Теория сигналов и систем

УДК 621.372.062:621.316.722

М.Е. Артеменко[1], д-р техн. наук, А.И. Рыбин[2], д-р техн. наук, М.С. Кумсия[2]

Компактный модифицированный метод припасовывания для параметрического синтеза SC-фильтров на основе ARC-аналогов

Предложен компактный модифицированный метод припасовывания для параметрического синтеза цепей с переключающимися конденсаторами, позволяющий непосредственно получать матричные коэффициенты разностных уравнений SC-фильтра из матрицы уравнения состояния прототипа. Выведены условия эквивалентности SC-фильтра и ARC-прототипа по критерию совпадения импульсных характеристик на дискретном множестве временных точек, отстоящих на период коммутации.

The compact modified method of curve fitting for the parametric synthesis of switched-capacitor networks based on operating with the state equations matrix coefficients of the ARC-prototype was proposed. The conditions of equivalence of SC-filter and ARC-prototype by the criteria of matching impulse responses on a discrete set of time points, distances on a period of switching, were obtained.

Ключевые слова: *модифицированный метод припасовывания, цепи с переключающимися конденсаторами, условия эквивалентности SC-фильтра и ARC-прототипа.*

Введение

При анализе линейно-параметрических цепей широкое распространение получил модифицированный метод припасовывания [1,2], который позволяет с единых позиций и с произвольной степенью детализации исследовать переходные и установившиеся процессы в импульсных источниках вторичного электропитания и цепях с переключающимися конденсаторами. Однако в задаче параметрического синтеза SC-фильтра на основе аналогового ARC-прототипа [3] прямое применение модифицированного метода припасовывания приводит к повышению размерности исследуемых SC-цепей за счет детального рассмотрения временных процессов в цепях коммутируемых конденсаторов, которые моделируют резистивные элементы ARC-цепи. Поскольку в данной задаче синтеза совпадение временных характеристик оригинала и прототипа требуется лишь на дискретном множестве временных точек, отстоящих на период коммутации, представляется возможным идеализировать процессы переключения и применить методы переменных состояния и матричной алгебры [4] для прямого составления и решения разностных уравнений. При этом размерность исследуемых систем понижается до числа конденсаторов исходного аналогового прототипа, что позволяет говорить о компактности предлагаемого метода.

1. Формирование разностных уравнений синтезируемого фильтра на основе матрицы уравнений состояния прототипа

Поставим задачу вывести расчетные соотношения, устанавливающие непосредственную связь между матричными коэффициентами разностных уравнений SC-фильтра и дифференциальных уравнений аналогового ARC-прототипа, при следующих допущениях.

- В аналоговом ARC-прототипе к входному узлу присоединен источник напряжения E и резистивные ветви, один из выходных выводов каждого операционного усилителя заземлен, а потенциалы всех узлов, кроме общего и входного, могут быть выражены через напряжения на конденсаторах, причем матрица такой связи не содержит параметров резистивных ветвей.
- Схема соединения и параметры конденсаторов и операционных усилителей SC-фильтра полностью соответствуют ARC-прототипу, при этом заимствованные конденсаторы назовем основными, а каждый резистивный элемент прототипа проводимостью G_i реализуются в SC-фильтре трехполюсной звездой, во внутреннем узле которой соединены одна из обкладок вспомогательного конденсатора емкостью C_i и силовые выводы двух идеальных ключей, противофазно коммутирующихся с периодом T, причем другие силовые выводы ключей соединены с узлами подключения резистивного элемента, а другая обкладка вспомогательного конденсатора заземлена.
- Обмен энергией между основными и вспомогательными конденсаторами SC-фильтра

происходит мгновенно по обобщенному закону коммутации с сохранением зарядов в узлах цепи, образовавшейся после коммутации, в интервалах же между коммутациями напряжения на конденсаторах не изменяются.

Пусть схема аналогового ARC-прототипа SC-фильтра содержит $n+2$ узла, причем узел 0' является общим, узел 0 - входным, n – выходным. Первые m номеров присвоим узлам, не связанным с выходами операционных усилителей, и выбором нумерации обеспечим их совпадение с порядковыми номерами соединенных с ними конденсаторов. Таблица подключения активных проводимостей к независимым узлам схемы имеет вид (рис.1).

