

Теория сигналов и систем

УДК 621.314

В.В. Рогаль, канд. техн. наук, А.Л. Осадчий

Дискретное моделирование широтно-импульсных преобразователей

Рассмотрен метод моделирования широтно-импульсных преобразователей в режиме непрерывного тока дросселя. Результат моделирования – дискретная модель преобразователя в пространстве состояний, с периодом дискретизации равным периоду переключения. Использование предложенной модели позволяет формализовать задачи анализа объекта и разработки системы управления методами современной теории автоматического управления.

The method of modeling pulse-width modulated converters in continuous conducting mode is considered. The result of modeling is a discrete state-space model of converter, with a discretization period equal to switching one. Using of the proposed model can formalize the tasks of object analysis and control system design by using the methods of the up-to-date control theory.

Ключевые слова: широтно-импульсный преобразователь, период переключения, пространство состояний, модель, линеаризация.

Введение

Широтно-импульсные преобразователи (ШИП) напряжения широко используются в источниках питания большинства электронных устройств.

Наиболее эффективные устройства электропитания создаются на основе цифровых микропроцессорных систем управления.

Важное преимущество цифровых систем управления преобразователями перед аналоговыми заключается в возможности реализовать гибкие и сложные алгоритмы управления [1]. Принципиально улучшить качество управления преобразователем можно, используя для управления не только информацию о сигнале ошибки, но и о модели преобразователя.

Моделирование ШИП как объекта управления является достаточно сложной задачей, потому что электронные ключи работают в режиме коммутации, а компоненты цепи соединены вместе в периодически переменных конфигурациях, каждая из которых описывается независимым уравнением [2,3]. В то же время, сигнал управления рассчитывается исходя из сигнала ошибки один раз на период переключения или даже реже.

В работах ряда зарубежных ученых анализ переходных процессов и разработку системы

управления проводят по непрерывной модели возмущений в окрестности установившегося режима [4], при этом рекомендуют модель преобразователя представлять в стандартной канонической форме описания [5]. Это эквивалентная цепь, которая описывает основные физические функции преобразователя.

Предложенный метод моделирования ШИП позволяет получить единую дискретную модель в пространстве состояний с периодом дискретизации равным периоду переключения.

Такая форма представления модели преобразователя адаптирована для применения методов современной теории автоматического управления [6,7], потому что объект управления описан в наиболее общем виде.

Допущения при моделировании

Рассмотрим работу ШИП в режиме непрерывного тока дросселя. Будем считать электронный ключ идеальным, а элементы схемы – линейными с постоянными параметрами. При этом преобразователь описывается различными дифференциальными уравнениями при двух положениях ключа.

Тогда можно записать уравнение преобразователя в векторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A_1 x(t) + B_{1u} u(t); 0 \leq t \leq \gamma T, \\ \frac{dx(t)}{dt} = A_2 x(t) + B_{2u} u(t); \gamma T \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t)$ – вектор переменных состояния, $u(t)$ – вектор входов, A_1, A_2 – системные матрицы, B_{1u}, B_{2u} – входные матрицы по напряжению, T – период переключения, γ – коэффициент заполнения.

Формирование разностных уравнений преобразователя проведем в такой последовательности:

1. Определение математической модели для большого сигнала.
2. Выбор рабочих условий в установившемся режиме для преобразователя.
3. Непрерывное моделирование возмущений около установившегося режима.
4. Получение разностных уравнений путем интегрирования «малых» возмущений во временной области по одному полному периоду преобразователя.

Рассмотрим представленный метод моделирования по шагам.

1. Определение математической модели для большого сигнала

$$\frac{dx(t)}{dt} = D_1(t)[A_1x(t) + B_{1u}u(t)] + D_2(t)[A_2x(t) + B_{2u}u(t)]. \quad (2)$$

Функции $D_1(t), D_2(t)$ – скалярные функции широтно-импульсной модуляции, или функции модуляции.

Изменение функций модуляции показано на рис.1.

2. Выбор рабочих условий в установившемся режиме для преобразователя

Сигнал управления преобразователем – сигнал управления ключом из широтно-импульсного модулятора.

