# Теория сигналов и систем

УДК 538.56

О.В. Гармаш, А.И. Красильников, канд. физ.-мат. наук

## Основные свойства пуассоновской спектральной функции Леви линейных случайных процессов

**Сформулированы и доказаны основные свойства пуассоновской спектральной функции Леви, которые позволяют упростить нахождение законов распределения линейных случайных процессов и их линейных преобразований.**

**Basic properties of the Poisson Levy spectral function which enables to simplify the determination of the distribution laws of the linear random processes and their linear transformations are formulated and proved.**

### Введение

Вопросам исследования флуктуационных процессов посвящена не одна работа [1–5]. Это связано с тем, что к таким процессам относятся различные электронные шумы, биомедицинские и акустические шумовые сигналы, которые содержат в себе полезную информацию об исследуемых объектах.

Согласно [4, 5] универсальной моделью флуктуационных процессов является класс линейных случайных процессов (ЛСП)

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\,d\eta(\tau), \qquad (1)$$

где $h(t,\tau)$ – неслучайная действительная функция, которая называется ядром ЛСП (1) и удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} h^p(t,\tau)\,d\tau<\infty,\quad p=1,2$ для всех $t\in(-\infty;\infty)$; $\eta(\tau)$ – порождающий процесс, являющийся однородным процессом с независимыми приращениями.

Известно [6], что ЛСП имеют безграничный закон распределения, а следовательно найти в явном виде функцию распределения или плотность вероятностей можно только для ограниченного количества распределений [7, 8], поэтому возникает необходимость исследования других вероятностных характеристик данных процессов.

Одной из таких характеристик является характеристическая функция, которая для случайных процессов с безгранично делимым законом распределением может быть представлена одним из канонических представлений – Колмогорова, Леви и Леви-Хинчина [7, 8].

Представление характеристической функции в одной из канонических форм позволяет исследовать только параметры этих представлений, поскольку они однозначно определяют характеристическую функцию.

В работе [9] рассмотрены свойства пуассоновской спектральной функции Колмогорова $K_\xi(x,t)$, которая является основным параметром представления характеристической функции в форме Колмогорова.

Интерес представляют свойства пуассоновской спектральной функции Леви представления характеристической функции в форме Леви [8]

$$f_\xi(u,t)=\exp\left\{ium_\xi(t)-\frac{\sigma_\xi^2(t)u^2}{2}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iux}-1-\frac{iux}{1+x^2}\right)dL_\xi(x,t)\right\}, \qquad (2)$$

где $\left\{m_\xi(t),\sigma_\xi^2(t),L_\xi(x,t)\right\}$ – параметры характеристической функции представления (2).

Математическое ожидание $m_\xi(t)$ вычисляется по формуле

$$m_\xi(t)=m_\eta\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\,d\tau, \qquad (3)$$

где $m_\eta=M\{\eta(1)\}$.

Параметр $\sigma_\xi^2(t)$ является дисперсией ЛСП (1) и равен [4]:

$$\sigma_\xi^2(t)=\sigma_\eta^2\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t,\tau)\,d\tau, \qquad (4)$$

где $\sigma_\eta^2=D\{\eta(1)\}$.

Очевидно, что основную информацию о ЛСП (1) содержит параметр $L_\xi(x,t)$, который носит название пуассоновской спектральной функции Леви и определяется формулой [10]:

$$L_{\xi}(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} L_h(x,y,t)\,dL_{\eta}(y), \qquad (5)$$

где $L_{\eta}(y)$ – пуассоновская спектральная функция Леви порождающего процесса $\eta(t)$, а ядро преобразования $L_h(x,y,t)$ определяется из выражения

$$L_h(x,y,t)=\begin{cases} M_h(x,y,t)=\int_{-\infty}^{\infty} E\left[x-yh(t,\tau)\right]d\tau,\ x<0, \\ N_h(x,y,t)=-\int_{-\infty}^{\infty} E\left[yh(t,\tau)-x\right]d\tau,\ x>0. \end{cases} \qquad (6)$$

В данной работе рассмотрены основные свойства пуассоновской спектральной функции Леви (5) ЛСП (1), которые позволяют упростить в ряде случаев ее нахождение.