	0	1 2 … m m+1 … n
G_1	**d**	**D**
G_2		
…		
G_r		

Рис.1. Таблица подключения проводимостей к узлам схемы

Упорядочим систему обозначений в таблице подключения, отметив +1 в столбце **d** и матрице **D** узлы подключения проводимостей G_i, к которым синхронно подключаются вспомогательные конденсаторы C_i' в первом такте периода коммутации ключей T Тогда узлы подключения других выводов проводимостей G_i в матрице **D**, обозначенные –1, соответствуют узлам подключения вспомогательных конденсаторов во втором такте периода коммутации.

Запишем первый закон Кирхгофа в матричной форме для первых m узлов

$$\mathbf{I_C} + \mathbf{D_0^T I_G} = \mathbf{0}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{D_0}^\mathbf{T}$ – матрица размерности $m{\times}r$, образующаяся из матрицы $\mathbf{D^T}$ вычеркиванием строк, номера которых соответствуют узлам подключения выходов операционных усилителей.

Выразим токи проводимостей через вектор независимых узловых потенциалов и напряжение источника E

$$\mathbf{I_G} = \mathbf{GDU_\varphi} + \mathbf{Gd}E, \qquad (2)$$

где **G** – диагональная матрица номиналов проводимостей порядка r, $\mathbf{U_\varphi} = [\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_n]^\mathbf{T}$ - вектор узловых потенциалов независимых узлов.

В силу первого допущения вектор узловых потенциалов может быть выражен через вектор напряжений на конденсаторах

$$\mathbf{U_\varphi} = \mathbf{MU_C}, \qquad (3)$$

где **M** – матрица размерности $n \times m$.

После подстановки (2), (3) в (1) и преобразований получим матричную систему уравнений электрического равновесия

$$[p\mathbf{C} + \mathbf{D_0}^\mathbf{T}\mathbf{GDM}]\mathbf{U_C} = -\mathbf{D_0}^\mathbf{T}\mathbf{Gd}E, \qquad (4)$$

где **C** – диагональная матрица параметров основных конденсаторов порядка m.

Коэффициент передачи ARC-фильтра по напряжению определяется соотношением

$$K_U = \frac{U_{ВЫХ}}{E} = -\mathbf{m}^\mathbf{T}[p\mathbf{C} + \mathbf{D_0}^\mathbf{T}\mathbf{GDM}]^{-1}\mathbf{D_0}^\mathbf{T}\mathbf{Gd} = \\ = -\mathbf{m}^\mathbf{T}[p\mathbf{I} + \mathbf{L}]^{-1}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D_0}^\mathbf{T}\mathbf{Gd}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{m}^\mathbf{T}$ – последняя строка матрицы $\mathbf{M}$; $\mathbf{L} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D_0}^\mathbf{T}\mathbf{GDM}$; $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

Поскольку упорядоченная система обозначений в таблице подключения проводимостей (рис.1) указывает для каждого конденсатора C_i' узлы подключения обкладки, соединенной с идеальными ключами, а другая его обкладка заземлена, то напряжения на вспомогательных конденсаторах могут быть выражены через вектор узловых потенциалов и далее через вектор переменных состояния в каждом из интервалов периода коммутации

$$\mathbf{U_C'} = \mathbf{D^+MU_C} + \mathbf{d}E; k < \frac{t}{T} < k + 0.5; \\ \mathbf{U_C'} = \mathbf{D^-MU_C}; k + 0.5 < \frac{t}{T} < k + 1, \qquad (6)$$

где $\mathbf{D^+}, \mathbf{D^-}$ - составляющие матрицы **D**, состоящие из единиц и нулей, причем $\mathbf{D} = \mathbf{D^+} - \mathbf{D^-}$.

В силу третьего допущения для узлов, фигурирующих в уравнении (1), при переходе через временные точки коммутации выполняется закона сохранения заряда

$$\Delta\mathbf{q}_{k+0.5} + \mathbf{B^-}\Delta\mathbf{q}'_{k+0.5} = 0; \\ \Delta\mathbf{q}_k + \mathbf{B^+}\Delta\mathbf{q}'_k = 0, \qquad (7)$$

где $\mathbf{B^+}, \mathbf{B^-}$ – составляющие матрицы $\mathbf{D_0}^\mathbf{T} = \mathbf{B} = \mathbf{B^+} - \mathbf{B^-}$, сформированные аналогично матрицам $\mathbf{D^+}, \mathbf{D^-}$; $\Delta\mathbf{q}_k, \Delta\mathbf{q}_k'$ – приращения зарядов основных и вспомогательных конденсаторов в соответствующих временных точках.