Второй шаг при выводе разностных уравнений – определение функций модуляции в установившемся режиме \bar{D}_1 и \bar{D}_2 , которые через уравнение (2) приводят к установившемуся решению $\bar{x}(t)$:

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \bar{D}_1[A_1\bar{x}(t) + B_{1u}\bar{u}(t)] + \bar{D}_2[A_2\bar{x}(t) + B_{2u}\bar{u}(t)]. \quad (3)$$

3. Непрерывное моделирование возмущений около установившегося режима

Опишем поведения возмущений около установившегося решения, при модуляции переднего фронта рис. 3. Вывод дифференциальных уравнений для модуляции «заднего фронта» идентичен, как и для модуляции «переднего фронта», с разницей по относительному времени отсчета, так что результат для обоих случаев можно определить одновременно.

Ширина n -ого возмущения – время t_n , но вместо использования этой переменной при выводе используем нормализованную переменную d_n , определенную соотношением

$d_n = \frac{\Delta t_n}{T}$. При малой модуляции по сравнению с периодом работы преобразователя T действительно неравенство $|d_n| \ll 1$.

Для определения эффектов модуляции, показанной на рис. 3, подставим $D_1(t) = \bar{D}_1(t) - d(t)$ и $D_2(t) = \bar{D}_2(t) + d(t)$ в уравнение (2). Так как это возмущение при модуляции в установившемся режиме даст возмущение $\check{x}(t), \check{u}(t)$ около установившегося решения $\bar{x}(t), \bar{u}(t)$, подставим также $x(t) = \bar{x}(t) + \check{x}(t)$, $u(t) = \bar{u}(t) + \check{u}(t)$, в уравнение (2).

$$\frac{d(\bar{x}(t) + \check{x}(t))}{dt} = (\bar{D}_1 - d(t)) \times [A_1(\bar{x}(t) + \check{x}(t)) + B_{1u}(\bar{u}(t) + \check{u}(t))] + (\bar{D}_2 + d(t)) [A_2(\bar{x}(t) + \check{x}(t)) + B_{2u}(\bar{u}(t) + \check{u}(t))]. \quad (4)$$

Вычитание постоянного решения, представленного уравнением (3), из уравнения (4), дает уравнение (5), которое описывает поведение возмущения $\check{x}(t)$, вызванное модуляцией $d(t)$ и возмущением входного напряжения $\check{u}(t)$:

$$\frac{d\check{x}}{dt} = \bar{D}_1 A_1 \check{x} + \bar{D}_2 A_2 \check{x} + \bar{D}_1 B_{1u} \check{u} + \bar{D}_2 B_{2u} \check{u} + d[(A_2 - A_1)\bar{x} + (B_{2u} - B_{1u})\bar{u}] + d[(A_2 - A_1)\check{x} + (B_{2u} - B_{1u})\check{u}]. \quad (5)$$

Пренебрежём малыми второго порядка в уравнении:

$$\frac{d\check{x}}{dt} = \bar{D}_1 A_1 \check{x} + \bar{D}_2 A_2 \check{x} + \bar{D}_1 B_{1u} \check{u} + \bar{D}_2 B_{2u} \check{u} + d[(A_2 - A_1)\bar{x} + (B_{2u} - B_{1u})\bar{u}]. \quad (6)$$

