УДК 534.231.2

Ю.А. Дидусенко

Физические поля, которые формируются системой цилиндрических пьезокерамических излучателей

Получены аналитические соотношения, описывающие физические поля системы, которая состоит из произвольного числа круговых цилиндрических пьезокерамических излучателей. Каждый из них представляет собой тонкую радиально поляризованную оболочку, совершающую пульсирующие колебания. Сформулированы физическая и математическая модели такой системы. Учтено несколько типов взаимодействия, а именно: взаимодействие излучателей по звуковому полю, обусловленное многократным рассеиванием волн; взаимодействие электроупругого тела с окружающей средой; взаимодействие акустических, механических и электрических полей в каждом из излучателей в процессе преобразования энергии.

The problem of sound radiation by the system consisted of arbitrary circular cylindrical piezoceramic transducers is investigated. Each of its’ is a thin radially polarized shell, which performing pulsating vibrations. The physical and mathematical models of such system is formulated. Its describe the physical fields of such a system considering several types of interaction, namely: radiators’ interaction on the sound field caused by multiple scattering waves, the interaction of an electroelastic solid with the medium, interaction of acoustic, mechanical and electrical fields in each of the transducers in the process of energy conversion.

Ключевые слова: *физические поля, система излучателей, круговой цилиндрический пьезокерамический преобразователь.*

Введение

Задачи о формировании физических полей системами пьезокерамических преобразователей играют существенную роль в проектировании, конструировании и анализе систем излучения звука в различных областях техники. В процессе выполнения проектных работ особую роль приобретает расчетная оценка излучаемых полей. При многообразии теоретических методов, используемых в акустике, необходимо выбрать такие способы решения задач, которые допускали бы анализ физической сути явления, учитывая при этом наиболее важные свойства реальных систем, в особенности электроупругих преобразователей. К сожалению, на сегодняшний день не существует таких методов расчета, которые позволяли бы принять во внимание параметры пьезокерамики и конструктивные особенности построения преобразователей.

Целью данной работы является получение аналитических соотношений, которые описывают физические поля, создаваемые системой круговых цилиндрических пьезокерамических излучателей, работающих на основе поперечного пьезоэффекта, с учетом нескольких видов взаимодействий, а именно: взаимодействия излучателей по звуковому полю, обусловленного многократным рассеиванием волн; взаимодействия электроупругих тел с окружающей упругой средой; взаимодействия акустических, механических и электрических полей в каждом из излучателей в процессе преобразования энергии. Характерной особенностью рассматриваемой задачи является учет свойств пьезокерамических материалов, из которых изготовляются различные излучатели системы, и особенности построения преобразователей.

Анализ литературы, опубликованной по этим вопросам, показывает, что опубликовано несколько работ, в которых исследуется взаимодействие электроупругих оболочек [1-5]. Электромеханические взаимодействия в процессе преобразования энергии рассмотрены в работе [6]. Работа [7] посвящена исследованию закономерностей звуковых полей, формируемых гидроакустическими антенными решетками при учете многократного рассеяния звука на их элементах.

1. Физическая и математическая модели системы

Рассмотрим систему из N произвольных пьезокерамических излучателей в форме протяженных цилиндров, с радиусами $r_0^{(j)}$ и толщиной $h^{(j)}$, при условии $h^{(j)} / r_0^{(j)} << 1$. Преобразователи работают на поперечном пьезоэффекте. Цилиндрические пьезокерамические излучатели ($\rho_k^{(j)}$, $c_k^{(j)}$ - плотность и скорость звука керамики, соответственно), помещены в идеальную жидкость с параметрами ρ_1 и c_1 и имеют жидкость во внутреннем объеме с параметрами $\rho_2^{(j)}$ и $c_2^{(j)}$. На поверхность цилиндров нанесены электроды, к которым подведено напряжение $U_0^{(j)}e^{-i\omega t}$. При таком возбуждающем воздействии возникают пульсирующие колебания и в среду излучаются звуковые волны.