Подстановка значений векторов системы (6) в уравнения (7) с учетом компонентных уравнений $\mathbf{q} = \mathbf{CU_C}; \mathbf{q}' = \mathbf{C'U_C'}$ позволяет получить систему разностных уравнений относительно вектора переменных состояния

$$(\mathbf{I}+\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-}\mathbf{C}'\mathbf{R}^{+})\mathbf{U}_k+\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-}\mathbf{C}'\mathbf{d}E_k=$$
$$=(\mathbf{I}+\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-}\mathbf{C}'\mathbf{R}^{-})\mathbf{U}_{k+0.5};\qquad(8)$$
$$(\mathbf{I}+\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{+}\mathbf{C}'\mathbf{R}^{-})_{k+0.5}=(\mathbf{I}+\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{+}\mathbf{C}'\mathbf{R}^{+})\mathbf{U}_{k+1},$$

где $\mathbf{U}_k=\mathbf{U}_C(kT+0);\mathbf{R}^{+}=\mathbf{D}^{+}\mathbf{M};\mathbf{R}^{-}=\mathbf{D}^{-}\mathbf{M}$.

Обозначим $\mathbf{B}_0=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-}$; $\mathbf{B}_1=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{+}$; $\mathbf{R}_0=\mathbf{C}'\mathbf{R}^{-}$; $\mathbf{R}_1=\mathbf{C}'\mathbf{R}^{+}$; $\mathbf{d}_1=\mathbf{C}'\mathbf{d}$ и найдем $\mathbf{L}_{00}=\mathbf{B}_0\mathbf{R}_0$; $\mathbf{L}_{01}=\mathbf{B}_0\mathbf{R}_1$; $\mathbf{L}_{10}=\mathbf{B}_1\mathbf{R}_0$; $\mathbf{L}_{11}=\mathbf{B}_1\mathbf{R}_1$; $\mathbf{h}=\mathbf{B}_0\mathbf{d}_1$, тогда система (8) приобретает компактный вид

$$\begin{aligned}&(\mathbf{I}+\mathbf{L}_{01})\mathbf{U}_k+\mathbf{h}E_k=(\mathbf{I}+\mathbf{L}_{00})\mathbf{U}_{k+0.5};\\&(\mathbf{I}+\mathbf{L}_{10})\mathbf{U}_{k+0.5}=(\mathbf{I}+\mathbf{L}_{11})\mathbf{U}_{k+1}.\end{aligned}\qquad(9)$$

Заметим, что введенные матрицы аналогичны составляющим матрицы

$$\begin{aligned}\mathbf{L}&=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{D}\mathbf{M}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{R}=\\&=\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}^{+}-\mathbf{B}^{-})\mathbf{G}(\mathbf{R}^{+}-\mathbf{R}^{-})=\\&=(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_0)(\mathbf{R}_1'-\mathbf{R}_0')=\\&=\mathbf{L}_{11}'-\mathbf{L}_{10}'-\mathbf{L}_{01}'+\mathbf{L}_{00}'\end{aligned}$$

из системы (5) при замене G_i на C_i'. Это позволяет формировать матричные коэффициенты $\mathbf{L}_{00},\mathbf{L}_{01},\mathbf{L}_{10},\mathbf{L}_{11}$ непосредственно из матрицы L прототипа.

Опишем методику формирования матричных коэффициентов системы разностных уравнений (9) на примере исследования ARC-прототипа SC-фильтра, изображенного на рис.2.

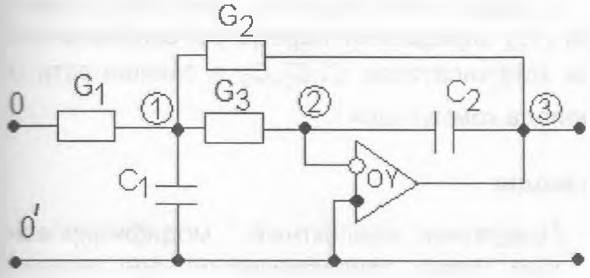

Рис.2. Схема ARC-прототипа SC-фильтра

– Нумеруем узлы схемы на рис. 2, придерживаясь сформулированной системы обозначений. Находим, что $n=r=3, m=2$.

