

УДК 534.121.1:534.232.082.74

Т.А. Бибииков, А.В. Богдан, О.Н. Петрищев, д-р техн. наук, Ю.И. Якименко, д-р техн. наук, Ю.Ю. Яновская

Принципы построения математических моделей микроэлектромеханических резонаторов балочного типа

Сформулировано определение математической модели МЭМС – резонатора балочного типа. Изложены принципы моделирования физического состояния элементов МЭМС. Описана цепочка вычислительных процедур, опирающихся на фундаментальные положения механики и теории электрических явлений, последовательное выполнение которых позволяет построить математическую модель резонатора. Показано, что частотно-зависимые свойства МЭМС – резонатора полностью определяются механическими смещениями материальных частиц поляризованного сегнетоэлектрика подвижной части стержня. Приведена методика расчета продольного компонента вектора смещения подвижной части МЭМС – резонатора, которая учитывает реакцию опор стержня.

In this paper the mathematical model of the bar MEMS resonator is given. The details are also described in physical state of the MEMS resonator, calculation procedures based on the mechanical and electrical theories are given. It is shown that the frequency dependence of MEMS resonator characteristics is defined by the polarized ferroelectric material of the moving bar part particles displacement. Calculation methods for longitudinal component of the displacement vector of the MEMS bar resonator moving part is described including bar support foot responses.

Введение

Современные технологии позволяют создавать микроструктуры, которые объединяют в себе свойства и качества электронных схем и механических колебательных систем. Подобные устройства принято называть микроэлектромеханическими системами (МЭМС) [1]. В одном корпусе (чипе) могут быть размещены десятки однотипных модулей. Под модулем понимается совокупность микроминиатюрной механической колебательной системы и обеспечивающей её работу электронной схемы. Последовательное соединение нескольких модулей с довольно ординарными индивидуальными характеристиками позволяет создавать устройства с уникальными параметрами. Сказанное можно проиллюстрировать следующим примером.

Предположим, что имеется простейший делитель электрического напряжения, в верхнее плечо которого включен резистор R , а в нижнее – МЭМС - резонатор, электрический импеданс которого Z определяется характеристическим сопротивлением $R_0 = 5$ Ом и добротностью $Q = 100$. Если принять значение $R = 1000$ Ом, то коэффициент деления одиночного делителя изменяется так, как это показано на рис. 1,б штрих пунктирной кривой, выделенной символом R/Z . По оси абсцисс на рис. 1,б откладывается безразмерная частота или расстройка f/f_0 . Отчетливо видно, что одиночный делитель обеспечивает подавление сигнала вне полосы пропускания не более чем на 30 дБ. Последовательное соединение по лестничной схеме (рис. 1,а) всего лишь пяти подобных делителей обеспечивает подавление сигнала вне полосы пропускания не менее 120 дБ. Кривые, отмеченные на рис. 1,б символами $R/R_0=2$ и $R/R_0=20$, показывают, что при фиксированных параметрах МЭМС – резонатора, результат работы лестничной схемы в значительной мере зависит от выбора величины резистора R . Затухание сигнала на резонансной частоте можно компенсировать с помощью корректирующих усилителей, которые включаются между звеньями лестничной схемы.

Рассмотренный пример убедительно демонстрирует возможности создания с помощью микросистемных технологий в малых объемах (в объеме одного корпуса микросхемы) устройств с уникальными характеристиками и параметрами. Тут же надо отметить, что микросистемные технологии, которые на одной кремниевой пластине позволяют создавать планарные электронные схемы и объемные механические структуры, являются достаточно дорогостоящими процессами. Запуск технологического процесса изготовления того или иного МЭМС предполагает использование дорогостоящих расходных материалов и сопровождается амортизацией дорогого технологического оборудования. По этой причине запуск технологического процесса предваряется математическим моделированием МЭМС, целью и результатом которого является качественный и количественный прогноз зависимости характеристик и параметров устройства от значений геометрических и физико-механических параметров элементов

микроструктуры. Очевидно, что степень адекватности математического моделирования реальной ситуации напрямую связана с минимизацией потерь времени и ресурсов в период наладки производства новых моделей МЭМС.

Несмотря на то, что аббревиатура МЭМС (MEMS) известная уже более 20 лет, и практическое использование некоторых типов МЭМС составляет объемы в десятки миллионов экземпляров в год [1], в открытой печати отсутствуют сведения о достоверных и надежных методах расчета их основных технических характеристик. Речь идет, естественно, о механическом компоненте МЭМС. Описание динамического напряженно-деформированного состояния механической колебательной подсистемы МЭМС с помощью метода эквивалентных схем (см., например, статьи [2, 3, 4]; можно составить чрезвычайно объемный перечень публикаций подобного толка) не выдерживает никакой критики. Дело в том, что сама структура эквивалентной схемы деформируемого упругого элемента и числовые значения эквивалентных емкостей, индуктивностей и резисторов определяются после обработки результатов решения соответствующей граничной задачи теории упругости, т. е. после аналитического описания и исследования напряженно-деформированного состояния колеблющегося элемента МЭМС. О таком порядке конструирования эквивалентных схем деформируемых твердых тел с пьезоэлектрическими свойствами ясно и четко писал Вальтер Георг Кэди – автор эквивалентной схемы кварцевого резонатора (1922 год) в цепи стабилизации частоты генерации генератора несущей частоты – в монографии [5], которая и по сей день остается непревзойденной по глубине и обстоятельности изложения материала. После прочтения главы этой монографии, которая называется «Электрическая эквивалентная схема пьезорезонатора» становится очевидным, что эквивалентные схемы разработаны механиками для радиоинженеров, чтобы те могли использовать стандартные методы расчета электрических цепей при проектировании генераторов радиочастот с кварцевым стабилизатором частоты генерации. Повсеместное извращенное применение эквивалентных схем для описания динамического механического состояния пьезоэлектрических элементов не поддается какому либо внятному логическому объяснению.

Таким образом, разработка принципов и методов расчета характеристик и параметров механического компонента МЭМС остается и в настоящее время актуальной и практически значимой проблемой.

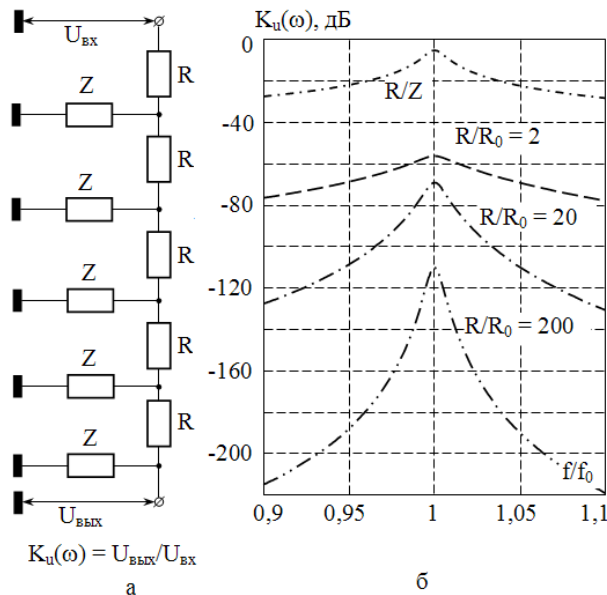


Рис. 1. Лестничная схема включения (а) одинаковых делителей напряжения и частотные характеристики лестничного фильтра (б)

Это обстоятельство определяет актуальность, научное и прикладное значение настоящей статьи, в которой впервые предлагается последовательность вычислительных процедур, которая не противоречит основным принципам механики и электродинамики сред с усложненными (пьезоэлектрическими) свойствами, реализация которой позволяет построить в достаточной мере адекватную реальному объекту математическую модель МЭМС - резонатора балочного типа.

Общая схема построения математической модели МЭМС - резонатора

На рис. 2 схематически изображен МЭМС – резонатор балочного типа с минимальным набором обеспечивающих его работу электронных компонентов.