Будем полагать, что продольные оси излучателей параллельны между собой, а каждый излучатель имеет бесконечную длину и произвольные размеры, и расположены на произвольном расстоянии друг от друга. Введем общую систему координат xOy , а также локальные прямоугольные и цилиндрические системы координат для каждого излучателя, таким образом, чтобы продольные оси были параллельны, а оси Oy и Ox одинаково ориентированы между собой (рис.1)

Теоретическое исследование динамического поведения указанной электроупругой системы сводится к совместному решению дифференциальных уравнений, которые описывают акустические, механические и электрические колебания преобразователей и в системе, и в упругой среде.

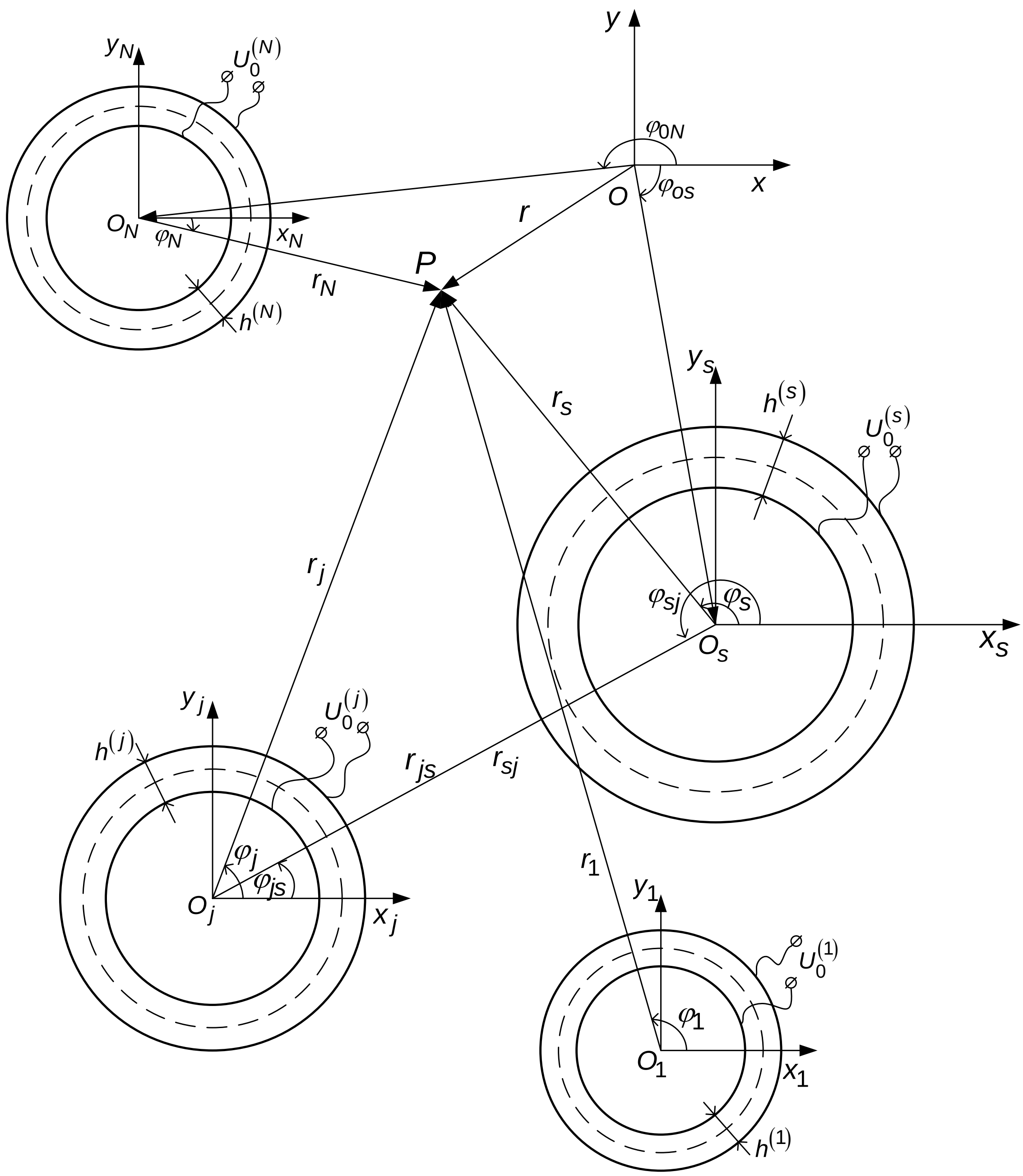

Рис.1. Система цилиндрических преобразователей

2. Вывод аналитических соотношений описывающих физические поля моделируемой системы

Обозначим смещения серединной поверхности оболочки в тангенциальном направлении через $u^{(j)}$, а в радиальном через - $w^{(j)}$, где $j=1,2,..,N$.

Считая, что пьезокерамическая оболочка поляризована по толщине, на основе гипотез Кирхгофа-Лява [2] и соотношений для пьезокерамических оболочек, приведем уравнения гармонических вынужденных колебаний оболочек в виде:

$$\frac{d^2u^{(j)}}{d\varphi_j^2}-\frac{dw^{(j)}}{d\varphi_j}+\xi_p\beta^{2(j)}\left(\frac{d^2u^{(j)}}{d\varphi_j^2}+\frac{d^3w^{(j)}}{d\varphi_j^3}\right)+ +k^2r_0^{2(j)}u^{(j)}=0; \quad j=1,2,..,N \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{du^{(j)}}{d\varphi_j}-w^{(j)}-\xi_p\beta^{2(j)}\left(\frac{d^3u^{(j)}}{d\varphi_j^3}+\frac{d^4w^{(j)}}{d\varphi_j}\right)+\\ +k^2r_0^{2(j)}w^{(j)}=-\frac{r_0^{(j)}}{h^{(j)}}(1+\nu_\kappa)d_{31}^{(j)}U_0^{(j)}-\\ -\frac{i\omega r_0^{2(j)}}{h\rho_k^{(j)}c_\kappa^{2(j)}}\left(\rho_1\Phi_1^{(j)}\left(r_1^{(j)},\varphi_j\right)-\right.\\ \left.-\rho_2^{(j)}\Phi_2^{(j)}\left(r_2^{(j)},\varphi_j\right)\right); \qquad j=1,2,..,N\end{gathered} \tag{2}$$

где $r_{1,2}^{(j)}=r_0^{(j)}\pm\dfrac{h^{(j)}}{2}$; $k=\dfrac{\omega}{c}$; $\beta^{2(j)}=\dfrac{h^{2(j)}}{12r_0^{2(j)}}$;

$\xi_p=1+\dfrac{1+\nu}{2}\dfrac{k_p^2}{1-k_p^2}$; $\Phi_1^{(j)}$ та $\Phi_2^{(j)}$ - акустические потенциалы для жидкостей снаружи и внутри оболочек, $\rho_k^{(j)}$, $c_k^{(j)}$, $\nu_k^{(j)}$ - плотность, скорость продольных волн и коэффициент Пуассона для пьезокерамики, $d_{31}^{(j)}$ - пьезомодуль, k_p - планарный коэффициент электромеханической связи пьезокерамической оболочки.

На поверхности каждой из пьезокерамических оболочек, контактирующей с жидкостью, должны выполняться условия равности нормальных скоростей частиц жидкости и скоростей нормальных смещений поверхности оболочки:

$$-i\omega w^{(j)}=-\frac{\partial\Phi_1^{(j)}}{\partial r^{(j)}};r^{(j)}=r_1^{(j)}, \text{ где } j=1,2,..,N \tag{3}$$

$$-i\omega w^{(j)}=-\frac{\partial\Phi_2^{(j)}}{\partial r^{(j)}};r^{(j)}=r_2^{(j)}, \text{ где } j=1,2,..,N \tag{4}$$

Акустические потенциалы $\Phi_1^{(j)}$ и $\Phi_2^{(j)}$ должны удовлетворять уравнению Гельмгольца.

