых q ($q < 10$) распределение процесса (1) может существенно отличаться от гауссовского.

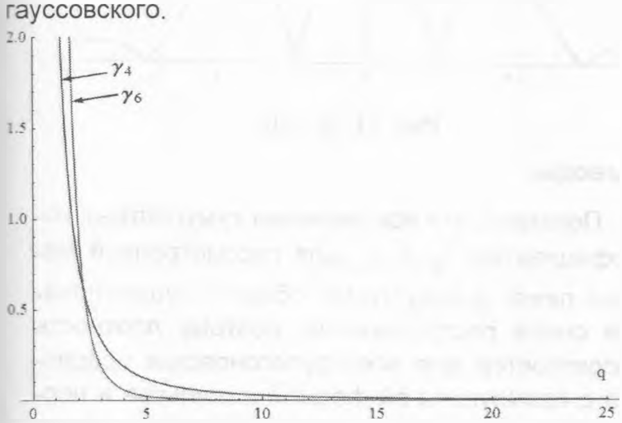

Рис. 2

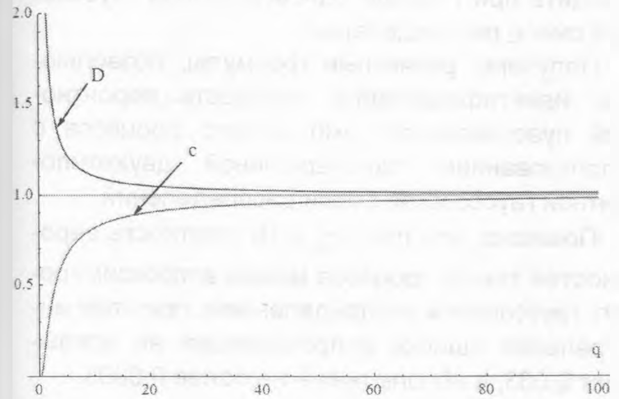

Рис. 3

На рис. 4 – 7 представлены графики плотностей вероятностей процесса (1), полученные с помощью смеси распределений (7) при фиксированных значениях $A = 1$, $\sigma_\eta = 1$ для разных значений параметра q. Для сравнения на рис. 4 – 7 изображены также графики нормальной плотности вероятностей $p_0(x)$ с параметрами (16).