## Свойства пуассоновской спектральной функции

Пусть ядро процессов (1) зависит от разности аргументов, т.е.

$$h(t,\tau)=h(t-\tau).$$

В этом случае ЛСП (1) являются [4] стационарными в узком смысле , а пуассоновская спектральная функция (5) и ядро преобразования (6) не зависят от времени и будут равны соответственно

$$L_{\xi}(x,t)=L_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} L_h(x,y)\,dL_{\eta}(y), \qquad (7)$$

$$L_h(x,y,t)=L_h(x,y)=\begin{cases} M_h(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} E\left[x-yh(\tau)\right]d\tau,\ x<0, \\ N_h(x,y)=-\int_{-\infty}^{\infty} E\left[yh(\tau)-x\right]d\tau,\ x>0. \end{cases} \qquad (8)$$

Рассмотрим свойства пуассоновской спектральной функции Леви (7).

**Свойство 1.** Если порождающий процесс $\eta(t)$ является гауссовским, то ЛСП (1) также является гауссовским процессом, пуассоновская спектральная функция которого равна

$$L_{\xi}(x)\equiv 0. \qquad (9)$$

*Доказательство*. Известно [4], что пуассоновская спектральная функция гауссовского случайного процесса равна

$$L_{\eta}(x)\equiv 0. \qquad (10)$$

Непосредственной подстановкой (10) в выражение (7) убеждаемся в справедливости свойства 1.

**Свойство 2.** Если порождающий процесс $\eta(t)$ – простой процесс Пуассона с параметром $\lambda$, то пуассоновская спектральная функция Леви ЛСП (1) с точностью до постоянной $\lambda$ совпадает с ядром преобразования (8) при $y=1$, т.е.

$$L_{\xi}(x)=\lambda L_h(x,1)=\begin{cases} \lambda M_h(x,1)=\lambda\int_{-\infty}^{\infty} E\left[x-h(\tau)\right]d\tau,\ x<0, \\ \lambda N_h(x,1)=-\lambda\int_{-\infty}^{\infty} E\left[h(\tau)-x\right]d\tau,\ x>0. \end{cases} \qquad (11)$$

*Доказательство.* Пуассоновская спектральная функция Леви простого процесса Пуассона равна [4]:

$$L_{\eta}(y)=\begin{cases} 0, & y<0, \\ -\lambda E(1-y), & y>0. \end{cases} \qquad (12)$$

Подстановкой выражения (12) в формулу (7) получим выражение (11), что и следовало доказать.

**Свойство 3.** Сдвиг ядра ЛСП.

Два ЛСП $\xi_1(t), \xi_2(t)$ с ядрами $h_1(t)$ и $h_2(t)=h_1(t\pm t_0)$, соответственно, имеют одинаковые пуассоновские спектральные функции Леви, т.е.

$$L_{\xi_1}(x)=L_{\xi_2}(x). \qquad (13)$$

*Доказательство.* Подставляя ядро $h_2(t)=h_1(t\pm t_0)$ в формулу (8) и произведя замену $z=\tau\pm t_0$, получаем, что ядро преобразования $L_{h_2}(x,y)=L_{h_1}(x,y)$, из чего следует, что сдвиг ядра ЛСП не изменяет пуассоновскую спектральную функцию Леви, что подтверждает сформулированное свойство 3.

**Свойство 4.** Инверсия ядра ЛСП.

Два ЛСП $\xi_1(t), \xi_2(t)$ с ядрами $h_1(t)$ и $h_2(t)=-h_1(t)$ соответственно, имеют пуассоновские спектральные функции Леви вида

$$L_{\xi_1}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} L_{h_1}(x,y)\,dL_{\eta}(y), \qquad (14)$$

$$L_{\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} L_{h_1}(x,y)\,d\tilde{L}_{\eta}(y), \qquad (15)$$