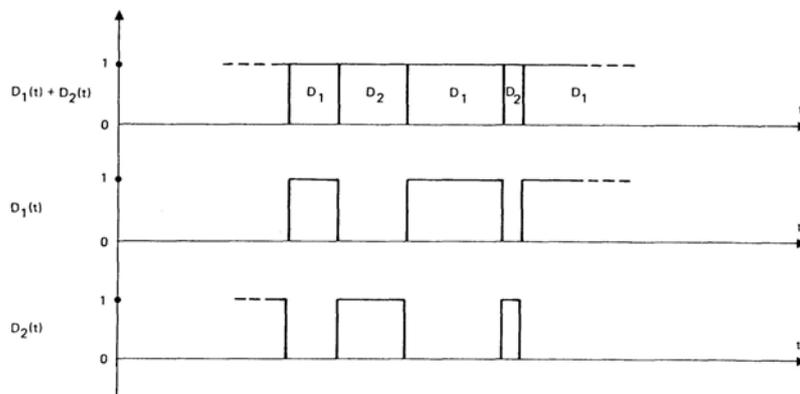


Рис. 1. Временные диаграммы функций модуляции

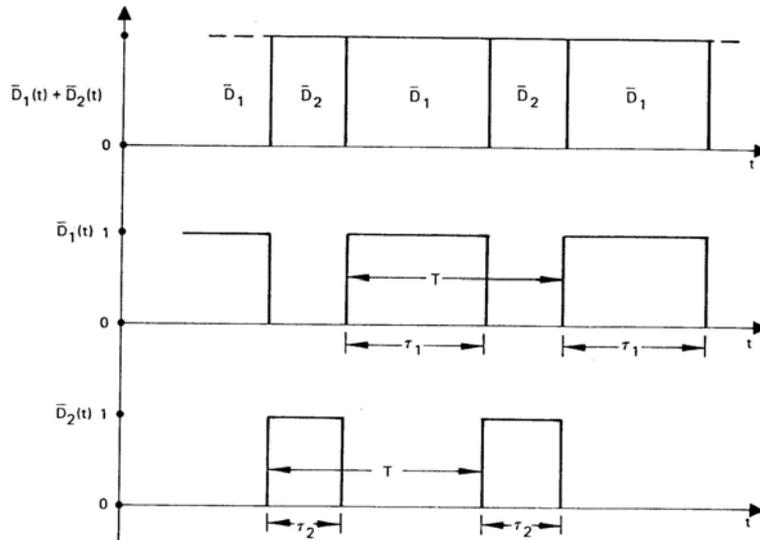


Рис. 2. Функции модуляции в режиме, установившемся во времени

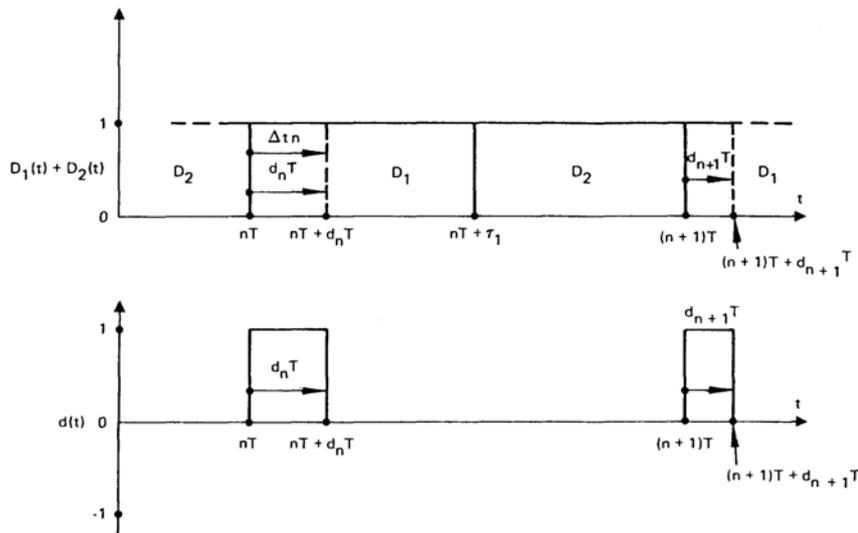


Рис. 3. Детальные временные характеристики модуляции «переднего фронта»

4. Получение разностных уравнений путем интегрирования «малых» возмущений во временной области по одному полному периоду преобразователя.

Применим метод численного интегрирования для вывода разностных уравнений, описывающих преобразователь. Проинтегрируем «малые» возмущения в уравнении (6) по одному полному периоду преобразователя во временной области. Со ссылкой на рис. 3, это может быть сделано двумя частями: первая, по импульсам $d(t)$ от nT до $nT + d_n T$, и вторая - на протяжении остатка периода от $nT + d_n T$ до $(n+1)T$.

При выполнении интегрирования особенно полезен тот факт, что ширина $d_n T$ становится очень малой для малых сигналов. Эта аппроксимация для малого сигнала ограничивает конечную дис-

кретную модель преобразователя к приближительному описанию локального поведения около установившегося решения, но, взамен этого ограничения интегрирование в уравнении (6) упрощается, а конечные дифференциальные уравнения для малого сигнала являются линейными.

