УДК 621.326

О.А. Витязь, канд. техн. наук

Параметрическая идентификация регулярности системы

Для анализа свойств сложных систем, образованных соединением более простых подсистем, удобно использовать параметры и системные функции последних. Примером может служить анализ системы с обратной связью. Такой подход предполагает, что свойство регулярности более простых систем не теряется в результате их соединения, что имеет место далеко не всегда. В работе выведены алгебраические соотношения, позволяющие установить регулярность соединения по параметрам подсистем.

Analysis of complicated systems can be executed using subsystem parameters and functions. The feedback systems can be taken as an example. Such approach is valid only if the regularity property of subsystems is not violated after their connection that is not always a case. At the paper the algebraic criteria of the system regularity are developed and the regularity property can be identified on the base of the subsystem parameters.

Введение

Проектирование сложных структур на основе иерархического системного подхода предоставляет возможность упростить процедуры анализа и синтеза, так как они могут применяться не для сложной структуры в целом, а отдельно для каждой ее части. Описание функциональных свойств сложной структуры при таком подходе можно получить на основе функциональных характеристик «вход-выход» ее частей. Такие характеристики называются системными функциями, а понятие “система” можно применить как к сложной структуре (суперсистеме), так и к ее составным частям (подсистемам).

В теории электронных цепей простейшая система представляет собой четырехполюсник с двумя сторонами (см. рис.1). В дальнейшем будут рассматриваться неавтономные четырехполюсники (т.е., не содержащие независимых источников [1]). Такие четырехполюсники характеризуются девятью параметрами (в общем случае – функциями комплексной частоты), играющими роль коэффициентов в его линеаризованных уравнениях, связывающих символические изображения полюсных токов и напряжений:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \dot{U}_3 \end{bmatrix} \text{ или } \dot{I} = G\dot{U}. \quad (1)$$

В то же время, линеаризованные уравнения системы с двумя сторонами содержат четыре параметра. Это кажущееся противоречие исчезает в том случае, когда к четырехполюснику подключены два двухполюсника (например, на вход – источник, на выход – нагрузка). Тогда полюсные токи каждой из сторон попарно равны с точностью до знака, что соответствует выполнению условия регулярности соединения и приводит к упрощению уравнений (1) [2].

При синтезе системы путем соединения четырехполюсников условие регулярности может нарушиться, вследствие чего параметры подсистемы и характеристики «вход-выход» станут непригодными для определения функциональных свойств системы в целом. При декомпозиции системы на подсистемы с целью анализа ее свойств по частям необходимо убедиться в том, что соединение в исходной структуре было регулярным. В работе выводятся соотношения, позволяющие идентифицировать регулярность соединения подсистем в различных структурах и, следовательно, использовать все возможности общей теории четырехполюсника для анализа и синтеза сложных структур [2].

Параметрические условия регулярности соединений

Систему с двумя сторонами можно образовать, соединив между собой определенным образом полюсы двух четырехполюсников. Существует пять структурных схем такого соединения, из которых каскадное всегда является регулярным и рассматриваться не будет. Остальные структурные схемы приведены на рис. 2 и должны исследоваться на предмет регулярности.

Условие регулярности для каждой из четырех структурных схем имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= -\dot{I}_3; \\ \dot{I}_2 &= -\dot{I}_4. \end{aligned} \quad (2)$$

Для проверки выполнения условия регулярности можно воспользоваться матрицей проводимости всего соединения, которая формируется

