

Акустические приборы и системы

УДК 681.586

В.Г. Савин¹, д-р техн. наук, В.М. Шарапов², д-р техн. наук, И.О. Моргун¹, канд. техн. наук

Математическое моделирование работы цилиндрического пьезокерамического трансформатора с двумя секциями генераторных электродов

Рассмотрена задача об установившихся электроупругих колебаниях цилиндрического пьезоэлектрического трансформатора с двумя секциями генераторных электродов. При постановке и решении задачи привлекается линейная теория тонких электроупругих оболочек при смешанных электрических граничных условиях: электрического напряжения на одной из ее частей и тока смещения – на другой. Получены выражения, позволяющие вычислять все основные электромеханические характеристики динамического процесса – перемещения, электрическую напряженность пьезокерамики, электрическое напряжение на генераторных электродах.

A task is considered about the steady electro elastic oscillations of the cylindrical piezoelectric transformer with two generative electrodes. At raising and decision of task the linear theory of thin electro elastic shells under the mixed electric boundary conditions: electric voltage on one of its parts and a displacement current – on another. The expressions allowing calculating, of all basic electromechanical characteristics of dynamic process – displacements, piezoelectric strength, electric voltages on generative electrodes, are got.

Ключевые слова: цилиндрический пьезо-керамический трансформатор, электроупругая оболочка, электроупругие колебания.

Введение

Пьезоэлектрические трансформаторы представляют собой пьезопреобразователи с несколькими (больше трех) электрически не связанными электродами. Электроды, подключенные к источнику электрического напряжения, называют возбудителем. Электроды, подключенные к электрической нагрузке, называют генератором [1]. Пьезоэлектрические трансформаторы отличаются по внешнему виду, расположению и размерам электродов возбудителя и генератора, различным схемам их коммутации [1–3]. Пьезотрансформаторы в основном являются трансформаторами напряжения, также созданы пьезоэлектрические трансформаторы тока [2]. Пьезоэлектрические транс-

форматоры напряжения в большинстве случаев выполняют в виде однослойных или многослойных стержней, прямоугольных пластин, дисков, колец.

Как показывает анализ известных научных публикаций по данной тематике, математические модели разработаны в основном для пьезотрансформаторов в виде стержня, пластины прямоугольной либо круглой формы [4–6]. Что касается преобразователей, выполненных в виде пьезокерамических оболочек с секционированными электродами, то существует только одна публикация, посвященная математическому моделированию задачи об установившихся электроупругих колебаниях цилиндрического пьезоэлектрического трансформатора с одной секцией генераторных электродов [7].

Целью данной работы является разработка математической модели, позволяющей рассчитывать электроупругие колебания цилиндрической пьезокерамической оболочки содержащей две пары электродов генератора электрически не связанных между собою.

Математическая постановка задачи

Исходные уравнения, также как в случае с одной секцией генераторных электродов, включают:

1. уравнения движения пьезокерамической цилиндрической радиально поляризованной оболочки (плоский случай) [8]

$$\begin{aligned}
 & \left[1 + \frac{h^2}{12R^2} \left(1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^s} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\
 & - \frac{h^2}{12R^2} \left(1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^s} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \\
 & - \frac{e_{13} R}{C_{11}^E} \frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial \theta} = \frac{R^2 \gamma}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1) \\
 & - \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12R^2} \left(1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^s} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} - w - \\
 & - \frac{h^2}{12R^2} \left(1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^s} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \\
 & + \frac{e_{13} R}{C_{11}^E} E_r^{(0)} = \frac{R^2 \gamma}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};
 \end{aligned}$$

2. выражение индукции D_r для цилиндрической оболочки, записанное с использованием соотношений Коши [4]

$$D_r = e_{13} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) + \varepsilon_{33}^s E_r^{(0)}, \quad (2)$$

где h – толщина оболочки; R – радиус серединной поверхности оболочки; e_{13} , C_{11}^E , ε_{33}^s , γ – пьезомодуль, модуль упругости, диэлектрическая проницаемость и плотность пьезокерамики, соответственно; u , w – тангенциальная и нормальная составляющие перемещений серединной поверхности оболочки; θ – угловая координата; $E_r^{(0)}$, D_r – радиальные компоненты напряженности серединой поверхности оболочки и индукции электрического поля (в последующем индексы « r » и « (0) » опускаем); t – время.