Интегрирование уравнения (6) сначала вдоль узких импульсов $d(t)$ от nT до $nT + d_n T$ приводит к следующему выражению:

$$\int_{nT}^{nT+d_n T} \frac{d\tilde{x}}{dt} dt = \int_{nT}^{nT+d_n T} (\bar{D}_1 A_1 \tilde{x} + \bar{D}_2 A_2 \tilde{x}) dt + \int_{nT}^{nT+d_n T} (\bar{D}_1 B_{1u} \tilde{u} + \bar{D}_2 B_{2u} \tilde{u}) dt + \int_{nT}^{nT+d_n T} d[(A_2 - A_1)\bar{x} + (B_{2u} - B_{1u})\bar{u}] dt \quad (7)$$

Пренебрежём малыми величинами второго порядка и запишем результат интегрирования уравнения (7) от nT до $nT + d_nT$ для малых сигналов:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(nT + d_nT) - \tilde{x}(nT) = \\ = d_nT[(A_2 - A_1)\tilde{x}(nT) + (B_{2u} - B_{1u})\tilde{u}(nT)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Обратим внимание на то, что в уравнении (8) установившееся решение изменяется в момент nT . Так как модуляция становится исчезающе малой, она влияет мало на то, меняется ли \tilde{x} в момент $nT + d_nT$ или в nT , потому что все его компоненты непрерывны.

Для завершения интегрирования, интегрируем уравнение (6) с момента $nT + d_nT$ до $(n+1)T$ на рис.3. Так как это посередине между импульсами $d(t)$, уравнение (6) можно записать в виде:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \bar{D}_1 A_1 \tilde{x} + \bar{D}_2 A_2 \tilde{x}. \quad (9)$$

Если $\bar{D}_1 = 1$, уравнение (9) становится $\frac{d\tilde{x}}{dt} = \bar{D}_1 A_1 \tilde{x}$ при начальных условиях $\tilde{x}(nT + d_nT)$, решение может быть представлено в виде:

$$\tilde{x}(t) = e^{A_1 t} \tilde{x}(nT + d_nT). \quad (10)$$

Символ e^{At} представляет здесь экспоненциальную матрицу.

Если ширина импульсов $d(t)$ на рис. 5 становится исчезающе малой, тогда интегрирование от $nT + d_nT$ до $nT + \tau_1$ это почти то же самое, что интегрирование от nT до $nT + \tau_1$. Можно показать, что уравнения для малого сигнала, которые описывают состояния преобразователя от $nT + d_nT$ до $nT + \tau_1$:

$$\tilde{x}(nT + \tau_1) = e^{A_1 \tau_1} \tilde{x}(nT + d_nT). \quad (11)$$

Применение таких же аргументов к уравнению (9), если $\bar{D}_2 = 1$, позволяет получить:

$$\tilde{x}(nT + T) = e^{A_2 \tau_2} \tilde{x}(nT + \tau_1). \quad (12)$$

Поскольку $x(t)$ был выбран непрерывным для всех t , то \tilde{x} и \tilde{x} также непрерывны для всех t . Это значит, что интегрирование для малого сигнала в уравнениях (8,11,12) может быть соединено от края до края для формирования полного набора дифференциальных уравнений для малого сигнала при модуляции «переднего фронта»:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(nT + T) = e^{A_2 \tau_2} e^{A_1 \tau_1} [\tilde{x}(nT) + \\ + d_nT[(A_2 - A_1)\tilde{x}(nT) + (B_{2u} - B_{1u})\tilde{u}(nT)]] + \\ + (D_1 B_{1u} + D_2 B_{2u})T \cdot \tilde{u}(nT). \end{aligned} \quad (13)$$