Механический компонент МЭМС – резонатора представляет собою стержень (позиция 1 на рис. 2) изготовленный из сегнетоэлектрического материала, который крепится через два электродированных в нижней части основания к подложке из поликристаллического кремния (позиция 2). Электроды в нижней части оснований показаны на рис. 2 позициями 3 и 5. Толщина и ширина сегнетоэлектрического стержня (символы *h* и *b* соответственно) существенно меньше длины. На электрод 3 через резистор *R*₀, сопротивление которого имеет величину порядка единиц мегаом, подается постоянная во времени разность электрических потенциа-

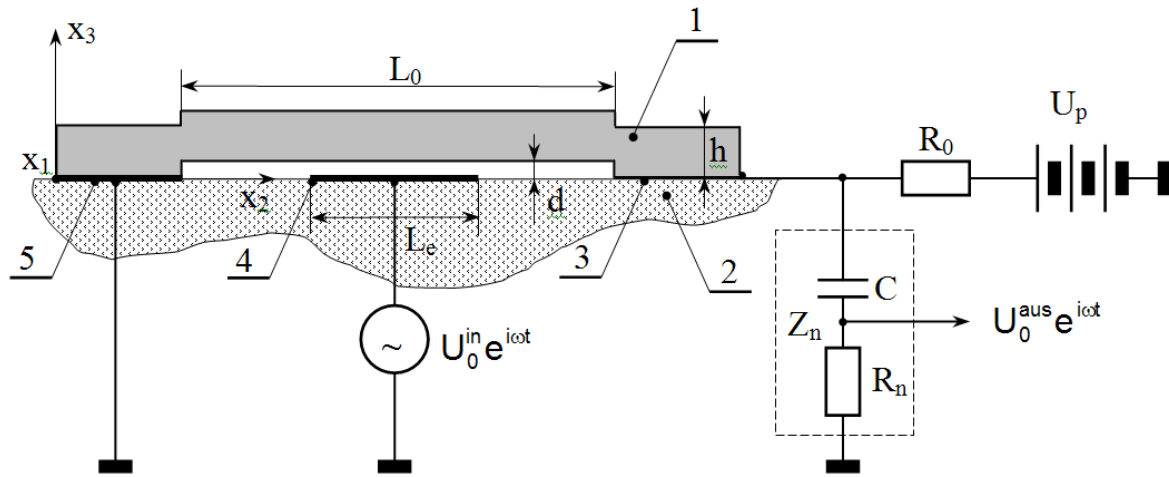


Рис. 2. МЭМС - резонатор балочного типа

лов U_p порядка $(10 \div 20) В$. При длине L_0 подвижной части стержня от 20 до 30 микрометров в центральной части балки создается постоянное электрическое поле с напряженностью $(0,3 \div 0,4) МВ/м$. Это постоянное электрическое поле поляризует сегнетоэлектрик таким образом, что он приобретает свойства пьезоэлектрика.

На центральный электрод (позиция 4 на рис. 2), шириной L_e , подается гармонически изменяющаяся во времени разность электрических потенциалов с амплитудой $U_0^{in} \leq 10 мВ$. Так как расстояние $d \ll h$ между нижней частью стержня и центральным электродом не превышает 100 нанометров, то возникает весьма значительное по напряженности переменное электрическое поле, которое проникает в объем стержня. Система электродов 3, 4 и 5 и выделенный серой заливкой на рис. 2 стержень из диэлектрика образуют электрический конденсатор. По этому при подаче на центральный электрод 4 переменной разности потенциалов на правом электроде 3 возникает изменяющийся во времени электрический заряд. Вместе с этим переменное электрическое поле индуцирует в объеме сегнетоэлектрика изменяющиеся во времени по гармоническому закону силы Кулона, которые возбуждают в этом объеме упругие колебания. Упругие колебания существуют за счет энергии источника постоянного электрического поля и энергии источника переменного электрического поля. При определенных обстоятельствах упругие колебания материальных частиц подвижной части МЭМС – резонатора могут значительно увеличиваться по амплитуде за счет энергии источника постоянного электрического поля. Так как деформирование пьезоэлектрика сопровождается изменением его электрической поляризации, то электриче-

ский заряд на электроде 3 на различных частотах может принимать существенно различные значения. На частоте резонансного потребления энергии источника постоянного электрического поля амплитуда электрического заряда на электроде 3 достигает максимального значения. При этом, естественно, становится максимальной амплитуда переменного электрического тока, который протекает через нагрузочный модуль Z_n и на резисторе R_n формируется максимальная амплитуда выходного электрического напряжения $U_0^{aus} e^{i\omega t}$.

Обозначим амплитуду гармонически изменяющегося во времени электрического заряда на электроде 3 символом Q_0 . Тогда амплитудное значение тока через нагрузочный модуль Z_n определяется следующим образом: $I_0 = i\omega Q_0$. Очевидно, что амплитуда выходного электрического сигнала МЭМС – резонатора $U_0^{aus} = i\omega Q_0 R$. Из предыдущих рассуждений следует, что $Q_0 = U_0^{in} \Xi(\omega, \vec{E}^0, P)$, где $\Xi(\omega, \vec{E}^0, P)$ – аналитическая конструкция, зависящая от частоты ω , напряженности постоянного электрического поля \vec{E}^0 , которое создается в объеме сегнетоэлектрического стержня источником постоянного электрического напряжения U_p и набора геометрических и физико-механических параметров МЭМС – резонатора; этот набор в перечне аргументов обозначен символом P . Очевидно, что коэффициент передачи с электрического входа МЭМС – резонатора на его электрический выход, который имеет смысл математической модели устройства, определяется следующим образом

$$K_{МЭМС}(\omega) = U_0^{aus} / U_0^{in} = i\omega R \Xi(\omega, \vec{E}^0, P). \quad (1)$$

Таким образом, построение математической модели МЭМС – резонатора предполагает определение функции $\Xi(\omega, \vec{E}^0, P)$, которая имеет размерность электрической емкости (фарады) и по своему физическому смыслу является динамической электрической емкостью стержневого конденсатора с пьезоактивным диэлектриком, т. е. МЭМС – резонатора. Для определения динамической электрической емкости МЭМС – резонатора необходимо последовательно решить следующие задачи:

1. расчет компонентов вектора напряженности \vec{E}^0 постоянного электрического поля в объеме стержня МЭМС – резонатора и определение структуры матрицы пьезоэлектрических модулей поляризованного сегнетоэлектрика;

2. оценка динамического электрического потенциала в объеме подвижной части МЭМС – резонатора;

3. определение амплитудного значения Q_0 электрического заряда на электроде 3.

Последовательное решение сформулированных выше задач осуществляется в предположении, что:

– сегнетоэлектрик, из которого сделан стержень МЭМС – резонатора, обладает поликристаллической структурой, и по этой причине характеризуется изотропией упругих и электрических свойств;

– из-за малости поперечного размера стержня в направлении оси Ox_1 (размер b) электрические и упругие поля в объеме стержня МЭМС – резонатора не зависят от значений координаты x_1 ;

– диэлектрическая проницаемость χ сегнетоэлектрика существенно превышает диэлектрическую проницаемость вакуума $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

Расчет компонентов вектора напряженности постоянного электрического поля при сформулированных выше предположениях сводится к решению уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \phi^0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi^0}{\partial x_3^2} = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (2)$$

где ϕ^0 – электрический потенциал постоянного электрического поля; V – объем стержня МЭМС – резонатора. Решение уравнения (2), т. е. потенциал ϕ^0 , должен удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left. \frac{\partial \phi^0}{\partial x_2} \right|_{x_2=(0, L_0+2L_s)} = 0; \quad \left. \frac{\partial \phi^0}{\partial x_3} \right|_{x_3=h} = 0;$$

$$\left. \phi^0 \right|_{x_3=0} = 0 \quad \forall x_2 \in [0, L_s];$$

$$\left. \phi^0 \right|_{x_3=0} = 0 \quad \forall x_2 \in [L_0, L_0 + 2L_s], \quad (3)$$

где L_s – длина опоры МЭМС – резонатора (рис. 3,а). На показанной на рис. 3,а расчетной схеме стержня не выделена выемка глубиной d (см. рис. 2). Это объясняется тем, что $d \ll h$ и пренебрежение этой деталью формы стержня не должно оказать существенного влияния на результаты расчета компонентов вектора напряженности постоянного электрического поля. Полагая, что потенциал ϕ^0 увеличивается по линейному закону от нуля до U_p при изменении координаты x_2 от L_s до $L_0 + L$, получаем следующие расчетные соотношения:

$$E_2^0(x_2, x_3) = -\frac{\partial \phi^0}{\partial x_2} = \frac{2U_p}{\pi L_0} \times \sum_{m=1}^{\infty} C_m [ch(\xi_m x_3) - th(\xi_m h) sh(\xi_m x_3)] \sin(\xi_m x_{23})$$

$$E_3^0(x_2, x_3) = -\frac{\partial \phi^0}{\partial x_3} = -\frac{2U_p}{\pi L_0} \times \sum_{m=1}^{\infty} C_m [sh(\xi_m x_3) - th(\xi_m h) ch(\xi_m x_3)] \cos(\xi_m x_{23}), \quad (4)$$

где $C_m = [\cos \xi_m (L_0 + L_s) - \cos \xi_m L_s] / m$;
 $\xi_m = m\pi / (L_0 + 2L_s)$.