Смещения оболочки для j -го цилиндра будем искать в виде рядов Фурье по собственным формам колебания оболочки:

$$u^{(j)}\left(\varphi_j\right)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}U_q^{(j)}e^{iq\varphi_j}; \text{ где } j=1,2,..,N \tag{5}$$

$$w^{(j)}\left(\varphi_j\right)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}W_q^{(j)}e^{iq\varphi_j}, \text{ где } j=1,2,..,N \tag{6}$$

Запишем выражение для акустического потенциала скорости j-го цилиндра во внешней области, с учетом условий излучения Зоммерфельда, в виде разложений в ряд Фурье по волновым цилиндрическим функциям:

$$\Phi_1^{(j)}\left(r_1^{(j)},\varphi_j\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n^{(j)}H_n^{(1)}\left(k_1r_1^{(j)}\right)e^{in\varphi_j}, j=1,2,..,N$$

Тогда суммарное поле системы в произвольной точке пространства имеет вид:

$$\Phi_1\left(r_1^{(j)},\varphi_j\right)=\sum_{j=1}^{N}\Phi_1^{(j)}\left(r_1^{(j)},\varphi_j\right)= =\sum_{j=1}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n^{(j)}H_n^{(1)}\left(k_1r_1^{(j)}\right)e^{in\varphi_j},$$

где $A_n^{(j)}$ неизвестные коэффициенты, значение которых необходимо определить из выражений (1)-(4). Поскольку в приведенном выше выражении потенциалы скоростей поля записаны в локальных координатах, оно не может быть использовано для задания граничных условий. Для этого все поля необходимо выразить в локальных координатах того цилиндра, для которого рассматриваются граничные условия. Преобразования систем координат осуществляются с помощью теоремы сложения для волновых цилиндрических функций. В результате применения этой теоремы получаем:

$$\begin{gathered}\Phi_1\left(r_1^{(j)},\varphi_j\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n^{(j)}H_n^{(1)}\left(k_1r_1^{(j)}\right)e^{in\varphi_j}+\\ +\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N}\sum_{m=-\infty}^{\infty}A_m^{(s)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}H_{m-n}^{(1)}\left(k_1l_{sj}\right)\times\\ \times J_n\left(k_1r_1^{(j)}\right)e^{i(m-n)\varphi_{sj}+in\varphi_j}, j=1,2,..,N\end{gathered} \tag{7}$$

Для внутренней среды звуковое поле будет иметь вид:

$$\Phi_2^{(j)}\left(r_2^{(j)},\varphi_j\right)=\sum_{g=-\infty}^{\infty}B_g^{(j)}J_g\left(k_2r_2^{(j)}\right)e^{ig\varphi_j}, \tag{8}$$

$j=1,2,..,N$

Подстановка выражений (5)-(8) в дифференциальные уравнения колебаний оболочек (1)-(2) и граничные условия (3)-(4) позволяет после выполнения ряда алгебраических преобразований, в том числе основанных на свойствах полноты и ортогональности угловых функций, получить бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов вида $W_m^{(j)},U_m^{(j)},A_n^{(j)},A_m^{(s)},B_g^{(j)}$:

$$\begin{cases} x_{j\alpha}W_\alpha^{(j)}+d_{j\alpha}A_\alpha^{(j)}+\sum\limits_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}g_{j\alpha}A_m^{(s)}=T_{j\alpha}; \\ W_\alpha^{(j)}+o_{j\alpha}A_\alpha^{(j)}+\sum\limits_{\substack{s=1\\ s\neq j}}^{N}\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}p_{s\alpha}A_m^{(s)}=0; \end{cases} \tag{9}$$