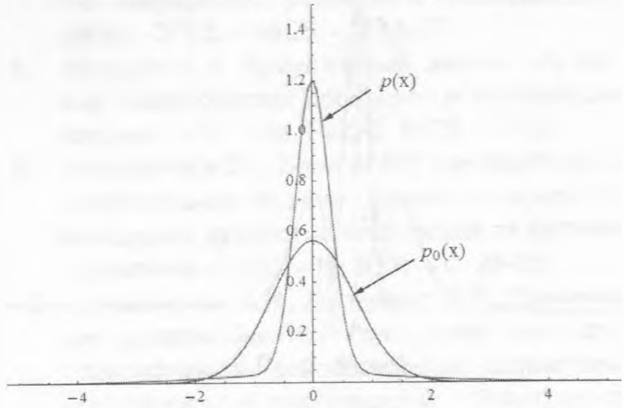

Рис. 4. $q = 0{,}5$

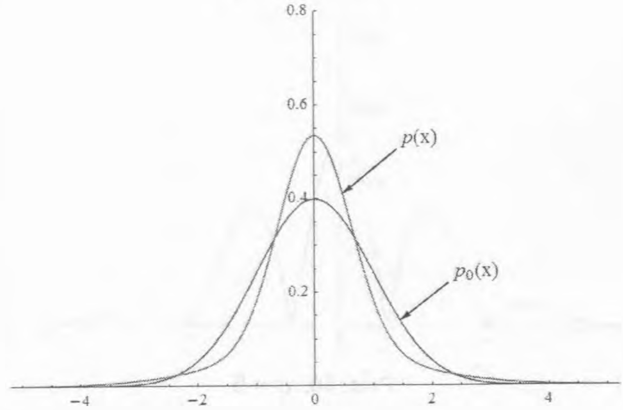

Рис. 5. $q = 1$

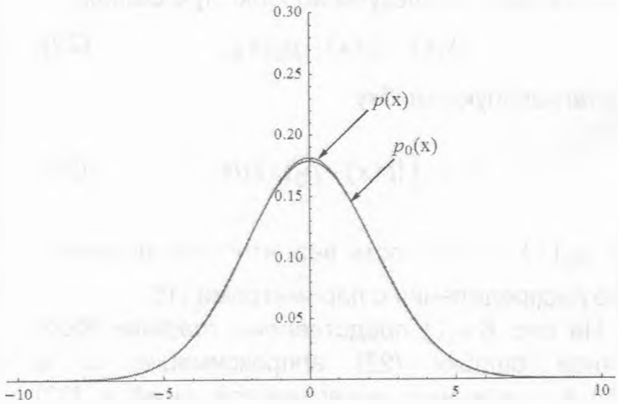

Рис. 6. $q = 5$

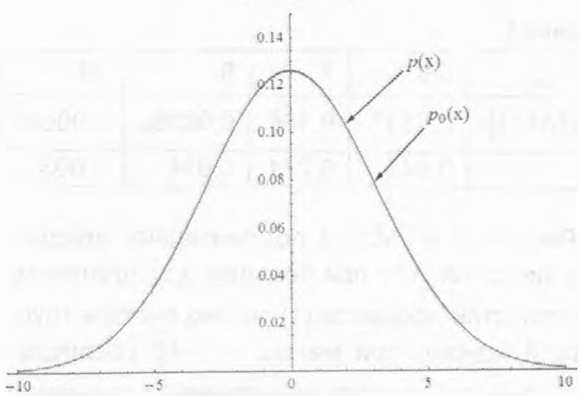

Рис. 7. $q = 10$

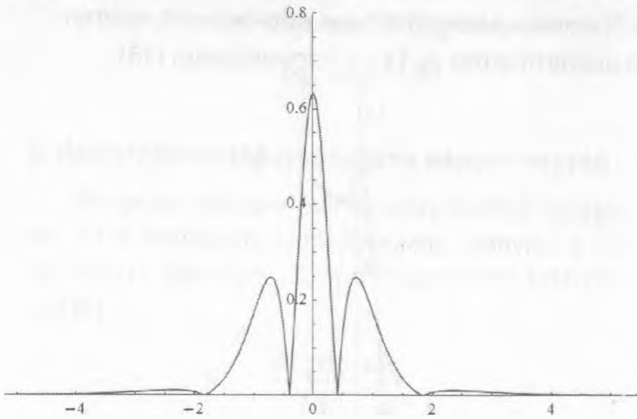

Рис. 8. $q = 0{,}5$

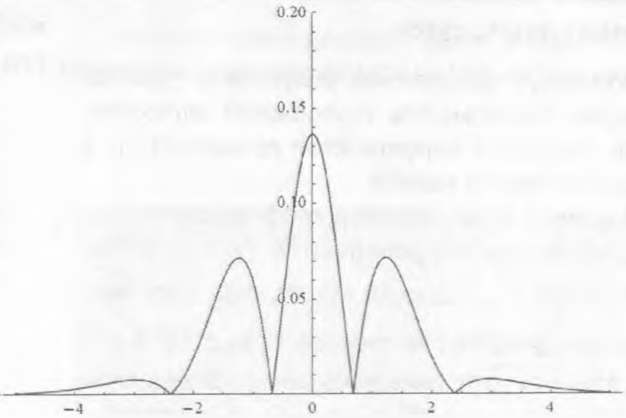

Рис. 9. $q = 1$

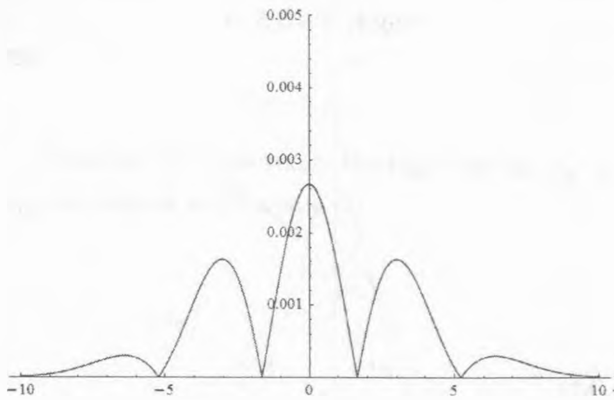

Рис. 10. $q = 5$

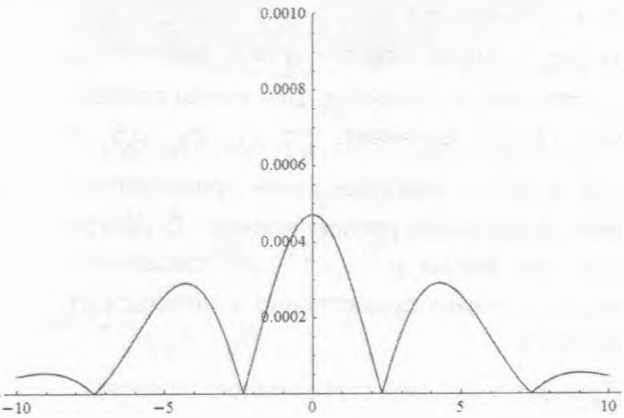

Рис. 11. $q = 10$

Для оценки погрешности гауссовской аппроксимации используем абсолютную ошибку

$$\Delta(x) = \left|p(x) - p_0(x)\right| \qquad (22)$$

и интегральную ошибку

$$\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \left|p(x) - p_0(x)\right| dx\,, \qquad (23)$$

где $p_0(x)$ – плотность вероятностей нормального распределения с параметрами (16).

На рис. 8 – 11 представлены графики абсолютной ошибки (22) аппроксимации, а в табл. 1 – значения интегральной ошибки (23) при различных значениях параметра q.

Таблица 1

$q = \lambda\tau_u$	0,5	1	5	10
$\max(\Delta(x))$	0.6337	0,136	0,00265	0,00047
Δ	0,645	0,271	0,014	0,003

Рис. 8–11 и табл 1 подтверждают предположение о том, что при больших $\lambda\tau_u$ плотность вероятностей процесса (1) можно считать гауссовской, однако при малых $\lambda\tau_u<10$ распределение такого процесса существенно отличается от гауссовского

Выводы

Показано, что все значения кумулянтных коэффициентов γ_4 и γ_6 для рассмотренной модели лежат в допустимой области существования смеси распределений, поэтому плотность вероятностей для всех пуассоновских процессов с прямоугольной формой импульсов и нормальным распределением амплитуд можно находить при помощи одновершинной гауссовской смеси распределений.