На рис. 3,б и рис. 3,в представлены результаты расчетов нормированных значений продольного $\hat{E}_2^0(x_2, x_3) = E_2^0(x_2, x_3) / E_0$ и поперечного $\hat{E}_3^0(x_2, x_3) = E_3^0(x_2, x_3) / E_0$ компонентов вектора напряженности постоянного электрического поля. Компоненты рассчитывались по формулам (4) при значении $L_s / L_0 = 0,2$ и $h / L_0 = 0,05$. Нормировка выполнена относительно величины $E_0 = U_p / L_0$. По осям абсцисс на рис. 3,б,в отложена безразмерная координата $\hat{x}_2 = x_2 / L_0$. Отчетливо видно, что продольный компонент $E_2^0(x_2, x_3)$ практически полностью определяет пространственное распределение постоянного электрического поля в объеме ($L_s \leq x_2 \leq L_0 + L_s$) подвижной части МЭМС – резонатора. Вертикальный компонент заметен в узких, прилегающих к электродам 3 и 5, областях и очень быстро уменьшается по величине по мере возрастания координаты x_3 .

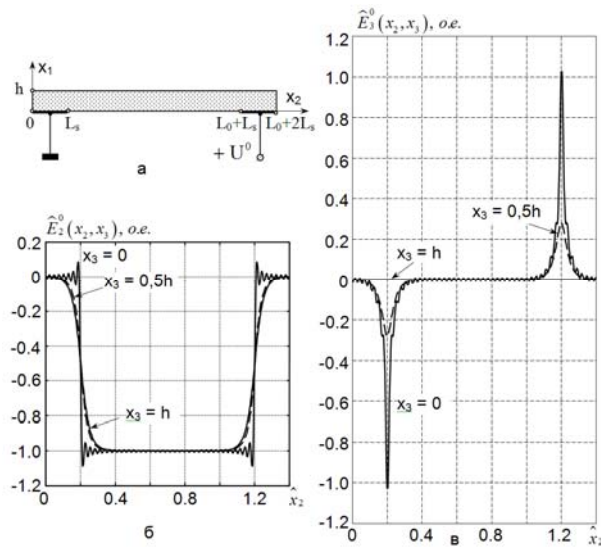


Рис. 3. Расчетная схема (а) и распределение продольного (б) и вертикального (в) компонентов вектора напряженности постоянного электрического поля

На основании результатов проведенных расчетов можно сделать вывод, что постоянное электрическое поле в подвижной части сегнетоэлектрического стержня МЭМС - резонатора можно, в первом приближении, представить одним лишь продольным компонентом $E_2^0(x_2)$, причем

$$E_2^0(x_2) = -\frac{U_p}{L_0} f(x_2), f(x_2) = \begin{cases} 1 \forall x_2 \in [L_s, L_0 + L_s], \\ 0 \forall x_2 \notin [L_s, L_0 + L_s]. \end{cases} \quad (5)$$

Уравнения физического состояния сегнетоэлектрического или электрострикционного материала имеют ту же структуру что и уравнения физического состояния упругих сред с магнитоэлектрическими эффектами. Феноменологическая теория магнитоэлектрических эффектов в упругих средах была разработана К.Б. Власовым в конце пятидесятих годов прошлого века. Следуя логическим построениям работы [6], уравнения физического состояния электрострикционных (сегнетоэлектрических) материалов можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} e_{pqij} E_p E_q, \quad (6)$$

$$D_m = e_{pmij} E_p \varepsilon_{ij} + \chi_{mk} E_k, \quad (7)$$

где σ_{ij} - компонент тензора результирующих механических напряжений в объеме деформируемого сегнетоэлектрика; c_{ijkl} - компонент тензора модулей упругости; ε_{kl} - компонент тензора бесконечно малых деформаций; e_{pqij} - компонент тензора электрострикционных констант; E_p - компонент вектора напряженности элект-

рического поля; D_m - компонент вектора электрической индукции; χ_{mk} - компонент тензора диэлектрической проницаемости поликристаллического сегнетоэлектрика, матрица которого имеет диагональную структуру.

Так как вектор напряженности электрического поля в объеме подвижной части МЭМС - резонатора представляет собой алгебраическую сумму постоянной и переменной составляющей, т. е. $\vec{E} = \vec{E}^0 + \vec{E}^*$, где \vec{E}^* - напряженность переменного электрического поля, которое возбуждается в поляризованном сегнетоэлектрике центральным электродом 4 (рис. 2), то, очевидно, механические напряжения, деформации и электрическая индукция также будут представлять собою суммы не изменяющихся во времени и переменных составляющих. Введем обозначения: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*$, $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}^*$ и

$D_m = D_m^0 + D_m^*$, где верхним индексом нуль отмечены постоянные, а звездочкой - переменные составляющие физических полей. Сообразно этому разложению, уравнения физического состояния (6) и (7) следует интерпретировать как суперпозицию математического описания статического и динамического состояния физической системы. После подстановки в соотношения (6) и (7) алгебраических сумм статических и динамических характеристик физического состояния элемента объема подвижной части МЭМС - резонатора, получаем две системы уравнений состояния:

$$\sigma_{ij}^0 = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 - \frac{1}{2} e_{pqij} E_p^0 E_q^0, \quad (8)$$

$$D_m^0 = e_{pmij} E_p^0 \varepsilon_{ij}^0 + \chi_{mk} E_k^0, \quad (9)$$

$$\sigma_{ij}^* = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl}^* - e_{qij} E_q^*, \quad (10)$$

$$D_m^* = e_{mij} \varepsilon_{ij}^* + \chi_{mk}^E E_k^*, \quad (11)$$

где c_{ijkl}^E - модули упругости поляризованного сегнетоэлектрика, которые отличаются от модулей упругости c_{ijkl} добавками, которые по своей величине не превышают значения $\Delta Y = (e_1 - 2\nu e_2) (E_2^0)^2 / (\chi_2 Y^0)$; e_1 и e_2 - электрострикционные константы, причем $|e_1, e_2| \leq 10^{-5} \Phi/\text{м}$; ν , Y^0 и χ_2 - коэффициент Пуассона, модуль Юнга и диагональный элемент χ_{22} матрицы диэлектрических проницаемостей неполяризованного сегнетоэлектрика; $e_{qij} = e_{pqij} E_p^0$ - пьезоэлек-

трический модуль ($\text{Кл}/\text{м}^2$); $\chi_m^\varepsilon \equiv \chi_{mm}^\varepsilon = \chi_{mm} + e_{mmij} \varepsilon_{ij}^0$ - диагональный компонент матрицы диэлектрической проницаемости поляризованного сегнетоэлектрика.

Так как неполяризованный поликристаллический сегнетоэлектрик обладает изотропией упругих и электрических свойств, то матрицы тензоров четвертого ранга c_{ijkl} и m_{pqij} должны сохранять свою структуру, т. е. не изменяться, при любом произвольном повороте координатных осей. В работе [7] показано, что наиболее общая форма представления компонента a_{ijkl} тензора четвертого ранга, матрица которого обладает указанным выше свойством, имеет следующий вид: $a_{ijkl} = a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + a_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$, где a_1 и a_2 - линейно независимые константы; δ_{ij} - символ Кронекера, равный единице при $i = k$ и нулю при $i \neq k$. Поскольку e_{pqij} является компонентом изотропного тензора четвертого ранга, постольку $e_{pqij} = e_2 \delta_{pq} \delta_{ij} + (e_1 - e_2) (\delta_{pi} \delta_{qj} + \delta_{pj} \delta_{qi}) / 2$. Из этого определения следует, что $e_{pppp} = e_1$; $e_{ppii} = e_{iipp} = e_2$ и $e_{pipi} = e_{piip} = e_{ippi} = e_{ipip} = (e_1 - e_2) / 2$. Другие комбинации индексов соответствуют нулевым компонентам тензора электрострикционных констант. Подставляя определение e_{pqij} в формулу для расчета пьезоэлектрического модуля поляризованного сегнетоэлектрика, получаем $e_{prij} = e_2 E_p^0 \delta_{ij} + (e_1 - e_2) (E_j^0 \delta_{pi} + E_i^0 \delta_{pj}) / 2$. В общем случае, когда в объеме сегнетоэлектрика существует постоянное электрическое поле, вектор напряженности которого определяется тремя компонентами E_1^0 , E_2^0 и E_3^0 , матрица пьезомодулей имеет следующий вид

$$e_{p\beta} = \begin{pmatrix} e_1 E_1^0 & e_2 E_1^0 & e_2 E_1^0 & 0 & (e_1 - e_2) E_3^0 / 2 & (e_1 - e_2) E_2^0 / 2 \\ e_2 E_2^0 & e_1 E_2^0 & e_2 E_2^0 & (e_1 - e_2) E_3^0 / 2 & 0 & (e_1 - e_2) E_1^0 / 2 \\ e_2 E_3^0 & e_2 E_3^0 & e_1 E_3^0 & (e_1 - e_2) E_2^0 / 2 & (e_1 - e_2) E_1^0 / 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