Запишем исходные уравнения (1), (2) в безразмерном виде, разделив w , u , R , h на R ; t на R/c_k ; E на $1/d_{33}$; D на e_{13} :

$$\begin{cases} (1+\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - \delta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - v \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} - \delta \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} + w + \delta \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - v E = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{cases} \quad (3)$$

$$D = \frac{\partial U}{\partial \theta} + w + \frac{1}{\varepsilon} E, \quad (4)$$

где c_k – скорость звука в пьезокерамике; d_{33} – ее пьезомодуль.

Определим постоянные коэффициенты, входящие в уравнения (3) и (4):

$$\delta = \frac{h^2}{12R^2} \left(1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^s} \right); \quad v = \frac{e_{13}}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^s}; \quad \varepsilon = \frac{e_{13} d_{33}}{\varepsilon_{33}^s}.$$

На внешнюю и внутреннюю поверхности пьезокерамической оболочки нанесены металлизированные электроды. Внутренний электрод сплошной и заземлен, а внешний – разделен в осевом направлении разрезами на несколько электрически не связанных частей. Шириной разрезов и толщиной электродированных покрытий в дальнейшем будем пренебрегать.

К внешним секциям электродов возбуждителя, занимающих области $[\phi_0; \theta_0]$, $[-\phi_0; -\theta_0]$ (ϕ_0 , θ_0 – угловые координаты разрезов электрода), подводится электрическое напряжение $Q(t)$ (рис. 1.)

Подводимый электрический сигнал возбуждает в этой части преобразователя электриче-

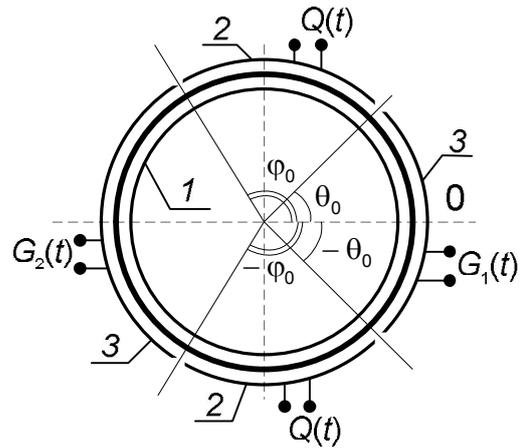


Рис. 1. Расположение электродов на цилиндрическом пьезокерамическом трансформаторе (вид сверху): 1 – внутренний электрод заземления; 2 – возбуждительные электроды; 3 – генераторные электроды

ское поле с напряженностью на серединной поверхности [4]

$$E(t) = -\frac{Q(t)}{h}. \quad (5)$$

Будем считать, что электроды генераторов шириной $2\theta_0$ и $2\phi_0$ подключены к электронным устройствам с бесконечно большим (несколько десятков мегом) входным сопротивлением (режим «холостого хода»). Тогда для этих областей преобразователя выполняется условие по электрическому полю для разомкнутых электродов, обеспечивающее равенство нулю тока смещения через эти поверхности цилиндрической оболочки:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} D d\theta = 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\phi_0}^{\phi_0} D d\theta = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Уравнения (3)–(6) полностью описывают математическую постановку задачи.

Следует отметить, что выражения (6) являются электрическими граничными условиями на генераторных электродах, а задаваемое напряжение Q – электрическим граничным условием на электроде возбуждителя [4].

Решение задачи

Рассмотрим динамический процесс установившийся во времени, т. е. зависимость от времени интересующих физических величин задается в виде $e^{i\omega t}$ (где ω – радиальная частота).

Представим перемещения w , u в виде рядов, разложив их по собственным формам колебаний оболочки:

$$\begin{aligned} w(\theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos n\theta e^{i\omega t}; \\ u(\theta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin n\theta e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (7)$$

где w_n , u_n – неизвестные коэффициенты разложений, которые необходимо определить.

Подставив выбранные разложения (7), с заменой в них индекса суммирования n на m , в первое выражение электрических граничных условий (6), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{i\omega t} \times \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \left(\sum_{m=1}^{\infty} m u_m \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} w_m \cos m\theta + \frac{1}{\varepsilon} E \right) d\theta = 0,$$

или

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin m\theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_m}{m} \sin m\theta_0 + \frac{\theta_0}{\varepsilon} E = 0. \quad (8)$$

Запишем второе слагаемое выражения (8) в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w_m}{m} \sin m\theta_0 = w_0 \theta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_m}{m} \sin m\theta_0.$$

Тогда выражение (8) примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin m\theta_0 + w_0 \theta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_m}{m} \sin m\theta_0 + \\ + \frac{\theta_0}{\varepsilon} E = 0. \end{aligned}$$

Решим это уравнение относительно E :

$$E = -\varepsilon \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} (w_m + m u_m) \right]. \quad (9)$$

Электрическую напряженность (9) для секции генератора, где $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} E = -\varepsilon \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} (w_m + m u_m) \right] \times \\ \times H(\theta_0 - |\theta|), \end{aligned} \quad (10)$$

где $H(\theta_0 - |\theta|)$ – функция Хевисайда, которая принимает значение единицы для области, где электроды разомкнуты ($-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$), и нулевые значения – для оставшейся части оболочки.