Получены расчетные формулы, позволяющие идентифицировать плотность вероятностей пуассоновского импульсного процесса с использованием одновершинной двухкомпонентной гауссовской смеси распределений.

Показано, что при $\lambda\tau_u \geq 10$ плотность вероятностей такого процесса можно аппроксимировать гауссовским распределением, при этом интегральная ошибка аппроксимации не превышает 0,003, а абсолютная – не более 0,0005.

Литература

1. *Бунимович В.И* Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах. – М.: Сов. радио, 1951 – 360 с.

2. *Райс С.* Теория флуктуационных шумов. – В кн. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех (под ред. Н.А. Железнова). – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953. – 288 с.
3. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. Ч. 1. Случайные процессы. – М.: Наука, 1976. – 496 с.
4. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
5. *Левин Б.Р.*, Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
6. *Горовецкая Т.А.*, Красильников А.И., Чан Хыу Дат. Модели и законы распределения флуктуационных сигналов // Электроника и связь. – 2000. – № 9. – С. 5–14.
7. *Красильников А.И.* Каноническое представление характеристической функции пуассоновских импульсных процессов // Электроника и связь. – 2005. – № 25. – С.33–37.
8. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. – М.: Сов. Радио, 1978. – 376 с.
9. *Красильніков О.І.*, Берегун В.С. Систематизація ортогональних подання щільності імовірності випадкових процесів // Електроніка та системи управління. – 2010. – № 3(25). – С. 28–35.
10. *Красильников А.И.*, Пилипенко К.П. Применение двухкомпонентной гауссовской смеси для идентификации одновершинных симметричных плотностей вероятностей // Электроника и связь. – 2008. – № 5(46). – С. 20–29.

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»