где β - матричный индекс Фойгта, образованный объединением двух тензорных индексов, т. е. $\beta \Leftrightarrow (i, j)$. При этом $1 \Leftrightarrow (1,1)$, $2 \Leftrightarrow (2,2)$, $3 \Leftrightarrow (3,3)$, $4 \Leftrightarrow (2,3;3,2)$, $5 \Leftrightarrow (1,3;3,1)$ и $6 \Leftrightarrow (1,2;2,1)$. В подвижной части МЭМС - резонатора постоянное электрическое поле полностью определяется продольным компонентом $E_2^0 = -U_p / L_0$. Из обобщенной матрицы (12) пьезоэлектрических модулей поляризованного сегнетоэлектрика следует, что в подвижной части МЭМС - резонатора материал приобретает

свойства пьезоэлектрика, матрица пьезомодулей которого имеет следующий вид

$$e_{p\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{34} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где $e_{16} = -(e_1 - e_2) U_p / (2L_0) = e_{34}$; $e_{21} = e_{23} = -e_2 U_p / L_0$; $e_{22} = -e_1 U_p / L_0$. Если принять $e_1 = 10^{-5} \text{ Ф/м}$, что, по всей вероятности, является верхней границей возможных значений сегнетоэлектрических констант для современных синтетических материалов, то при $U_p = 10 \text{ В}$ и $L_0 = 40 \text{ мкм}$ пьезомодуль $e_{22} = -2,5 \text{ Кл}/\text{м}^2$. Пьезомодуль e_{21} и, следовательно, константу e_2 можно оценить следующим образом: $e_{21} \leq -e_{22} / 2$, т. е. $e_{21} \leq 1,25 \text{ Кл}/\text{м}^2$. За пределами области существования постоянного электрического поля, т. е. в объеме опор ($0 \leq x_2 \leq L_s$ и $L_0 + L_s \leq x_2 \leq L_0 + 2L_s$) материал МЭМС - резонатора сохраняет физические свойства поликристаллического (изотропного) сегнетоэлектрика.

Из определения материальных констант c_{ijkl}^E и χ_m^ε (m - индекс Фойгта) поляризованного сегнетоэлектрика следует, что материал подвижной части МЭМС - резонатора приобретает анизотропию упругих и диэлектрических свойств в направлении вектора напряженности поляризующего электрического поля. При этом $c_{2222}^E \neq (c_{1111}^E = c_{3333}^E)$ и $c_{1212}^E \neq (c_{2323}^E = c_{1313}^E)$; $\chi_{22}^\varepsilon \neq (\chi_{11}^\varepsilon = \chi_{33}^\varepsilon)$. Уровень анизотропии определяется статическими деформациями, которые возникают в подвижной части МЭМС - резонатора при включении источника поляризующего электрического поля, т. е. при подаче на электрод 3 потенциала U_p . Статические деформации ε_{ij}^0 определяются в результате совместного решения следующих уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_j} = 0 \forall x_j \in V, \quad \frac{\partial D_j^0}{\partial x_j} = 0 \forall x_j \in V, \quad (14)$$

где величины σ_{ij}^0 и D_j^0 определены соотношениями (8) и (9). Единственность решения статической электроупругой задачи (14) обеспечивают граничные условия для упругой и электрической составляющей электроупругого поля:

$$n_j \sigma_{ij}^0(x_k) = 0 \forall x_k \in S^{(-)},$$

$$u_i^0(x_k) = 0 \forall x_k \in (S_5, S_3),$$

$$\begin{aligned} n_j D_j^0(x_k) &= 0 \forall x_k \in S^{(-)} + S_5, \\ S_3 D_3^0(x_k) - C^0 U_p &= 0 \forall x_k \in S_3, \end{aligned} \quad (15)$$

где n_j - компонент вектора единичной внешней нормали к поверхности S МЭМС – резонатора; $S^{(-)} = S - S_5 - S_3$; S_3 и S_5 - поверхности электродов 3 и 5 (рис. 2); u_i^0 - компоненты вектора статических смещений материальных частиц опор МЭМС – резонатора; C^0 - статическая емкость МЭМС – резонатора без учета пьезоактивных свойств сегнетоэлектрика.

Решения граничной задачи (14) – (15) статической электроупругости доставляют сведения о модулях упругости и диэлектрических проницаемостях поляризованного сегнетоэлектрика. Эти же сведения можно получить альтернативным — экспериментальным — путем. Предположим, что материальные константы c_{ijkl}^E и χ_{mm}^E определены тем или иным способом. Это дает возможность приступить к анализу динамического напряженно-деформированного состояния элементов МЭМС – резонатора.

Механическое и электрическое состояние подвижной части МЭМС – резонатора определяют соотношения (10) и (11). Результирующие механические напряжения σ_{ij}^* , деформации ε_{kl}^* и электрическое поле, определяемое компонентами векторов электрической индукции D_m^* и напряженности E_m^* , изменяются во времени по гармоническому закону $e^{i\omega t}$ с круговой частотой ω смены знака электрического потенциала на электрическом входе МЭМС – резонатора. Условимся в дальнейшем указанные выше величины (σ_{ij}^* , ε_{kl}^* , D_m^* и E_m^*) понимать как пространственно – развитые амплитуды гармонически изменяющихся во времени физических полей. В этом случае параметры динамического физического состояния должны удовлетворять второму закону Ньютона в дифференциальной форме и условию отсутствия свободных носителей электричества в объеме деформируемого сегнетоэлектрика. Эти фундаментальные положения записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^*}{\partial x_j} + \rho_0 \omega^2 u_i^* = 0 \forall x_j \in V, \quad (16)$$

$$\frac{\partial D_1^*}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2^*}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3^*}{\partial x_3} = 0 \forall x_j \in V, \quad (17)$$

где σ_{ij}^* и D_m^* ($m = 1, 2, 3$) определены выражениями (10) и (11); ρ_0 - плотность сегнетоэлектрика; u_i^* - амплитудное значение компонента вектора смещения материальных частиц подвижной части МЭМС – резонатора.

Прежде чем приступить к совместному решению системы уравнений (16) и (17), выполним качественную (физическую) оценку параметров динамического состояния исследуемой области МЭМС – резонатора.

Рассматривая конструкцию МЭМС – резонатора (рис. 2), можно с полной уверенностью заключить, что в подвижной части стержня отсутствуют сдвиговые деформации ε_{12}^* и ε_{13}^* . Поскольку стержень тонкий по определению (размер b намного меньше длины упругой волны, т. е. масштаба пространственной неоднородности напряженно-деформированного состояния), постольку упругое и электрическое состояния подвижной части стержня имеют одинаковые количественные характеристики в любой плоскости $x_1 = const$. Из этого, в достаточной мере очевидного, факта следует что $\partial D_1^* / \partial x_1 = 0$. Принимая во внимание структуру матрицы пьезомодулей (13), можно записать следующие выражения для расчета компонентов тензора σ_{ij}^* :

$$\sigma_1^* = c_{11}^E \varepsilon_1^* + c_{12}^E \varepsilon_2^* + c_{13}^E \varepsilon_3^* - e_{21} E_2^*, \quad (18)$$

$$\sigma_2^* = c_{21}^E \varepsilon_1^* + c_{22}^E \varepsilon_2^* + c_{23}^E \varepsilon_3^* - e_{22} E_2^*, \quad (19)$$

$$\sigma_3^* = c_{31}^E \varepsilon_1^* + c_{32}^E \varepsilon_2^* + c_{33}^E \varepsilon_3^* - e_{23} E_2^*, \quad (20)$$

$$\sigma_4^* = c_{44}^E \varepsilon_4^* - e_{34} E_3^*, \quad (21)$$

При записи компонентов тензоров второго ранга σ_{ij}^* и ε_{kl}^* , пьезомодулей и модулей упругости в соотношениях (18) – (21) были использованы индексы Фойгта. Компоненты σ_5^* и σ_6^* равны нулю, потому что равны нулю деформации ε_{12}^* и ε_{13}^* . Компоненты вектора электрической индукции определяются следующим образом:

$$D_2^* = e_{21} \varepsilon_1^* + e_{22} \varepsilon_2^* + e_{23} \varepsilon_3^* + \chi_2^E E_2^*, \quad (22)$$

$$D_3^* = 2e_{34} \varepsilon_4^* + \chi_3^E E_3^*, \quad (23)$$

Так как толщина стержня h соизмерима с его шириной b , то можно утверждать, что динамическое напряженно-деформированное состояние стержня остается одинаковым в любой плоскости $x_3 = const$ и $x_2 = const$ в пределах области