Учтем вариации тока нагрузки за период переключения $\tilde{i}(nT)$, аналогично вариациям напряжения нагрузки $\tilde{u}(nT)$, B_{1i}, B_{2i} - входные матрицы по току.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(nT + T) = e^{A_2 \tau_2} e^{A_1 \tau_1} \times \\ \times [\tilde{x}(nT) + d_nT[(A_2 - A_1)\tilde{x}(nT) + \\ + (B_{2u} - B_{1u})\tilde{u}(nT) + (B_{2i} - B_{1i})\tilde{i}(nT)]] + \\ + (D_1 B_{1u} + D_2 B_{2u})T \cdot \tilde{u}(nT) + \\ + (D_1 B_{1i} + D_2 B_{2i})T \cdot \tilde{i}(nT). \end{aligned} \quad (14)$$

Хотя при выводе d_n было принято положительным, можно найти такой же формальный результат для d_n , которые принимают отрицательные значения, так что модуляция может быть на каждой стороне установившегося момента переключения. Отметим, что в этой линейной модели нет необходимости в допущениях о частоте переключения относительно собственной частоты фильтра.

Представим полученный результат в общем виде в пространстве состояний:

$$\tilde{x}(n+1) = A_z \tilde{x}(n) + B_z d(n) + B_{zu} \tilde{u}(n) + B_{zi} \tilde{i}(n). \quad (15)$$

$$\tilde{y}(k) = C_z \tilde{x}(k). \quad (16)$$

Где были приняты такие обозначения:

$$A_z = e^{A_1 D_1 T} e^{A_2 D_2 T}. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} B_z = A_z T [(A_2 - A_1)\tilde{x}(nT) + \\ + (B_{2u} - B_{1u})\tilde{u}(nT) + (B_{2i} - B_{1i})\tilde{i}(nT)]. \end{aligned} \quad (18)$$

$$B_{zu} = (D_1 B_{1u} + D_2 B_{2u})T. \quad (19)$$

$$B_{zi} = (D_1 B_{1i} + D_2 B_{2i})T. \quad (20)$$

Согласно уравнениям (15, 16) на рис. 4 представлена дискретная модель широтно-импульсного преобразователя в пространстве состояний.

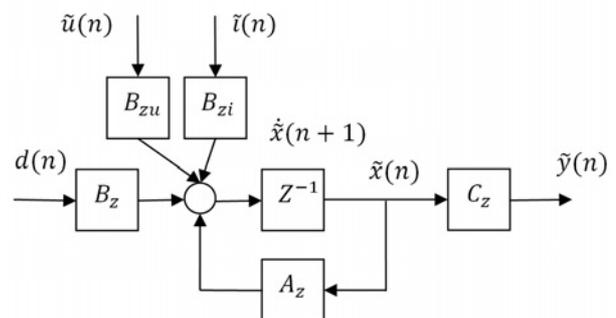


Рис. 4. Дискретная модель импульсного преобразователя в пространстве состояний

Выводы

Разработан метод формирования дискретной модели широтно-импульсного преобразователя в базисе переменных состояния. При этом период дискретизации равен периоду переключения.

Модель представлена в малых отклонениях относительно установившегося режима, и устанавливает связь между вариациями входного напряжения $\tilde{u}(n)$, выходного тока $\tilde{i}(n)$, функции модуляции $d(k)$ и вектора состояний $\tilde{x}(n)$.

Такая модель адаптирована для применения методов современной теории управления и их компьютерной реализации.

Литература

1. *Острём К., Виттенмарк Б., Системы управления с ЭВМ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1987. 480 с.*
2. *Сигорський В.П., Петренко А.И., Основы теории электронных схем. – К.: Техника, 1971. – 610 с.*
3. *Артеменко М.Ю., Жуйков В.Я., Якименко Ю.І., Матрично-топологічний аналіз вентильних перетворювачів: Навч. посіб. – К.: ІВЦ «Видавництво «Політехніка»», 2002. – 104 с.*
4. *Muhammad H. Rashid. Power Electronics Handbook, Second Edition, Academic Press, 2007, 1162 p.*
5. *Robert W. Erickson, Dragan Maksimovic. Fundamentals of Power Electronics, Kluwer Academic Publishers, 2nd ed., 2001. - 912 p.*
6. *Куо Б., Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ.- М.: Машиностроение, 1986. – 448 с., ил.*
7. *Справочник по теории автоматического управления/ Под. Ред. А.А. Красовского. – М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.*

*Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»*