где $a_{j\alpha}=-\dfrac{\left(i\alpha+i\alpha^3\xi_p\beta^{2(j)}\right)}{\left(k^2r_0^{2(j)}-\alpha^2-\xi_p\beta^{2(j)}\alpha^2\right)}$,

$$b_{j\alpha}=-\left(1+\alpha^4\xi_p\beta^{2(j)}+k^2r_0^{2(j)}\right),$$

$$c_{j\alpha}=i\alpha+i\alpha^3\xi_p\beta^{2(j)},$$

$$d_{j\alpha}=\rho_1\frac{i\omega r_0^{2(j)}}{h\rho_k^{(j)}c_\kappa^{2(j)}}H_\alpha^{(1)}\left(k_1r_1^{(j)}\right),$$

$$g_{j\alpha}=\rho_1\frac{i\omega r_0^{2(j)}}{h\rho_k^{(j)}c_\kappa^{2(j)}}H_{m-\alpha}^{(1)}\left(k_1l_{sj}\right)\times$$
$$\times J_\alpha\left(k_1r_1^{(j)}\right)e^{i(m-\alpha)\varphi_{sj}},$$

$$z_{j\alpha}=-\rho_2^{(j)}\frac{i\omega r_0^{2(j)}}{h\rho_k^{(j)}c_\kappa^{2(j)}}J_\alpha\left(k_2r_2^{(j)}\right),$$

$$T_{jt}=-\frac{r_0^{(j)}}{\varepsilon h^{(j)}}(1+\nu_\kappa)d_{31}^{(j)}U_0\int_0^{2\pi}e^{-i\alpha\varphi_j}d\varphi_j,$$

$$o_{j\alpha}=-\frac{k_1}{i\omega}H'^{(1)}_\alpha\left(k_1r_1^{(j)}\right),$$

$$p_{s\alpha}=-\frac{k_1}{i\omega}H_{m-\alpha}^{(1)}\left(k_1l_{sj}\right)J'_\alpha\left(k_1r_1^{(j)}\right)e^{i(m-\alpha)\varphi_{sj}},$$

$$f_{j\alpha}=-\frac{i\omega}{k_2J'_\alpha\left(k_2r_2^{(j)}\right)}$$

$$x_{j\alpha}=\left(b_{j\alpha}-c_{j\alpha}a_{j\alpha}-z_{j\alpha}f_{j\alpha}\right).$$

Эта система является исходной для определения количественных данных физических полей систем пьезокерамических цилиндрических излучателей и может быть решена методом редукции или последовательных приближений.

3. Результаты численного расчета физических полей

Возможность практического применения полученной системы рассмотрена для расчета звукового поля системы в дальнем поле и на поверхности преобразователей. В качестве примера, рассчитана система, состоящая из двух одинаковых круговых цилиндрических пьезокерамических излучателей, которые расположены в жидкости с параметрами $\rho_1=1000\left[кг/м^3\right]$ и $c_1=1500[м/с]$. Преобразователи выполнены из пьезокерамики ЦТБС-3 с параметрами $\rho_k^{(1,2)}=7210\left[кг/м^3\right]$ и $c_k^{(1,2)}=3500[м/с]$, и имеют радиус $r_0^{(1,2)}=0.0675[м]$ и толщину $h^{(1,2)}=0.006[м]$. Расстояние между продольными осями преобразователей принято равным $L=0.135[м]$, амплитуда возбуждающего напряжения - $U_0^{(j)}=100[B]$.

Решение бесконечной системы линейных уравнений (9) произведено методом усечения. Число усеченных членов рядов, которые учитывались в разложениях полей, выбиралось из условия, что суммарный вклад последнего члена не превышает 1% от суммарного полученного результата и составило 17 членов.

На рис.2 и рис.3 приведено распределение амплитуд давления звукового поля описанной системы в дальнем поле и на поверхности преобразователя, на частоте $f=6300[Гц]$, соответственно. Сопоставление результатов расчета приведенных на рис.2 с экспериментальными данными изложенными в работе [7] свидетельствует об удовлетворительном совпадении расчетных и экспериментальных данных.