$L_s \leq x_2 \leq L_0 + L_s$. Так как поверхности стержня $x_3 = 0, h$ и $x_1 = 0, b$ не контактируют с другими материальными объектами, то, как это требует третий закон Ньютона, на этих поверхностях должны выполняться условия $\sigma_3^* = 0$ и $\sigma_1^* = 0$ соответственно. Поскольку напряжения σ_3^* и σ_1^* должны оставаться постоянными в любой точке объема подвижной части МЭМС – резонатора, постольку $\sigma_1^* = \sigma_3^* = 0$ везде, и выражения (18) и (20) следует приравнять нулю. Учитывая, что $c_{11}^E = c_{33}^E$, $c_{12}^E = c_{13}^E = c_{31}^E = c_{32}^E = c_{21}^E = c_{23}^E$ и $e_{21} = e_{23}$, из условий $\sigma_3^* = 0$ и $\sigma_1^* = 0$ определяем деформации ε_3^* и ε_1^* :

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_3^* = -\frac{c_{12}^E}{c_{11}^E + c_{12}^E} \varepsilon_2^* + \frac{e_{12}}{c_{11}^E + c_{12}^E} E_2^*. \quad (24)$$

Подставляя соотношение (24) в уравнения состояния (19) и (22), получаем

$$\sigma_2^* = Y^E \varepsilon_2^* - e_{22}^* E_2^*, \quad (25)$$

$$D_2^* = e_{22}^* \varepsilon_2^* + \chi_2^\sigma E_2^*, \quad (26)$$

где $Y^E = c_{22}^E - 2(c_{12}^E)^2 / (c_{11}^E + c_{12}^E)$ – модуль Юнга поляризованного сегнетоэлектрика; $e_{22}^* = e_{22} - 2(c_{12}^E e_{21}) / (c_{11}^E + c_{12}^E)$ – динамический пьезомодуль, определяющий кулоновское (электроупругое) взаимодействие в режиме одноосного сжатия – растяжения подвижной части МЭМС – резонатора; $\chi_2^\sigma = \chi_2^\varepsilon + 2(e_{21})^2 / (c_{11}^E + c_{12}^E)$ – диэлектрическая проницаемость, соответствующая режиму постоянства механических напряжений в направлении электрической поляризации сегнетоэлектрика.

Подставляя в уравнение (16) величины $\sigma_2^* = \sigma_{22}^*$ и $\sigma_4^* = \sigma_{32}^*$ определенные выражениями (25) и (21) соответственно, и принимая во внимание, что $\varepsilon_2^* = \partial u_2^* / \partial x_2$ и $\varepsilon_4^* = (\partial u_2^* / \partial x_3 + \partial u_3^* / \partial x_2) / 2$, получаем

$$Y^E \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^2} + c_{44}^E \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_3^2} + c_{44}^E \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial x_2 \partial x_3} - e_{22}^* \frac{\partial E_2^*}{\partial x_2} - e_{34} \frac{\partial E_3^*}{\partial x_3} + \rho_0 \omega^2 u_2^* = 0 \forall x_k \in V \quad (27)$$

Второе слагаемое в уравнении (27) равно нулю, так как напряженно-деформированное состояние слабо изменяется по высоте попе-

речного сечения подвижной части МЭМС – резонатора. Поскольку $\partial^2 u_3^* / \partial x_2 \partial x_3 = \partial \varepsilon_3^* / \partial x_2$, а деформация ε_3^* определена выражением (24), уравнение установившихся колебаний (27) можно представить в следующем виде

$$c_{22}^* \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^2} - e_{22}^{(1)} \frac{\partial E_2^*}{\partial x_2} - e_{34} \frac{\partial E_3^*}{\partial x_3} + \rho_0 \omega^2 u_2^* = 0 \forall x_k \in V \quad (28)$$

где $c_{22}^* = Y^E - c_{12}^E c_{44}^E / (c_{11}^E + c_{12}^E)$ – модуль упругости подвижной части МЭМС – резонатора, учитывающий деформирование поперечного сечения стержня; $e_{22}^{(1)} = e_{22}^* - e_{21} c_{44}^E / (c_{11}^E + c_{12}^E)$ – приведенный пьезомодуль.

Подстановка выражений (23) и (26) в условие отсутствия свободных носителей электричества (17) дает следующий результат

$$e_{22}^{(2)} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^2} + \chi_2^* \frac{\partial E_2^*}{\partial x_2} + \chi_3^\varepsilon \frac{\partial E_3^*}{\partial x_3} = 0 \forall x_k \in V, \quad (29)$$

где $e_{22}^{(2)} = e_{22}^* - e_{34} c_{12}^E / (c_{11}^E + c_{12}^E)$ – приведенный пьезомодуль; $\chi_2^* = \chi_2^\sigma + e_{34} e_{21} / (c_{11}^E + c_{12}^E)$ – приведенная диэлектрическая проницаемость. При записи соотношения (29) учтено, что $\partial^2 u_2^* / \partial x_3^2 = 0$. Из уравнения (29) следует, что

$$\frac{\partial E_2^*}{\partial x_2} = -\frac{\chi_3^\varepsilon}{\chi_2^*} \frac{\partial E_3^*}{\partial x_3} - \frac{e_{22}^{(2)}}{\chi_2^*} \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^2}. \quad (30)$$

Подставляя соотношение (30) в уравнение установившихся колебаний (28), приводим его к следующему виду

$$c_{22}^D \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^2} + \rho_0 \omega^2 u_2^* - e_{34} \frac{\partial E_3^*}{\partial x_3} = 0 \forall x_k \in V, \quad (31)$$

где $c_{22}^D = c_{22}^* + e_{22}^{(1)} e_{22}^{(2)} / \chi_2^*$; $e_{34}^* = e_{34} - \chi_3^\varepsilon e_{22}^{(1)} / \chi_2^*$. Уравнение (31) определяет динамическое напряженно-деформированное состояние подвижной части МЭМС – резонатора с точностью до вертикальной составляющей силы инерции материальных частиц поперечного сечения стержня.

Если центральный электрод 4 имеет ширину $2L_3 \approx L_0$, то вертикальный компонент E_3^* вектора напряженности переменного электрического поля можно оценить достаточно просто путем следующих рассуждений.

Помести начало системы координат в точку посередине подвижной части МЭМС – резона-

тора (рис. 4). В воздушном зазоре между подвижной частью МЭМС – резонатора и плоскостью электрода 4 электрический потенциал ϕ^* переменного электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial x_3^2} = 0. \quad (32)$$

В центральной части воздушного зазора $\partial^2 \phi^* / \partial x_2^2 = 0$ и уравнение (32) имеет тривиальное решение

$$\phi^* = C_1 x_3 + C_2, \quad (33)$$

где C_1 и C_2 - константы. При $x_3 = -d$ потенциал $\phi^* = U_0^{in}$. Так как $\partial \phi^* / \partial x_3 = C_1 = -E_3^{in}$, где E_3^{in} - напряженность электрического поля в срединной области воздушного зазора, то при $C_2 = 0$ получаем $E_3^{in} = -U_0^{in} / d$. На границе раздела сред $x_3 = 0$ и $x_3 = h$ должны выполняться условия

$$\chi_3^e E_3^*(x_3) \Big|_{x_3=0} = \chi_0 E_3^{in}, \quad E_3^*(x_3) \Big|_{x_3=h} = 0. \quad (34)$$

Полагая, что в окрестности вертикальной оси координат вертикальный компонент вектора напряженности переменного электрического поля изменяется по линейному закону при изменении координаты x_3 , и удовлетворяет граничным условиям (34), получаем формулу для расчета компонента $E_3^*(x_3)$:

$$E_3^*(x_3) = -\frac{\chi_0 U_0^{in}}{\chi_3^e dh} (h - x_3). \quad (35)$$

Выражением (35), которое справедливо в ближайшей окрестности вертикальной оси координат, аппроксимируем вертикальную составляющую вектора напряженности переменного электрического поля во всем объеме подвижной части МЭМС – резонатора. Погрешность такой аппроксимации будет тем меньше, чем точнее выполняется приближенное равенство $2L_3 \approx L_0$.

Выражение (35) позволяет завершить формулировку уравнения, которое определяет характеристики переменного напряженно-деформированного состояния. Продольный компонент u_2^* вектора динамического смещения материальных частиц подвижной части МЭМС – резонатора определяется в результате решения следующего дифференциального уравнения:

$$c_{22}^D \frac{\partial^2 u_2^*}{\partial x_2^2} + \rho_0 \omega^2 u_2^* - e_{34}^* \frac{\chi_0 U_0^{in}}{\chi_3^e dh} = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (36)$$

где V - объем подвижной части МЭМС – резонатора.