где $\tilde{L}_{\eta}(y)$ – сопряженная к $L_{\eta}(y)$ пуассоновская спектральная функция Леви, равная

$$\tilde{L}_{\eta}(y)=\begin{cases} \tilde{M}_{\eta}(y)=-N_{\eta}(-y), & y<0, \\ \tilde{N}_{\eta}(y)=-M_{\eta}(-y), & y>0. \end{cases} \qquad (16)$$

*Доказательство*. Найдем ядро преобразования $L_{h_2}(x,y)$, подставляя ядро $h_2(t)=-h_1(t)$ в выражение (8):

1) $x<0$

$$M_{h_2}(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty} E\left[x-yh_2(\tau)\right]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[x+yh_1(\tau)\right]d\tau = M_{h_1}(x,-y), \qquad (17)$$

2) $x > 0$

$$N_{h_2}(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} E\left[yh_2(\tau) - x\right]d\tau =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} E\left[-yh_1(\tau) - x\right]d\tau = N_{h_1}(x,-y). \quad (18)$$

Таким образом ядро преобразования $L_{h_2}(x,y)$, с учетом (17) и (18), будет имеет вид

$$L_{h_2}(x,y) = L_{h_1}(x,-y). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (7), получим:

$$L_{\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{h_1}(x,-y)dL_\eta(y). \quad (20)$$

Введем замену $z = -y$ и получим

1) $x < 0$

$$M_{\xi_2}(x) = -\int_{-\infty}^{\infty} M_{h_1}(x,z)dM_\eta(-z) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} M_{h_1}(x,z)d\tilde{N}_\eta(z), \quad (21)$$

2) $x > 0$

$$N_{\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{h_1}(x,z)dN_\eta(-z) =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} N_{h_1}(x,z)d\tilde{M}_\eta(z). \quad (22)$$

Окончательно пуассоновская спектральная функция $L_{\xi_2}(x)$ равна

$$L_{\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{h_1}(x,y)d\tilde{L}_\eta(y),$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 5**. Изменение масштаба ядра ЛСП.

Пусть у ЛСП $\xi_1(t)$ с ядром $h_1(t)$ пуассоновская спектральная функция Леви $L_{\xi_1}(x)$ определена выражением (7), т.е.

$$L_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{h_1}(x,y)dL_\eta(y). \quad (23)$$

Тогда пуассоновская спектральная функция $L_{\xi_2}(x)$ ЛСП $\xi_2(t)$ с ядром $h_2(t) = ch_1(t)$, где постоянная $c \neq 0$, будет равна

$$L_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} L_{h_1}(x,z)dL_\eta\left(\dfrac{z}{c}\right), & c > 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} L_{h_1}(x,z)d\tilde{L}_\eta\left(\dfrac{z}{c}\right), & c < 0. \end{cases} \quad (24)$$

*Доказательство.* Рассмотрим случай когда $c > 0$. Найдем ядро преобразования $L_{h_2}(x,y)$, подставив ядро $h_2(t) = ch_1(t)$ в выражение (8):

1) $x < 0$

$$M_{h_2}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[x - yh_2(\tau)\right]d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\left[x - cyh_1(\tau)\right]d\tau = M_{h_1}(x,cy), \quad (25)$$

2) $x > 0$

$$N_{h_2}(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} E\left[yh_2(\tau) - x\right]d\tau =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} E\left[cyh_1(\tau) - x\right]d\tau = N_{h_1}(x,cy). \quad (26)$$

Выражения (25) и (26) подставим в (7) и получим

$$L_{\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{h_1}(x,cy)dL_\eta(y). \quad (27)$$

После замены $z = cy$ последнее выражение примет вид

$$L_{\xi_2}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L_{h_1}(x,z)dL_\eta\left(\frac{z}{c}\right), \quad (28)$$

что и требовалось доказать.

Случай, когда $c < 0$ доказывается аналогично с учетом свойства 4, поскольку константу $c$ можно представить в виде $c = -c_1$, $c_1 > 0$.