Поступая аналогичным образом для секции генератора, где $-\phi_0 \leq \theta \leq \phi_0$, представим элек-

трическую напряженность поля в виде

$$E = -\varepsilon \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\phi_0}{m\phi_0} (w_m + m u_m) \right] H(|\theta| - \phi_0), \quad (11)$$

а для той части преобразователя (возбудителя), к которой подводится электрическое напряжение $Q(t)$, с привлечением функции Хевисайда – в виде

$$E(t) = -\frac{Q(t)}{h} H[|\phi_0 - \theta_0| - |\phi_0 + \theta_0 - 2|\theta||]. \quad (12)$$

Объединяя выражения (10)–(12), электрическую напряженность поля в произвольной точке серединной поверхности преобразователя можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} E = -\varepsilon \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} (w_m + m u_m) \right] H(\theta_0 - |\theta|) - \\ - \varepsilon \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\phi_0}{m\phi_0} (w_m + m u_m) \right] H(|\theta| - \phi_0) - \\ - \frac{Q(t)}{h} H[|\phi_0 - \theta_0| - |\phi_0 + \theta_0 - 2|\theta||]. \end{aligned} \quad (13)$$

Представим напряженность E в виде ряда Фурье

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos n\theta e^{i\omega t}. \quad (14)$$

Тогда с учетом формулы (13), составляющие напряженности E_n определяются как

$$E_n = -\eta_n \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} (w_m + m u_m) - \xi_n \frac{Q}{h}, \quad (15)$$

где постоянные коэффициенты, входящие в уравнение (15), находятся по следующим формулам:

$$\eta_n = \begin{cases} \frac{\theta_0}{\pi}, & n = 0; \\ \frac{2 \sin n\theta_0}{n\pi}, & n > 0; \end{cases}$$

$$\lambda_{n,m} = \lambda_m + \frac{\beta_n}{\eta_n} \mu_m;$$

$$\xi_n = \begin{cases} \frac{\phi_0 - \theta_0}{\pi}, & n = 0; \\ \frac{2(\sin n\phi_0 - \sin n\theta_0)}{n\pi}, & n > 0; \end{cases}$$

$$\lambda_m = \begin{cases} \varepsilon, & m = 0; \\ \varepsilon \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0}, & m > 0; \end{cases}$$

$$\beta_n = \begin{cases} 1 - \frac{\phi_0}{\pi}, & n = 0; \\ -\frac{2\sin n\phi_0}{n\pi}, & n > 0; \end{cases}$$

$$\mu_m = \begin{cases} \varepsilon, & m = 0; \\ \varepsilon \frac{\sin m\phi_0}{m\phi_0}, & m > 0. \end{cases}$$

Укажем значения, которые принимает коэффициент $\lambda_{n,m}$ при различных параметрах n и m :

$$\lambda_{0,0} = \varepsilon \left(1 + \frac{\pi - \phi_0}{\theta_0}\right) \quad (m = 0, n = 0);$$

$$\lambda_{0,m} = \varepsilon \left[\frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} + \frac{\pi - \phi_0}{\theta_0} \frac{\sin m\phi_0}{m\phi_0} \right] \quad (m > 0, n = 0);$$

$$\lambda_{n,0} = \varepsilon \left(1 - \frac{\sin n\phi_0}{\sin n\theta_0}\right) \quad (m = 0, n > 0);$$

$$\lambda_{n,m} = \varepsilon \left[\frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} - \frac{\sin n\phi_0}{n\theta_0} \frac{\sin m\phi_0}{m\phi_0} \right] \quad (n > 0, m > 0).$$

Подставим выражения (7) и (14) в систему уравнений движения оболочки (3):

$$\begin{cases} (1 + \delta)n^2 u_n + n w_n + \delta n^3 w_n - \nu n E_n = \omega^2 u_n; \\ n u_n + \delta n^3 u_n + w_n + \delta n^4 w_n - \nu E_n = \omega^2 w_n. \end{cases} \quad (16)$$

Умножив второе уравнение системы (16) на n и вычтя из него первое, получим:

$$n[\delta n^2(n^2 - 1) - \omega^2]w_n + [\delta n^2(n^2 - 1) + \omega^2]u_n = 0.$$

Решение полученного уравнения относительно u_n имеет вид

$$u_n = \frac{n(\omega^2 - \chi_{n1})}{\omega^2 - \chi_{n1}} w_n, \quad (17)$$

где $\chi_{n1} = \delta n^2(n^2 - 1)$.