Предположим, что решение уравнения (36) найдено, т. е. функция $u_2^*(\omega, x_2)$ определена в явном виде. Тогда, принимая во внимание, что $E_2^* = -\partial \phi^\Pi / \partial x_2$, где ϕ^Π - электрический потенциал переменного электрического поля в объеме подвижной части МЭМС – резонатора, уравнение (29) можно привести к следующему виду

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} + \frac{\chi_0 U_0^{in}}{dh} = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (37)$$

где $\Pi = e_{22}^{(2)} u_2^*(\omega, x_2) - \chi_2^* \phi^\Pi$.

Уравнению (37) удовлетворяет функция $\Pi = -\chi_0 U_0^{in} x_2^2 / (2dh)$, откуда следует, что

$$\phi^\Pi(x_2) = \frac{e_{22}^{(2)}}{\chi_2^*} u_2^*(\omega, x_2) + \frac{\chi_0 U_0^{in} x_2^2}{2\chi_2^* dh}. \quad (38)$$

В области правой опоры МЭМС – резонатора электрический потенциал $\phi^{(3)}(x_2, x_3)$ ($L_0^* \leq x_2 \leq L_0^* + L_s$; $0 \leq x_3 \leq h$) удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям следующего вида:

$$\chi \frac{\partial \phi^{(3)}(x_2, x_3)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} = -\frac{Q_0}{S_3}; \quad (39)$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}(x_2, x_3)}{\partial x_3} \Big|_{x_3=h} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi^{(3)}(x_2, x_3)}{\partial x_2} \Big|_{x_2=L_0^*+L_s} = 0; \quad (40)$$

$$\phi^{(3)}(x_2, x_3) \Big|_{x_2=L_0^*} = \phi^\Pi(x_2) \Big|_{x_2=L_0^*},$$

где χ - диэлектрическая проницаемость неполяризованного сегнетоэлектрика; Q_0 - амплитуда электрического заряда на электроде 3; $S_3 = bL_s$ - площадь электрода под правой опорой.

Общее решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее второму граничному условию из группы условий (39) и первому условию из группы условий (40), имеет следующий вид

$$\phi^{(3)}(x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(+)} f_k(\lambda_k, x_2) \sin(\lambda_k x_3), \quad (41)$$

где $C_k^{(+)}$ - коэффициент разложения;
 $f_k(\lambda_k, x_2) = ch[\lambda_k(L_0^* + L_s - x_2)] / ch[\lambda_k(L_0^* + L_s)]$;
 $\lambda_k = \pi(1+2k)/(2h)$, $k=0,1,2,\dots$

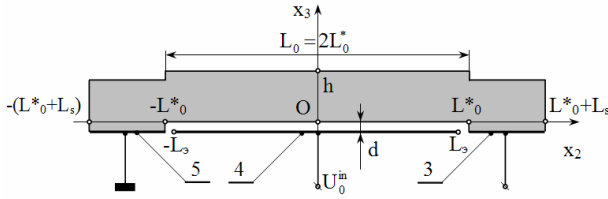


Рис. 4. К оценке вертикального компонента вектора напряженности переменного электрического поля

Для того, чтобы удовлетворить первому граничному условию из группы условий (39), воспользуемся методом коллокаций [8]. Следуя логике этого метода, разобьем отрезок $L_0^* \leq x_2 \leq L_0^* + L_s$ на $N+1$ полосу. Центральная линия n -ой полосы имеет координату $x_2^{(n)} = L_0^* + L_s(n-1)/[2(N+1)]$. Потребуем выполнение первого условия из группы условий (39) на каждой центральной линии n -ой полосы с помощью первых $N+1$ членов разложения (41). В результате можно записать следующую систему алгебраических линейных уравнений:

$$\begin{aligned} & \lambda_0 C_0^{(+)} f_0(\lambda_0, x_2^{(1)}) + \lambda_1 C_1^{(+)} f_1(\lambda_1, x_2^{(1)}) + \\ & + \dots + \lambda_N C_N^{(+)} f_N(\lambda_N, x_2^{(1)}) = -Q_0 / (\chi L_s b), \\ & \lambda_0 C_0^{(+)} f_0(\lambda_0, x_2^{(2)}) + \lambda_1 C_1^{(+)} f_1(\lambda_1, x_2^{(2)}) + \\ & + \dots + \lambda_N C_N^{(+)} f_N(\lambda_N, x_2^{(2)}) = -Q_0 / (\chi L_s b), \\ & \lambda_0 C_0^{(+)} f_0(\lambda_0, x_2^{(N)}) + \lambda_1 C_1^{(+)} f_1(\lambda_1, x_2^{(N)}) + \\ & + \dots + \lambda_N C_N^{(+)} f_N(\lambda_N, x_2^{(N)}) = -Q_0 / (\chi L_s b). \end{aligned} \quad (42)$$

Очевидно, что система уравнений (42) разрешается единственным образом относительно искомым коэффициентов $C_0^{(+)}$, $C_1^{(+)}$, ..., $C_N^{(+)}$ и результат её решения можно записать в следующем виде

$$C_m^{(+)} = -\frac{Q_0}{\chi L_s b} \Psi_m(\lambda_N), \quad m=0,1,\dots,N, \quad (43)$$

где $\Psi_m(\lambda_N) = \Delta_m(\lambda_N) / \Delta(\lambda_N)$; $\Delta(\lambda_N)$ - главный определитель системы уравнений (42); $\Delta_m(\lambda_N)$ - алгебраическое дополнение при коэффициенте $C_m^{(+)}$, которое получается путем замены на

единицы всех элементов m -го столбца главного определителя.

Таким образом, электрический потенциал в объеме правой опоры МЭМС – резонатора определяется следующим выражением

$$\begin{aligned} & \phi^{(3)}(x_2, x_3) \approx \\ & \approx -\frac{Q_0}{\chi L_s b} \sum_{m=0}^N \Psi_m(\lambda_N) f_m(\lambda_m, x_2) \sin(\lambda_m x_3), \end{aligned} \quad (44)$$

где $\lambda_m = \pi(1+2m)/(2h)$.

На границе раздела $x_2 = L_0^*$ подвижной части и правой опоры МЭМС - резонатора должно выполняться второе условие из группы граничных условий (40), т. е.

$$\begin{aligned} & -\frac{Q_0}{\chi L_s b} \sum_{m=0}^N \Psi_m(\lambda_N) f_m(\lambda_m, L_0^*) \sin(\lambda_m x_3) = \\ & = \frac{e_{22}^{(2)}}{\chi_2^*} u_2^*(\omega, L_0^*) + \frac{\chi_0 U_0^{in}(L_0^*)^2}{2\chi_2^* dh}. \end{aligned} \quad (45)$$

Умножим левую и правую части соотношения (45) на $\sin(\lambda_m x_3)$ и проинтегрируем полученный результат по переменной x_3 на интервале $[0, h]$. После очевидных вычислений получаем выражение для расчета амплитудного значения электрического заряда Q_0 на электроде 3, т. е. на электрическом выходе МЭМС - резонатора

$$Q_0 = -\frac{\chi \chi_0 L_s (L_0^*)^2 b}{\chi_2^* dh \zeta(\lambda_N)} \left[\frac{2e_{22}^{(2)} bh}{\chi_0 (L_0^*)^2} \mathfrak{S}_2^*(\omega, L_0^*) + 1 \right] U_0^{in}, \quad (46)$$

где $\zeta(\lambda_N) = \lambda_m \Psi_m(\lambda_N) f_m(\lambda_m, L_0^*)$ - практически постоянная величина, которая при $N \rightarrow \infty$ становится одинаковой для любых, произвольно выбранных, номеров m ;
 $\mathfrak{S}_2^*(\omega, L_0^*) = u_2^*(\omega, L_0^*) / U_0^{in}$ - функция, которая определяет частотно зависимые амплитуды смещений материальных частиц подвижной части МЭМС – резонатора в плоскости сопряжения с правой опорой.

Так как $Q_0 = U_0^{in} \Xi(\omega, \mathbf{E}^0, P)$, то из выражения (46) следует определение динамической электрической емкости МЭМС – резонатора балочного типа

$$\Xi(\omega, \mathbf{E}^0, P) = -\frac{\chi \chi_0 L_s (L_0^*)^2 b}{\chi_2^* dh \zeta(\lambda_N)} \left[\frac{2e_{22}^{(2)} bh}{\chi_0 (L_0^*)^2} \mathfrak{S}_2^*(\omega, L_0^*) + 1 \right], \quad (47)$$

Выражение (47) является результатом последовательного выполнения вычислительных процедур, которые опираются на фундаментальные положения механики деформируемого твердого тела с усложненными (сегнетоэлектрическими) свойствами и отражает основные принципы математического моделирования МЭМС – резонаторов балочного типа.