**Свойство 6.** Инверсия масштаба времени ядра ЛСП.

Два ЛСП $\xi_1(t), \xi_2(t)$ с ядрами $h_1(t)$ и $h_2(t) = h_1(-t)$, соответственно, имеют равные пуассоновские спектральные функции Леви, т.е.

$$L_{\xi_1}(x) = L_{\xi_2}(x). \quad (29)$$

*Доказательство.* Найдем ядро преобразования $L_{h_2}(x,y)$:

1) $x < 0$

$$M_{h_2}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[x - yh_2(\tau)\right]d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} E\left[x - yh_1(-\tau)\right]d\tau,$$

2) $x > 0$

$$N_{h_2}(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} E\left[yh_2(\tau) - x\right]d\tau =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} E\left[yh_1(-\tau) - x\right]d\tau.$$

В последних двух выражения введем замену $z = -\tau$ и получим:

1) $x<0$

$$M_{h_2}(x,y)=M_{h_1}(x,y), \tag{30}$$

2) $x>0$

$$N_{h_2}(x,y)=N_{h_1}(x,y). \tag{31}$$

На основании выражений (30) и (31) можно записать, что

$$L_{h_1}(x,y)=L_{h_2}(x,y). \tag{32}$$

Очевидно, что равенство ядер пуассоновских спектральных функций приводит к равенству самих пуассоновских спектральных функций, что доказывает справедливость свойства 6.

**Свойство 7.** Усечение ядра ЛСП.

Пусть ЛСП $\xi_1(t)$ с ядром $h_1(t)$ имеет пуассоновскую спектральную функцию Леви $L_{\xi_1}(x)$. Тогда пуассоновская спектральная функция ЛСП $\xi_2(t)$ с ядром

$$h_2(t)=h_1(t)E(t-t_1)E(t_2-t),\ 0\le t_1<t_2, \tag{33}$$

будет равна

$$L_{\xi_2}(x)=L_{\xi_1}(x)-L_{t_1}(x)-L_{t_2}(x), \tag{34}$$

где

$$L_{t_j}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}L_j(x,y)dL_\eta(y),\quad j=1,2, \tag{35}$$

$$L_1(x,y)=\begin{cases}M_1(x,y)=\int_{-\infty}^{t_1}E\left[x-yh_1(\tau)\right]d\tau,\ x<0,\\ N_1(x,y)=-\int_{-\infty}^{t_1}E\left[yh_1(\tau)-x\right]d\tau,\ x>0,\end{cases} \tag{36}$$

$$L_2(x,y)=\begin{cases}M_2(x,y)=\int_{t_2}^{\infty}E\left[x-yh_1(\tau)\right]d\tau,\ x<0,\\ N_2(x,y)=-\int_{t_2}^{\infty}E\left[yh_1(\tau)-x\right]d\tau,\ x>0.\end{cases} \tag{37}$$

*Доказательство.* Найдем ядро преобразования Леви $L_{h_2}(x,y)$, подставив выражение (33) в (8):

1) $x<0$

$$\begin{aligned}M_{h_2}(x,y)&=\int_{-\infty}^{\infty}E\left[x-yh_2(\tau)\right]d\tau=\\ &=\int_{t_2}^{t_1}E\left[x-yh_1(\tau)\right]d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}E\left[x-yh_1(\tau)\right]d\tau-\\ &-\int_{-\infty}^{t_1}E\left[x-yh_1(\tau)\right]d\tau-\int_{t_2}^{\infty}E\left[x-yh_1(\tau)\right]d\tau=\\ &=M_{h_1}(x,y)-M_1(x,y)-M_2(x,y),\end{aligned} \tag{38}$$

2) $x>0$

$$\begin{aligned}N_{h_2}(x,y)&=-\int_{-\infty}^{\infty}E\left[yh_2(\tau)-x\right]d\tau=\\ &=-\int_{t_2}^{t_1}E\left[yh_1(\tau)-x\right]d\tau=\\ &=-\int_{-\infty}^{\infty}E\left[yh_1(\tau)-x\right]d\tau+\int_{-\infty}^{t_1}E\left[yh_1(\tau)-x\right]d\tau+\\ &+\int_{t_2}^{\infty}E\left[yh_1(\tau)-x\right]d\tau=\\ &=N_{h_1}(x,y)-N_1(x,y)-N_2(x,y).\end{aligned} \tag{39}$$

Из полученных выражений (38) и (39) следует, что ядро преобразования $L_{h_2}(x,y)$ равно:

$$L_{h_2}(x,y)=L_{h_1}(x,y)-L_1(x,y)-L_2(x,y). \tag{40}$$

Подставляя формулу (40) в (7), получаем выражение (33), что и следовало доказать.