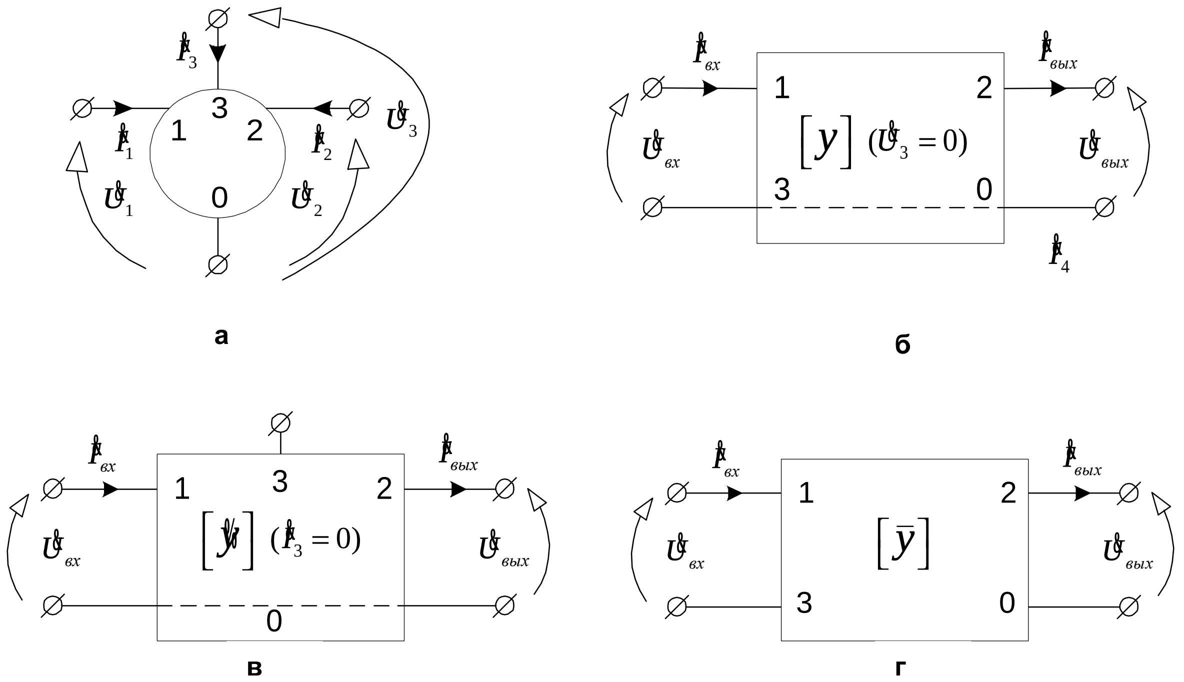

Рис. 1. Четырехполюсник: а) обозначение полюсов, полюсных токов и напряжений; б) система с короткозамкнутой стороной; в) система с изолированным полюсом; г) общий случай системы с двумя сторонами