Из общего соотношения (47) отчетливо видно, что частотно зависимые свойства МЭМС – резонатора полностью определяются нормированными смещениями $\hat{u}_2^*(\omega, L_0^*)$ материальных частиц подвижной части МЭМС. Это обстоятельство обуславливает необходимость более детального обсуждения характеристик поля смещений материальных частиц подвижной части МЭМС – резонатора.

Расчет смещений материальных частиц подвижной части МЭМС - резонатора

В объеме левой и правой опоры (рис. 4) отсутствует поляризующее сегнетоэлектрик постоянное электрическое поле. По этой причине можно полагать, что в областях $-(L_0^* + L_s) \leq x_2 \leq -L_0^*$ и $L_0^* \leq x_2 \leq (L_0^* + L_s)$ электроупругие взаимодействия практически не проявляются или, по крайней мере, они настолько слабы, что их можно не учитывать при разработке математической модели МЭМС – резонатора. Из этого предположения следует, что напряженно-деформированное состояние МЭМС – резонатора в целом обладает симметричными свойствами относительно плоскости $x_2 = 0$ (рис. 4). Можно показать, что продольный компонент $u_2^*(\omega, x_2)$ вектора смещения материальных частиц подвижной части МЭМС – резонатора в плоскости $x_2 = 0$ принимает нулевые значения и имеет противоположные знаки слева и справа от этой плоскости.

Общее решение уравнения (31), обладающее указанными выше свойствами симметрии, имеет следующий вид

$$u_2^*(\omega, x_2) = C^{(\pm)} \sin \gamma x_2 + \frac{P_2}{\gamma^2} (1 - \cos \gamma x_2), \quad (48)$$

где $C^{(\pm)}$ - константы, определяющие смещения слева ($C^{(-)}$) и справа ($C^{(+)}$) от плоскости $x_2 = 0$; $\gamma = \sqrt{\rho_0 \omega^2 / c_{22}^D}$ - волновое число упругих колебаний подвижной части МЭМС – резонатора; $P_2 = e_{34}^* \chi_0 U_0^{in} / (\chi_3^* c_{22}^D dh)$.

Константы $C^{(\pm)}$ определяются из условий кинематического и динамического сопряжения упругого состояния подвижной части МЭМС – резонатора с напряженно-деформированным состоянием левой и правой опоры. На границах $x_2 = \pm L_0^*$ условного раздела стержня МЭМС – резонатора на подвижную часть и опоры должны выполняться следующие условия:

$$u_2^*(\omega, \pm L_0^*) = u_2^{\{n\}}(\pm L_0^*), \quad \sigma_2^*(\omega, \pm L_0^*) = \sigma_2^{\{n\}}(\pm L_0^*), \quad (49)$$

где $u_2^{\{n\}}(\pm L_0^*)$ - смещения материальных частиц в правой (верхний индекс n) и левой (индекс l) опорах в плоскостях механического контакта опор с подвижной частью МЭМС – резонатора;

$\sigma_2^*(\omega, \pm L_0^*) = c_{22}^D \left[\frac{\partial u_2^*(\omega, x_2)}{\partial x_2} \right]_{x_2 = \pm L_0^*}$ - результирующие механические напряжения на границах подвижной части МЭМС – резонатора; модифицированный модуль упругости c_{22}^D учитывает существование кулоновского взаимодействия в поляризованном сегнетоэлектрике подвижной части; $\sigma_2^{\{n\}}(\pm L_0^*)$ - упругие напряжения в правой и левой опорах МЭМС.

В пренебрежении вертикальным компонентом вектора смещения, продольный компонент $u_2(x_2, x_3)$ смещения материальных частиц левой и правой опоры МЭМС – резонатора определяется как решение дифференциального уравнения в частных производных следующего вида

$$\begin{aligned} E \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \rho_0 \omega^2 u_2 = \\ = 0 \quad \forall x_k \in \left[-(L_0^* + L_s) \leq -L_0^*; L_0^* \leq \right. \\ \left. \leq x_2 \leq L_0^* + L_s; 0 \leq x_3 \leq h \right], \end{aligned} \quad (50)$$

где $E = 2G(1 + \nu)$ - модуль Юнга; G - модуль сдвига и ν - коэффициент Пуассона неполяризованного поликристаллического, т. е. изотропного по упругим свойствам, сегнетоэлектрика. Общее решение уравнения (50) должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right|_{x_3=h} = 0, \quad u_2|_{x_3=0} = 0, \quad (51)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right|_{x_2 = \pm(L_0^* + L_s)} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right|_{x_2 = \pm(L_0^* + L_s)} = 0, \quad (52)$$

условие $\sigma_3(h) = 0$ выполняется автоматически.

Решение уравнения (50), которое удовлетворяет условиям (51) и первому условию из группы условий (52) имеет следующий вид

$$u_2^{\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\}}(x_2, x_3) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(\pm)} \left\{ \cos \xi_k x_2 \pm \right. \quad (53)$$

$$\left. \pm tg \left[\xi_k (L_0^* + L_s) \right] \sin \xi_k x_2 \right\} \sin \lambda_k x_3$$

где $A_k^{(\pm)}$ - коэффициенты разложения, определяющие смещения в правой (знак плюс) и в левой (знак минус) опорах;

$$\xi_k = \sqrt{\gamma_{оп}^2 - \frac{G}{E} \left[\frac{\pi}{2h} (1+2k) \right]^2}$$

- волновое число колебаний материальных частиц опоры в продольном направлении; $\gamma_{оп} = \omega / \sqrt{E/\rho_0}$; ρ_0 - плотность сегнетоэлектрика; $\lambda_k = \pi(1+2k)/(2h)$ - константа разделения, возникающая в ходе решения уравнения (50) методом Фурье (методом разделения переменных). На границах $x_2 = \pm L_0^*$ смещения и напряжения в опорах записываются следующим образом:

$$u_2^{\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\}}(\pm L_0^*) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(\pm)} \frac{\cos \xi_k L_s}{\cos \left[\xi_k (L_0^* + L_s) \right]} \sin \lambda_k x_3, \quad (54)$$

$$\sigma_2^{\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\}}(\pm L_0^*) =$$

$$= \pm E \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k A_k^{(\pm)} \frac{\sin \xi_k L_s}{\cos \left[\xi_k (L_0^* + L_s) \right]} \sin \lambda_k x_3. \quad (55)$$

Подставляя выражения (54) и (55) в граничные условия (49), определяем константу $C_{(k)}^{(\pm)}$, которая оказывается зависимой от номера k моды упругих колебаний в опорах. Формула для расчета констант $C_{(k)}^{(\pm)}$ имеет следующий вид

$$C_{(k)}^{(\pm)} = C_{(k)}^{(\pm)} =$$

$$= \mp \frac{P_2}{\gamma^2} \cdot \frac{\left[\sin \gamma L_0^* - \zeta_k (1 - \cos \gamma L_0^*) tg(\xi_k L_s) \right]}{\cos \gamma L_0^* \left[1 - \zeta_k tg(\xi_k L_s) tg(\gamma L_0^*) \right]}, \quad (56)$$

где $\zeta_k = \xi_k E / (\gamma c_{22}^D)$. Так как смещения подвижной части МЭМС – резонатора определяются напряженно-деформированным состоянием опор, то подставляя $C_{(k)}^{(\pm)}$ в определение (48) смещений $u_2^*(\omega, x_2)$, и приравнявая $x_2 = L_0^*$, после

суммирования по индексу k получаем следующий результат

$$u_2^*(\omega, L_0^*) =$$

$$= - \frac{e_{34}^* \chi_0 U_0^{in}}{c_{22}^D \chi_3^2 \gamma^2 dh} (1 - \cos \gamma L_0^*) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_k(\gamma, \xi, \lambda)}, \quad (57)$$

где $\Delta_k(\gamma, \xi, \lambda) = \cos \gamma L_0^* + \zeta_k^* th(\xi_k^* L_s) \sin \gamma L_0^*$;

$$\zeta_k^* = \zeta_k^* E / (\gamma c_{22}^D); \zeta_k^* = \gamma_{оп} \sqrt{\left[\pi(1+2k)/(2\gamma_{оп} h) \right]^2 / [2(1+\nu)]} - 1.$$

Решение (57) носит приближенный характер, поскольку не обеспечивается выполнение второго граничного условия из группы условий (52) во всех без исключения точках торцевых поверхностей $x_2 = \pm (L_0^* + L_s)$ стержня МЭМС – резонатора. Говоря иными словами, решения (53) и (57) построены с точностью до касательных напряжений на торцах МЭМС – резонатора. Поскольку толщина h стержня резонатора достаточно мала, постольку можно надеяться, что вносимая погрешность будет малой, по крайней мере, в диапазоне частот, где длина волны упругих возмущений соизмерима с длиной подвижной части МЭМС – резонатора.

