УДК 621.385.001

Е.Д. Белявский, д-р физ.-мат. наук, Т.А. Саурова

# Оптимизация погонного усиления АЛБВ-Н с большим фокусирующим магнитным полем и с переменной фазовой скоростью

**Рассматривается возможность повышения погонного усиления в автофазной ЛБВ при помощи оптимального профилирования фазовой скорости в замедляющей системе при предельно возможных значениях электронного КПД. Оптимизация погонного усиления проведена в рамках приближенной аналитической нелинейной теории с использованием вариационного метода.**

**The possibility of increasing of the distributed gain in the auto-phase traveling wave tube by means of the optimal phase velocity profiling in the slow-wave circuit under the most available efficiency values is investigated. Optimization of the distributed gain is performed within the frames of the simplified analytical nonlinear theory using variation method.**

## Введение

В [1] предложена автофазная лампа бегущей волны с азимутально-несимметричной волной (АЛБВ–Н) и с большим фокусирующим магнитным полем, таким, что $\omega_c \rangle 2\omega$, где $\omega_c$ – циклотронная частота, $\omega$ – круговая частота сигнала, и сформулирована ее строгая нелинейная теория. Проведенный в [1] численный анализ усиления такой ЛБВ показал возможность повышения коэффициента ее усиления до 30 дБ в однокаскадном и до 50–60 дБ в двухкаскадном исполнении при значениях электронного КПД порядка 80%. В [2] предложен группирователь для такой АЛБВ–Н со 100% захватом электронов в сгустки, а в [3] построена теория и проведен численный анализ АЛБВ–Н с указанным группирователем, в котором получен электронный КПД более 96%. Основным недостатком такой АЛБВ–Н является низкий погонный коэффициент усиления из-за большой длины автофазного участка прибора.

В данной работе на основе упрощенной нелинейной теории захвата сгустков в АЛБВ–Н [4] проводится оптимизация погонного коэффициента усиления и сравнение полученных результатов с результатами расчета по строгой теории.

## 1. Исходные положения

В [4] были получены упрощенные уравнения АЛБВ–Н на автофазном участке:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \eta h_0 \operatorname{Re}\left(-j\dot{E}e^{jX}\right) = \eta h_0 \frac{d}{dz}\left(\frac{\left(\omega - n\dot{\Theta}\right)}{2\eta h_0^2}\right) = -\eta h_0 E_э, \qquad (1)$$

$$E^2 - E_0^2 + 2\alpha\int_0^z E^2 dz = 2RI_0\int_0^z E_э dz, \qquad (2)$$

где $t$ – текущее время,

$$X = \omega t - n\theta - \int_0^z h_0 dz,$$

$\theta, z, r$ – цилиндрические координаты электрона, $\dot{E}$ – комплексная амплитуда $z$- составляющей электрического поля синхронной волны; $n$ – номер азимутального вида колебаний в замедляющей системе (ЗС);

$\dot{\theta}$ – азимутальная скорость электронов;

$\eta = \dfrac{e}{m_0}$ – отношение заряда электрона к его массе покоя;

$h_0 = \dfrac{\omega}{v_{фn}}$, $v_{фn}$ –фазовая скорость $n$ –й бегущей волны

$E = \left|\dot{E}\right|$, $E_0 = E(0)$ – начальное (на входе при $z$=0) значение $E(z)$;

$R = \dfrac{E^2}{2P} = \dfrac{E_0^2}{2P_{вх}} = const$ – параметр связи замедляющей системы,

$P$ – ВЧ мощность, проходящая через поперечное сечение волновода;

$P_{вх} = P(0)$; $I_0$ – продольный ток невозмущенного потока;

$E_э = -\dfrac{d}{dz}\left[\dfrac{\left(\omega - n\dot{\Theta}\right)^2}{2\eta h_0^2}\right]$ – эквивалентное статическое поле;

$\alpha$ – параметр распределенных потерь в ЗС (в непер/метр).

При полной экранировке катода от магнитного поля $\dot{\theta} = \eta B/2 = \frac{\omega_c}{2}$, где $B$ – продольная составляющая магнитной индукции статического фокусирующего поля.

Если положить

$$X = X_0 - \arg\dot{E} + q\sin\Omega t + \dots, \quad (3)$$

то для определения $q, \Omega, X_0$ получаем из (1) такую систему уравнений

$$\Omega^2 q = 2\eta h_0 \mathrm{J}_1(q) E\cos X_0 \quad (4)$$

$$E_э = E\,\mathrm{J}_0(q)\sin X_0, \quad (5)$$

Здесь $X_0(z)$ – фазовая координата центра осциллятора по отношению к бегущей волне; $q(z)$ – наибольшая амплитуда осцилляторов в точке $z$ ($2q = \Delta$ – фазовая ширина сгустка), $q_0 = q(0)$, $\Omega(z)$ – круговая частота осциллятора, $\Omega_0 = \Omega(0)$; $\mathrm{J}_k(q)$ – функция Бесселя $k$-го порядка ($k$=0,1).