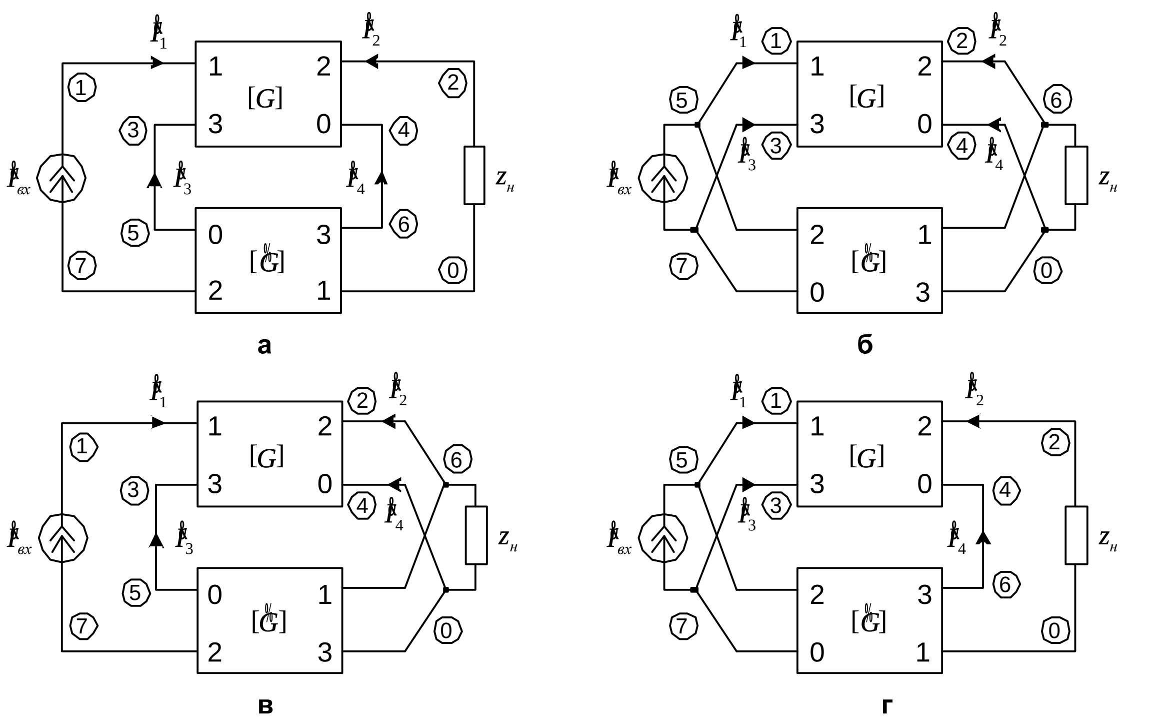

Рис. 2. Структурные схемы соединения систем, образующих четырехполюсник с двумя сторонами: а) последовательное; б) параллельное; в) последовательно–параллельное; г) параллельно–последовательное

из g-параметров подсистем по правилу учета многополюсного компонента в узловой модели и имеет блочный вид при указанном на рис. 2 обозначении узлов:

$$Y = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

где $Y[7 \times 7]$ – матрица проводимости всего соединения, $G_p[4 \times 4]$ – расширенная матрица g-параметров верхнего четырехполюсника [3], $B[3 \times 3]$ – матрица, составленная из элементов расширенной матрицы g - параметров нижнего четырехполюсника (эти параметры ниже будут обозначаться символом с тильдой).

<u>Последовательное соединение</u>. При последовательном соединении (рис.2а) матрица B состоит из следующих элементов расширенной матрицы $\tilde{g}$-параметров нижнего четырехполюсника:

$$B = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{44} & \tilde{g}_{43} & \tilde{g}_{42} \\ \tilde{g}_{34} & \tilde{g}_{33} & \tilde{g}_{32} \\ \tilde{g}_{24} & \tilde{g}_{23} & \tilde{g}_{22} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Каждый из токов $\dot{I}_2, \dot{I}_3, \dot{I}_4$ можно рассматривать как ток нагрузки одной из трех систем с двумя сторонами и выразить его через ток источника $\dot{I}_{вх}$ и коэффициент передачи тока соответствующей системы, определив последний через матрицу проводимости Y по известной формуле [4]:

$$K_I = \frac{\dot{I}_{вых}}{\dot{I}_{вх}} = \frac{g_н \Delta_{\alpha\beta}}{\Delta + g_н \Delta_{\beta\beta}}, \qquad (5)$$

где Δ – определитель матрицы проводимости Y, Δ_{ab}, Δ_{bb} – алгебраические дополнения, индексы которых соответствуют входным узлам (a) и выходным узлам (b) системы, ток нагрузки которой необходимо определить. Следует отметить, что токи $\dot{I}_3, \dot{I}_4$ протекают по короткозамкнутым дугам, что упрощает формулу (5), так как в этом случае адмитанс нагрузки $g_н = 1/z_н = \infty$. Помимо этого необходимо дополнительно модифицировать формулу (5), добавив пары суммирующихся индексов, соответствующих короткозамкнутым дугам, не являющимся нагрузкой соответствующей системы [5]. Выразив искомые токи через входной ток структуры $I_{вх}$ по формуле

$$\dot{I}_k = K_{Ik} \dot{I}_{вх}, \; k = \overline{2,4} \qquad (6)$$

и подставив их в формулу (2), получим пару условий регулярности параллельного соединения систем, выраженных через параметры четырехполюсников:

$$\Delta_{(1+7)(3+5),(4+6)(4+6)} = \Delta_{(3+5)(3+5),(4+6)(4+6)};$$
$$\frac{\Delta_{(1+7)(4+6),(3+5)(3+5)}}{\Delta_{(3+5)(3+5),(4+6)(4+6)}} = \qquad (7)$$
$$\frac{g_н \tilde{\Delta}_{(1+7)2,(3+5)(3+5),(4+6)(4+6)}}{\tilde{\Delta}_{(3+5)(3+5),(4+6)(4+6)} + g_н \tilde{\Delta}_{22,(3+5)(3+5),(4+6)(4+6)}}$$

которую после определения соответствующих суммарных кратных алгебраических дополнений можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} A_{11} + A_{12} g_н &= 0; \\ A_{21} + A_{22} g_н + A_{23} g_н^2 &= 0, \end{aligned} \qquad (8)$$

где A_{ij} – это суперпозиция миноров различного порядка матрицы проводимости Y. Соотношения, явно выражающие A_{ij} через параметры четырехполюсников, не приводятся из-за их громоздкости.