**Свойство 8**. Аддитивность пуассоновской спектральной функции Леви ЛСП.

Пусть ядро $h(t)$ ЛСП (1) может быть представлено в виде

$$h(t)=\sum_{j=1}^{n}h_j(t), \tag{41}$$

где $h_j(t)$ – финитные функции, заданные на интервалах $\Delta t_j=t_j-t_{j-1},\ j=\overline{1,n}$, причем $t_0<t_1<...<t_n$.

Тогда пуассоновская спектральная функция Леви $L_\xi(x)$ будет равна

$$L_\xi(x)=\sum_{j=1}^{n}L_j(x), \tag{42}$$

где $L_j(x)$ определена выражением

$$L_j(x)=\int_{-\infty}^{\infty}L_{h_j}(x,y)dL_\eta(y), \tag{43}$$

а ядра преобразований $L_{h_j}(x,y)$ равны

$$L_{h_j}(x,y)=\begin{cases}\int_{\Delta t_j}E\left[x-yh_j(\tau)\right]d\tau,\ x<0,\\ -\int_{\Delta t_j}E\left[yh_j(\tau)-x\right]d\tau,\ x>0.\end{cases} \tag{44}$$

*Доказательство.* Найдем ядро преобразования $L_h(x,y)$, для чего подставим (41) в формулу (8)

$$L_h(x,y)=\begin{cases}M_h(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}E\left[x-y\sum_{j=1}^{n}h_j(\tau)\right]d\tau,\ x<0,\\ N_h(x,y)=-\int_{-\infty}^{\infty}E\left[y\sum_{j=1}^{n}h_j(\tau)-x\right]d\tau,\ x>0.\end{cases} \tag{45}$$

С учетом свойств ядер $h_j(t)$, последнее выражение примет вид

$$L_h(x,y)=\sum_{j=1}^{n} L_{h_j}(x,y), \qquad (46)$$

где функция $L_{h_j}(x,y)$ определена формулой (44). Подставляя (46) в выражение (7), убеждаемся в справедливости формулы (42).

**Выводы**

Сформулированные и доказанные основные свойства пуассоновской спектральной функции Леви позволяют упростить нахождение законов распределения стационарных в узком смысле линейных случайных процессов и их линейных преобразований.

**Литература**


1. *Бунимович* В.И. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. – М.: Сов. радио, 1951. – 360с.
2. *Райс* С. Теория флуктуационных шумов: Сокр. пер. с англ. / В кн.: Теория передачи электрических сигналов при наличии помех.– М.: ИЛ, 1952. – С.88–238.
3. *Стратонович* Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1961. – 558 с.
4. *Марченко* Б.Г. Метод стохастических интегральных представлений и его приложения в радиотехнике. – К.: Наук. думка, 1973.– 192 с.
5. *Горовецкая* Т.А., Красильников А.И., Чан Хыу Дат. Модели и законы распределения флуктуационных сигналов // Электроника и связь. – 2000 – № 9. – С. 5–14.
6. *Красильников* А.И. Исследование импульсных гидроакустических сигналов методом характеристических функций: Дис.– канд. физ.– мат. наук: 01.04.06. – К., 1982. – 171с.
7. *Золоторев* В.М. Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416с.
8. *Лукач* Е. Характеристические функции: Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 424с.
9. *Красильников* А.И. Некоторые свойства пуассоновской спектральной функции Колмогорова линейных случайных процессов //Электроника и связь.– 2005.– № 26.– С. 17–22.
10. *Красильников* А.И. Представление одномерной характеристической функции линейных случайных процессов в форме Леви // Электроника и связь. – 2001. – № 13 – С. 128–130.