Подставляя выражение (17) в первое уравнение системы (16), с учетом выражения для составляющих напряженности E_n (15) получим:

$$\frac{\omega^4 - \chi_{n3}\omega^2 + \chi_{n4}}{\omega^2 + \chi_{n1}} w_n - \nu n \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} \frac{\chi_{m2}\omega^2 - \chi_{m4}}{\omega^2 + \chi_{m1}} w_m = \nu \xi_n \frac{Q}{h},$$

где $\chi_{n3} = (1 + \delta n^2)\chi_{n2}$; $\chi_{n2} = (1 + n^2)$; $\chi_{n4} = (n^2 - 1)\chi_{n1}$; $\chi_{m2} = (1 + m^2)$; $\chi_{m4} = (m^2 - 1)\chi_{m1}$; $\chi_{m1} = \delta m^2(m^2 - 1)$.

Обозначив

$$\Omega_n = \frac{\omega^4 - \chi_{n3}\omega^2 + \chi_{n4}}{\omega^2 + \chi_{n1}}$$

и

$$\Psi_m = \frac{\chi_{m2}\omega^2 - \chi_{m4}}{\omega^2 + \chi_{m1}},$$

выражение для отыскания w_n запишем следующим образом:

$$\Omega_n w_n - \nu n \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m} \Psi_m w_m = \nu \xi_n \frac{Q}{h} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (18)$$

Далее, по вычисленным значениям w_n , u_n (для этого привлекаются выражения (17), (18)), находятся амплитуды электрических напряжений G_1 , G_2 на электродах генераторов. Для этого необходимо воспользоваться первыми двумя слагаемыми в формуле (13), умножив их на h и на безразмерную (отнесенную к R) высоту L пьезотрансформатора:

$$G_1 = \varepsilon h L \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} (w_m + \mu u_m) \right],$$

$$G_2 = \varepsilon h L \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\phi_0}{m\phi_0} (w_m + \mu u_m) \right].$$

Нахождением амплитуд G_1 , G_2 напряжений на генераторных электродах пьезоэлектрического цилиндрического трансформатора заканчивается решение поставленной задачи.

Выводы

1. В работе выполнено математическое моделирование работы цилиндрического пьезокерамического трансформатора с двумя секциями генераторных электродов. Получены выражения, позволяющие рассчитать прогибы и тангенциальные смещения оболочки, электрическую напряженность керамики, а также электрическое напряжение, возникающее на генераторных электродах пьезотрансформатора.

2. При решении задачи использовались: линейная теория электроупругих оболочек, базирующаяся на гипотезах Кирхгофа-Лява; разложение искомых величин по собственным формам колебаний оболочки; разложение кусочно-непрерывных функций в ряды Фурье.

3. Анализ приведенных выражений позволяет сделать вывод о том, что решение поставленной задачи не удается разбить на ряд независимых решений для каждой из форм колебаний (формы колебаний «замешиваются»), что несколько усложняет выполнение расчетов,

особенно вычисление прогибов, которые находятся из системы алгебраических уравнений (18) с привлечением метода редукции.

Литература

1. *Шарапов В.М., Мусиенко М.П., Шарапова Е.В.* Пьезокерамические преобразователи физических величин. – Черкассы: ЧГТУ, 2005. – 631 с.
2. *Лавриненко В.В.* Пьезокерамические трансформаторы. – М.: «Энергия», 1975. – 112 с.
3. *Трофимов А.И.* Пьезокерамические преобразователи статических нагрузок. – М.: Машиностроение, 1979. – 95 с.
4. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. – К.: Наук. думка, 1989. – Т. 5: Электроупругость. – 280 с.
5. *Шульга Н.А., Болкисев А.М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
6. *Шульга Н.А., Карлаш В.Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка. – 2008. – 270 с.
7. *Морзун И.О.* Математическое моделирование работы цилиндрического пьезокерамического трансформатора // *Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии».* – 2010. – №2 (55). – С. 204–207.
8. *Дідковський В.С., Лейко О.Г., Савін В.Г.* Електроакустичні п'єзокерамічні перетворювачі (розрахунок, проектування, конструювання). – Кіровоград: «Імекс-ЛТД». – 2006. – 448 с.

¹ *Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»*

² *Черкасский государственный технологический университет*

Поступила в редакцию 12 февраля 2009 г.