Следует отметить одну особенность, которую необходимо учитывать при выводе условий регулярности: адмитанс нагрузки $g_н$ должен включаться в матрицу проводимости Y при определении токов $\dot{I}_3, \dot{I}_4$ и исключаться из нее при определении тока $\dot{I}_2$. Алгебраические дополнения, найденные при исключенном адмитансе $g_н$, помечены значком тильда (см. (7)).

<u>Другие соединения</u>. Методика определения условий регулярности других видов соединения, приведенных на рис. 2, аналогична рассмотренной выше. При выводе условий для каждого из видов соединений в матрицу проводимости (3) необходимо включить соответствующую ему матрицу B. Элементы матрицы B и условия регулярности всех соединений приведены в таблицах 1, 2.

Следует отметить, что условия регулярности можно использовать и для решения обратной задачи параметрического синтеза регулярных систем.

Связь параметров системы с параметрами четырехполюсника

На рис. 1 приведены разные структурные варианты представления четырехполюсника в виде системы с двумя сторонами. Они не включают варианты, возникающие при изменении номеров полюсов. Переход от девяти параметров четырехполюсника к четырем параметрам

Таблица 1. Матрица B для различных соединений

Последов.	Параллел.	Посл. - пар.	Пар. - посл.
$\begin{bmatrix} \tilde{g}_{44} & \tilde{g}_{43} & \tilde{g}_{42} \\ \tilde{g}_{34} & \tilde{g}_{33} & \tilde{g}_{32} \\ \tilde{g}_{24} & \tilde{g}_{23} & \tilde{g}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \tilde{g}_{22} & \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{24} \\ \tilde{g}_{12} & \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{14} \\ \tilde{g}_{42} & \tilde{g}_{41} & \tilde{g}_{44} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \tilde{g}_{44} & \tilde{g}_{41} & \tilde{g}_{42} \\ \tilde{g}_{14} & \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{24} & \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \tilde{g}_{22} & \tilde{g}_{23} & \tilde{g}_{24} \\ \tilde{g}_{32} & \tilde{g}_{33} & \tilde{g}_{34} \\ \tilde{g}_{42} & \tilde{g}_{43} & \tilde{g}_{44} \end{bmatrix}$

*g -параметры, в обозначении которых есть индекс 4, являются элементами расширенной матрицы g - параметров четырехполюсника

Таблица 2. Условия регулярности соединений

Последовательное

$$\Delta_{(1+7)(3+5),(4+6)(4+6)} - \Delta_{(3+5)(3+5),(4+6)(4+6)} = A_{11} + A_{12} g_н = 0;$$

$$\frac{\Delta_{(1+7)(4+6),(3+5)(3+5)}}{\Delta_{(3+5)(3+5),(4+6)(4+6)}} - \frac{g_н \tilde{\Delta}_{(1+7)2,(3+5)(3+5),(4+6)(4+6)}}{\tilde{\Delta}_{(3+5)(3+5),(4+6)(4+6)} + g_н \tilde{\Delta}_{22,(3+5)(3+5),(4+6)(4+6)}} = A_{21} + A_{22} g_н + A_{23} g_н^2 = 0.$$

Параллельное

$$\Delta_{(5+7)(2+6),(2+6)(2+6),(3+7)(3+7),44} - \Delta_{(5+7)(3+7),(2+6)(2+6),(5+1)(5+1),44} = A_{31} + A_{32} g_н = 0;$$

$$\Delta_{(5+7)(2+6),(1+5)(1+5),(3+7)(3+7),44} - \Delta_{(5+7)4,(1+5)(1+5),(3+7)(3+7),(2+6)(2+6)} = A_{41} + A_{42} g_н = 0.$$

Последовательно-параллельное

$$\Delta_{(1+7)(3+5),(2+6)(2+6),44} - \Delta_{(3+5)(3+5),(2+6)(2+6),44} = A_{51} + A_{52} g_н = 0;$$

$$\Delta_{(1+7)(2+6),(3+5)(3+5),44} - \Delta_{(1+7)4,(3+5)(3+5),(2+6)(2+6)} = A_{61} + A_{62} g_н = 0.$$