– Составляем таблицу подключения проводимостей.

	0	1	2	3
G_1	1	-1	0	0
G_2	0	1	0	-1
G_3	0	1	-1	0

– Из таблицы находим

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\1&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix};\mathbf{d}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

– Выразим потенциалы n узлов через напряжения на конденсаторах с учётом параметров операционного усилителя (ОУ).

Для идеального ОУ

$$\varphi_1=U_{C1};\varphi_2=0;\varphi_3=-U_{C2}$$

Формируем матрицу $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&-1\end{bmatrix}$.

При необходимости может быть учтено конечное значение μ коэффициента усиления ОУ. Тогда $\varphi_1=U_{C1};\varphi_2=U_{C2}(\mu+1)^{-1}$; $\varphi_3=-U_{C2}\mu(\mu+1)^{-1}$,

$$\mathbf{M}^{\mu}=\begin{bmatrix}1&0\\0&(\mu+1)^{-1}\\0&-\mu(\mu+1)^{-1}\end{bmatrix}$$

– В транспонированной матрице $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ вычеркиваем третью сторону, соответствующую узлу подключения выхода ОУ, и формируем матрицы

$$\mathbf{B}=\mathbf{D}_0^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix};\mathbf{B}^{+}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}^{-}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

– Аналогично разделяем на составляющие матрицу $\mathbf{D}=\mathbf{D}^{+}-\mathbf{D}^{-}$ и формируем матрицы

$$\mathbf{R}^{+}=\mathbf{D}^{+}\mathbf{M}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\1&0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}^{-}=\mathbf{D}^{-}\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\\0&0\end{bmatrix}.$$

– Находим значения матриц

$$\mathbf{L}_{00}=\mathbf{B}_0\mathbf{R}_0=\begin{bmatrix}C_1^{-1}&0&0\\0&0&C_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1'&0\\0&-C_2'\\0&0\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}C_1'C_1^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{01}=\mathbf{B}_0\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}C_1^{-1}&0&0\\0&0&C_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\C_2'&0\\C_3'&0\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}0&0\\C_3'C_2^{-1}&0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{10}=\mathbf{B}_1\mathbf{R}_0=\begin{bmatrix}0 & C_1^{-1} & C_1^{-1}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1' & 0\\ 0 & -C_2'\\ 0 & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-C_1^{-1}C_2' & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_{01}=\mathbf{B}_0\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}0 & C_1^{-1} & C_1^{-1}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ C_2' & 0\\ C_3' & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}(C_2'+C_3')C_1^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{h}=\mathbf{B}_0\mathbf{d}_1=\begin{bmatrix}C_1^{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1'\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1'C_1^{-1}\\ 0\end{bmatrix}.$$

2. Условия эквивалентности SC- фильтра и ARC-прототипа

Задача параметрического синтеза SC – фильтра по известному ARC-прототипу состоит в определении параметров C_i' и величины T по критерию совпадения импульсных характеристик обоих фильтров на множестве дискретных временных точек, отстоящих на период T.

Выходное напряжение ARC-прототипа от воздействия δ-импульса напряжения веса ψ найдем из выражения (5), определив обратное преобразование Лапласа изображения в правой части формулы

$$U^{ARC}{}_{ВЫХ}(t)=\mathbf{m}^{\mathrm{T}}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{U}_{\mathrm{C}}(+0), \qquad (10)$$

где

$\mathbf{U}_{\mathrm{C}}(+0)=-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{d}\psi,\ \mathbf{A}=-\mathbf{L}=-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}_0{}^{\mathrm{T}}\mathbf{GDM}$ – матрица переменных состояния.

При воздействии одиночного импульса амплитудой E на SC-фильтр разностное уравнение (9) приобретает однородный вид

$$\mathbf{U}_{k+1.5}=\mathbf{FU}_{k+0.5} \qquad (11)$$

где $\mathbf{F}=(\mathbf{I}+\mathbf{L}_{00})^{-1}(\mathbf{I}+\mathbf{L}_{01})(\mathbf{I}+\mathbf{L}_{11})^{-1}(\mathbf{I}+\mathbf{L}_{10})$, а начальные условия определяется выражением $\mathbf{U}_{0.5}=(\mathbf{I}+\mathbf{L}_{00})^{-1}\mathbf{h}E$.