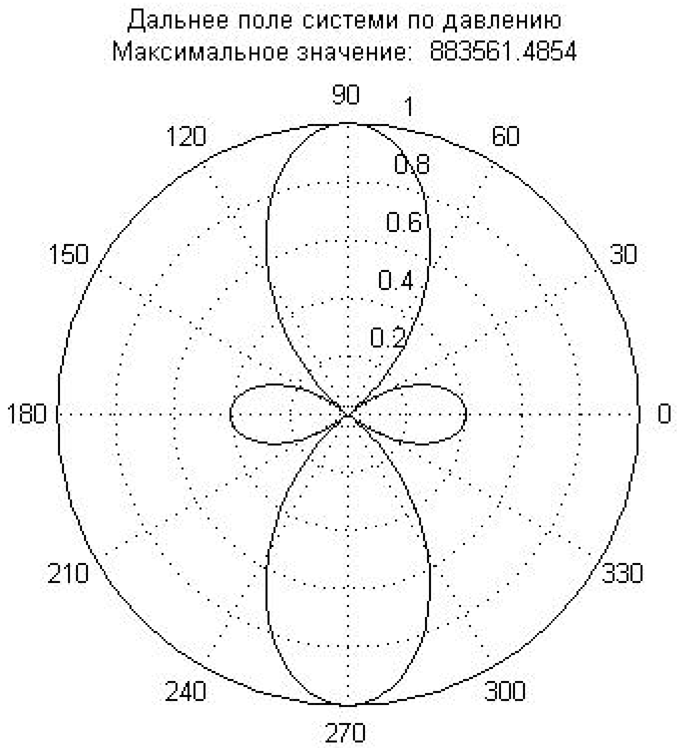

Рис.2 Распределение амплитуд давлений звукового поля в дальней зоне

Рис.3 Распределение амплитуд давлений звукового поля на поверхности излучателя

Выводы

Поставлена и решена задача получения аналитических соотношений, описывающих электрические, механические и акустические поля формируемые системой из N произвольных цилиндрических пьезокерамических излучателей. Преобразователи работают на поперечном пьезоэффекте и выполнены в виде сплошных электроупругих цилиндров. Решение сведено к решению полученной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Эта система является исходной для получения количественных данных о свойствах физических полей как для системы излучателей, так и для отдельных излучателей в составе системы.

Это, в свою очередь, позволяет при выполнении проектных работ рассчитывать параметры физических полей системы и отдельных ее элементов с учетом электрофизических параметров материалов преобразователей, геометрических размеров системы и всех видов взаимодействия, которые участвуют в формировании полей.

Практическое применение полученных соотношений продемонстрировано на примере системы из двух круговых цилиндрических пьезокерамических преобразователей.

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Литература

1. Вовк И.В., Олейник В.Н. Излучение звука заполненной жидкостью пьезокерамической оболочкой с несимметричной внутренней вставкой // Акустический журнал, 1994, том 40, №2, С. 220-224.
2. Вовк И.В., Гринченко В.Т., Маяцкий И.В. Звуковое поле бесконечного кругового цилиндрического преобразователя, частично покрытого слоем акустически мягкого материала. – Акуст. журн., 1972, 18, №3, С. 365-369.
3. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
4. Гринченко В.Т., Сенченко И.В. Излучение звука частично экранированными пьезокерамическими оболочками // Прикл. механика. 1982. Т. 18. №2. С. 15-21.
5. Гринченко В.Т., Лунева С.А. Звуковое поле экранированного кругового цилиндра. – Акуст. журн., 1980, 26, №3, С. 462-467.
6. Механика связных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. - Киев: Наук. Думка, 1989. - 280 с.
7. Подводная электроакустическая аппаратура и устройства. Т. 1. Подводные акустические антенны. Методы расчета звуковых полей / Лейко А.Г., Шамарин Ю.Е., Ткаченко В.П. – Киев, 2000. – 320 с.