Параллельно-последовательное

$$\Delta_{(5+7)(5+1),(3+7)(3+7),(4+6)(4+6)} - \Delta_{(5+7)(3+7),(1+5)(1+5),(4+6)(4+6)} = A_{71} + A_{72} g_н = 0;$$

$$\frac{\Delta_{(5+7)(6+4),(1+5)(1+5),(3+7)(3+7)}}{\Delta_{(4+6)(4+6),(1+5)(1+5),(3+7)(3+7)}} - \frac{g_н \tilde{\Delta}_{(5+7)2,(1+5)(1+5),(3+7)(3+7),(4+6)(4+6)},}{\tilde{\Delta}_{(1+5)(1+5),(3+7)(3+7),(4+6)(4+6)} + g_н \tilde{\Delta}_{22,(1+5)(1+5),(3+7)(3+7),(4+6)(4+6)}} =$$

$$= A_{81} + A_{82} g_н + A_{83} g_н^2 = 0.$$

Таблица 3. Параметры системы с двумя сторонами, выраженные через параметры четырехполюсника

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_{11} & \tilde{y}_{12} \\ \tilde{y}_{21} & \tilde{y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ -g_{21} & -g_{22} \end{bmatrix} + \frac{1}{g_{33}} \begin{bmatrix} -g_{13} g_{31} & -g_{13} g_{32} \\ g_{23} g_{31} & g_{23} g_{32} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_{11} & \bar{y}_{12} \\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} g_{11} g_{33} - g_{13} g_{31} & g_{12}(g_{31} + g_{33}) - g_{32}(g_{13} + g_{11}) \\ g_{21}(g_{13} + g_{33}) - g_{23}(g_{11} + g_{31}) & (g_{12} + g_{32})(g_{23} + g_{21}) - c g_{22} \end{bmatrix}$$

$$c = g_{11} + g_{33} + g_{13} + g_{31}.$$

системы наиболее просто выполняется для системы с короткозамкнутой стороной, которая получается замыканием некоторой пары полюсов исходного четырехполюсника (в приведенном варианте – полюсов 3 и 0). В этом случае четыре параметра системы (y -параметры) равны с точностью до знака соответствующим g -параметрам четырехполюсника [2].

Система с короткозамкнутой стороной на самом деле является трехполюсником. Проверив выполнение условий регулярности для соединений систем с короткозамкнутой стороной, можно показать, что все приведенные на рис. 2 структуры являются регулярными при любых значения параметров образующих их систем, что совпадает с известными результатами [1] .

Для оставшихся двух вариантов параметры системы с двумя сторонами можно выразить через параметры четырехполюсника, используя уравнения (1) и соотношения $\tilde{I}_3 = 0$ или $\tilde{I}_1 = -\tilde{I}_3$ (см. рис. 1в и 1г соответственно). Полученные формулы приведены в таблице 3. Параметры системы используются в дальнейшем для определения ее характеристик «вход-выход» и других характеристик.

Выводы

Получены аналитические соотношения, позволяющие идентифицировать регулярность соединений четырехполюсников по их g - параметрам. Используя взаимосвязь параметров четырехполюсника [2], можно выразить условия регулярности соединений и через другие системы параметров.

Полученные результаты позволяют сформулировать следующую теорему: соединения четырехполюсников являются регулярными, если их g -параметры удовлетворяют соотношениям, приведенным в таблице 2.

Литература

1. *Зелях Э. В.* Основы общей теории линейных электрических схем. – М.: Изд–во АН СССР, 1951. – 336 с.
2. *Сигорский В.П.* Общая теория четырехполюсника. – К.: Издательство АН Украинской ССР, 1955. – 315 с.
3. *Сигорский В.П.* Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами.– К.: Издательство АН Украинской ССР, 1958.– 402 с.
4. *Сигорский В.П.,* Петренко А.И. Основы теории электронных схем. –К.: «Техніка», 1967.–610 с.
5. *Сигорский В.П.*, Витязь О.А., Минаков В.В. – Алгоритмы моделирования резистивных цепей. – Киев: УМК ВО, 1988. – 114 с.