Найдем z–изображение выходного напряжения синтезируемого фильтра на наборе дискретных точек $(k+0.5)T+0$

$$U^{SC}{}_{ВЫХ}(z)=\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(z\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{U}_{0.5}. \qquad (12)$$

Выходное напряжение ARC-прототипа на наборе дискретных точек, отстоящих на период T, имеет аналогичное z–изображение

$$U^{ARC}{}_{ВЫХ}(z)=\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(z\mathbf{I}-\mathbf{e}^{\mathbf{A}T})^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{C}}(+0). \qquad (13)$$

Условием эквивалентности фильтров является равенство

$$\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(z\mathbf{I}-\mathbf{e}^{\mathbf{A}T})^{-1}\mathbf{U}_{\mathrm{C}}(+0)=\mathbf{m}^{\mathrm{T}}(z\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}\mathbf{U}_{0.5}, \qquad (14)$$

которое должна выполняться для любых z.

Для рассмотренного в примере ARC-прототипа второго порядка (рис. 2)

определяем матрицу

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\dfrac{C_1^2}{(C_1'+C_1)(C_1+C_2'+C_3')} & \dfrac{C_1C_2'}{(C_1'+C_1)(C_1+C_2'+C_3')}\\ \dfrac{C_1C_3'}{(C_1+C_2'+C_3')C_2} & 1+\dfrac{C_2'C_3'}{(C_1+C_2'+C_3')C_2}\end{bmatrix}$$

и векторы

$$\mathbf{U}_{0.5}=\begin{bmatrix}C_i'(C_i'+C_i)^{-1}E\\ 0\end{bmatrix};\ \mathbf{U}_{\mathrm{C}}(+0)=\begin{bmatrix}C_1G_l\psi\\ 0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{m}^{\mathrm{T}}=[0\quad 1].$$

После подстановки соответствующих значений в условия эквивалентности (14) путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях z числителя и знаменателя образовавшейся дроби получаем систему трех скалярных уравнений

$$\begin{cases}C_1^{-1}G_1\psi[e^{\mathbf{A}T}]_{21}=C_1'(C_1'+C_1)^{-1}E[\mathbf{F}]_{21};\\ tr(e^{\mathbf{A}T})=tr(\mathbf{F});\\ det(e^{\mathbf{A}T})=det(\mathbf{F}).\end{cases} \qquad (15)$$

где $[e^{\mathbf{A}T}]_{21}$ – элемент матрицы с соответствующими индексами, $tr(e^{\mathbf{A}T})$, $det(e^{\mathbf{A}T})$ – след и определитель соответствующей матрицы.

В результате решения системы уравнений (15) определяют параметры вспомогательных конденсаторов C_1', C_2', C_3' в зависимости от периода коммутации T

Выводы

- Предложен компактный модифицированный метод припасовывания для анализа электромагнитных процессов в цепях с переключающимися конденсаторами, построенными на основе ARC-аналогов, позволяющий непосредственно получить матричные коэффициенты разностных уравнений SC-фильтра из матрицы уравнения состояния прототипа.
- Выведены условия эквивалентности SC-фильтра и ARC-прототипа по критерию совпадения импульсных характеристик на дискретном множестве временных точек, отстоящих на период коммутации, которые являются исходными данными для опреде-

ления параметров вспомогательных конденсаторов и периода коммутации.

Литература

1. *Рыбин А.И.* Анализ переходных и установившихся режимов в линейно–параметрических цепях модифицированным методом припасовывания// Радиоэлектроника. (Изв. высш. учеб. заведений).– 2001. – №3. – С.31 – 41.
2. *Рыбин А.И.,* Кумсия М. Анализ параметрических цепей модифицированным методом припасовывания с использованием дискретного преобразования Фурье. Вісник Національного технічного университету України "КПІ". Серія – Радіотехніка. Радіоапаратобудування. – 2009. – №38. – С.23 – 29.
3. *Достал Т.,* Рибін О.І., Трохименко Я.К. Проектування фільтрів з ємностями, що перемикаються. – Київ: Ін-т системних досліджень МОН України,1993. –280 с.
4. Матричні методи в теорії електричних та електронних кіл. Навч. посібник/ М.Ю. Артеменко, Ю.Є. Кулєшов, Ю.І. Якименко. - К.: КНУТД, 2008. –156 с.

[1]*Государственный университет информационно-коммуникационных технологий*
[2]*Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»*