Определив из формулы (57) нормированное смещение $\hat{u}_2^*(\omega, L_0^*) = u_2^*(\omega, L_0^*) / U_0^{in}$, подставляя его в формулу (47), после чего получаем выражение для расчета динамической электрической емкости МЭМС – резонатора балочного типа

$$\Xi(\omega, \vec{E}^0, P) = -C_0 \left[\frac{2b}{d} K^2 F(\omega) + 1 \right], \quad (58)$$

где $C_0 = \frac{\chi \chi_0 L_s b (L_0^*)^2}{\chi_2^* dh \zeta(\lambda_N)}$ - статическая электрическая емкость стержня МЭМС – резонатора;

$K^2 = e_{22}^{(2)} e_{34}^* / (c_{22}^D \chi_3^2)$ - квадрат коэффициента электромеханической связи – показатель пьезоактивности поляризованного сегнетоэлектрика; $F(\omega)$ - зависящая от частоты функция, которая определяет вклад электроупругих взаимодействий в электрическую поляризацию подвижной части МЭМС – резонатора. Функция $F(\omega)$ определяется следующим образом

$$F(\omega) = \frac{(\cos \gamma L_0^* - 1)}{(\gamma L_0^*)^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Delta_k(\gamma, \xi, \lambda)}. \quad (59)$$

Совершенно ясно, что резонансные характеристики МЭМС определяет второй множитель выражения (59). Для оценки его аналити-

ческих свойств было проведено вычисление безразмерного волнового числа $\gamma_1 L_0^*$ соответствующего частоте первого электромеханического резонанса при удержании различного числа слагаемых в составе суммы в формуле (59). Вычисления проводились в предположении, что $c_{22}^D/E = 1,3$, $\nu = 0,3$ и $L_s/L_0^* = 0,2$. В таблице приведены числовые значения первого корня уравнения

$$\left[\frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{1}{\Delta_k(\gamma, \xi, \lambda)}} \right] = 0 \quad (60)$$

при различных значениях параметра n , т. е. числа суммируемых членов ряда. Как видно из показанных в таблице результатов, числовые значения первого корня уравнения (60) на удивление слабо зависят от числа суммируемых членов ряда.

Учет только одного, нулевого, члена суммируемого ряда (60) доставляет значение безразмерного волнового числа $\gamma_1 L_0^*$ с точностью до девятого (!) знака после запятой. Суммирование нулевого и первого члена ряда изменяет результат в сторону увеличения на $2,41 \cdot 10^{-11}$. Вычисление резонансного безразмерного волнового числа в результате суммирования нулевого, первого и второго членов ряда увеличивает результат против прежнего значения на $1,48 \cdot 10^{-11}$. Результат перестает изменяться вообще, т. е. изменения выходят за пределы точности отображения результатов на мониторе, после суммирования первых четырех членов ряда (60). Из всего сказанного можно сделать единственный вывод: для инженерного расчета частоты первого электромеханического резонанса вполне достаточно одного лишь нулевого члена ряда в составе выражения (59), т. е. величины $1/\Delta_0(\gamma, \xi, \lambda)$. При этом функция $F(\omega)$ определяется следующим образом

$$F(\omega) = \frac{\cos \gamma L_0^* - 1}{(\gamma L_0^*)^2 \left\{ \cos \gamma L_0^* + \zeta_0^* \operatorname{th} \left[\zeta_0^* (L_0^* + L_s) \right] \right\} \sin \gamma L_0^*} \quad (61)$$

В пользу определения функции $F(\omega)$ формулой (61) свидетельствуют графики, показанные на рис. 5, где представлены результаты расчета модуля суммы различного числа членов ряда $1/\Delta_k(\gamma, \xi, \lambda)$. Вычисления выполнены для поликристаллического сегнетоэлектрика с добротностью $Q = 100$. Остальные параметры имеют значения, которые им были присвоены при расчете безразмерного волнового числа

$\gamma_1 L_0^*$. Сплошной кривой на рис. 5 показан нулевой элемент, т. е. величина $1/\Delta_0(\gamma, \xi, \lambda)$, штриховой кривой показана сумма первых пяти элементов ряда. Отчетливо видно, что нет каких-либо заметных и существенных отличий между этими двумя кривыми в ближайшей окрестности частоты первого электромеханического резонанса.

Таблица. Числовые значения первого $\gamma_1 L_0^*$ при различном числе слагаемых в сумме (60)

n	Значение $\gamma_1 L_0^*$
0	2,912565694 29967
1	2,912565694 32378
2	2,912565694 33855
3	2,912565694 33912
4	2,912565694 33912

Примечание: полужирным шрифтом выделены значащие цифры, которые изменяются при изменении числа слагаемых

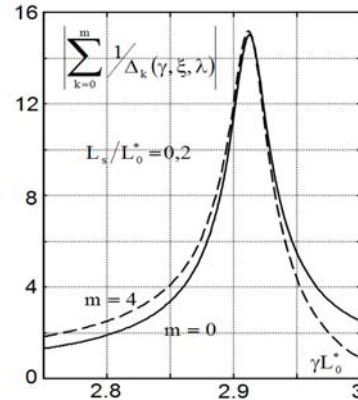


Рис. 5. Изменение составляющей функции $F(\omega)$, которая определяет частоты резонанса

Таким образом, для выполнения инженерных расчетов функции $F(\omega)$ можно и нужно пользоваться выражением (61).

В заключение следует отметить, что при $L_0^* = 20$ мкм и $c_{22}^D = 70$ ГПа, $\rho_0 = 7400$ кг/м³ безразмерному волновому числу $\gamma_1 L_0^* = 2,9125$ соответствует циклическая частота 71,28 МГц. Длина упругой волны в подвижной части МЭМС – резонатора на этой частоте составляет 43,15 мкм, что на 7,8% больше длины подвижной части стержня. Полного совпадения на частоте резонанса длины продольной волны и длины подвижной части стержня ожидать трудно, поскольку весьма маловероятно интенсивное движение материальных частиц в подвижной части при абсолютном покое в объеме опор МЭМС. На частоте электромеханического резонанса резко возрастает амплитудное значение сигнала U_0^{aus} на электрическом выходе МЭМС – резонатора.

Выводы

Подводя итог, можно констатировать, что в настоящей работе впервые предложена непротиворечивая схема построения математической модели МЭМС – резонатора балочного типа, которая опирается на фундаментальные положения механики деформируемого твердого тела и теории электрических явлений. Показано, что частотно зависимые свойства МЭМС – резонатора полностью определяются механическими смещениями материальных частиц поляризованного сегнетоэлектрика подвижной части стержня. Приведена методика расчета продольного компонента вектора смещения подвижной части МЭМС – резонатора, которая учитывает реакцию опор стержня.

Литература

1. *Варадан В.*, Виной К., Джозе К. ВЧ МЭМС и их применение. – Москва: Техносфера, 2004. – 528 с.
2. *Lematre M.*, Tran-Huu-Hue L.-P., Feuilard G. Modeling and Numerical Study of the Electroacoustic Behavior in Integrated Piezoelectric Structures under External Mechanical Stress // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, 2009, vol. 56, № 5. P. 1085 – 1099.
3. *Park J.-H.*, Cho B.-H., Choi S.-J. Analysis of the Thermal Balance Characteristics for Multiple-Connected Piezoelectric Transformers // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, 2009, vol. 56, № 8. P. 1617 – 1626.
4. *Loyau V.*, Liu Y.-P., Costa F. Analyses of the Heat Dissipated by Losses in a Piezoelectric Transformers // IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control, 2009, vol. 56, № 8. P. 1745 – 1752.
5. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практические применения. - М.: ИЛ, 1949. - 718 с.
6. *Власов К. Б.* Некоторые вопросы теории упругих ферромагнитных (магнитострикционных) сред // Изв. АН СССР. Сер. физическая. – 1957. – Т. 21. – № 8. – С. 1140–1148.
7. *Racah G.* Determinazione del numero dei tensori isotropi indipendenti di rango n. – Rend. Acad. Linc., 1933, 17, 6. P. 386 – 389.
8. *Канторович Л.В.*, Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М. – Л., ГИТТЛ, 1950. – 695 с.