Уравнения (4), (5) получены в предположении, что величины $\Omega, q, E, h_0, X_0, E_э$ являются адиабатическими (т.е. не изменяются за период колебаний осциллятора). Условие адиабатической инвариантности имеет вид:

$$q^2\Omega = q_0^2\Omega_0 = \nu, \quad (6)$$

где $\nu = const$ – адиабатический инвариант [5].

Все электроны в сгустке являются осцилляторами при выполнении неравенства

$$\frac{|E_э|}{E} \langle \mathrm{J}_0(q). \quad (7)$$

Соотношения (2) – (7) и являются исходными для дальнейшего рассмотрения.

## 2. Переход к безразмерным параметрам

В теории автофазной ЛБВ используются следующие безразмерные переменные [1]:

$b = \frac{h_0 - \beta_e}{C\beta_e}$ – параметр несинхронности;

($\beta_e = \frac{\omega}{v_e}$, $v_e = \sqrt{2\eta U_0}$, $U_0$ –ускоряющее напряжение); $b1 = b + g/C$;

$C = \left[\frac{I_0 R_n}{4U_0\beta_e^2}\right]^{1/3}$ – параметр усиления;

$g = \frac{\eta B}{2\omega} = \frac{\omega_c}{2\omega}$ – параметр магнитного поля;

$x = C\beta_e z$ – безразмерная длина;

$d = \frac{\alpha}{C\beta_e}$ – параметр затухания;

$\dot{F}$ – безразмерная амплитуда синхронной волны в ЗС;

$F = \left|\dot{F}\right| = \frac{\eta}{\omega v_e C^2} E$; $\quad F_э = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2C}\left(\frac{1-g}{1+Cb}\right)^2\right]$ – безразмерное значение эквивалентного статического поля.

Уравнения (2) – (7) принимают в безразмерных переменных следующий вид:

$$F^2 - F_0^2 + 2d\int_0^x F^2 dx = 4\int_0^x F_э dx, \quad (8)$$

$$X = X_0 - \arg\dot{F} + q\sin\Omega_1\omega t + \dots, \quad (9)$$

где $\Omega_1 = \Omega/\omega$,

$$\Omega_1^2 q = 2C^2(1+Cb) F\,\mathrm{J}_1(q)\cos X_0, \quad (10)$$

$$F_э = F\,\mathrm{J}_0(q)\sin X_0, \quad (11)$$

$$q^2\Omega_1 = q_0^2\Omega_1(0), \quad (12)$$

$$\frac{|F_э|}{F} \langle \mathrm{J}_0(q). \quad (13)$$

## 3. Оптимизация погонного усиления

Подставляя в (8) $F_э = -\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2C}\left(\frac{1-g}{1+Cb}\right)^2\right]$, получаем при $d$=0

$$\eta_e = \frac{C}{2}\left(F^2 - F_0^2\right) = \left(\frac{1-g}{1+Cb_0}\right)^2 - \left(\frac{1-g}{1+Cb}\right)^2, \quad (14)$$

где $\eta_e$ – электронный КПД на автофазном участке (g=const), $F_0, b_0$ - модуль безразмерной комплексной амплитуды поля и параметр несинхронности на входе в автофазную секцию.

Из (14) следует, что

$$(1+Cb)^2 = \frac{1}{(1-g)^2}\left[\frac{(1-g)^2}{(1+Cb_0)^2} - \frac{C}{2}\left(F^2 - F_0^2\right)\right]^{-1}, \quad (15)$$

т. е. (1+$Cb$) является функцией только от $F$.

Автофазная ЛБВ-Н с переменной фазовой скоростью является усилителем бегущей волны, поэтому задача оптимизации ее погонного усиления состоит в поиске такой зависимости фазовой скорости волны (т.е. параметра несинхронности $b(x)$), для которой длина ее автофазного участка $x_L$ является минимальной при заданном усилении прибора.

Будем искать оптимальный закон измерения $b(x)$ среди зависимостей, для которых $F(x)$ является монотонно меняющейся функцией. При этом в качестве функционала удобно выбрать безразмерную длину $x_L$ при заданном усилении (т.е. изменении $F(x)$ от $F_0$ до $F_{max}$).

Продифференцируем уравнение (8) (при $d$=0) по $x$

$$F\ \frac{dF}{dx}=2F\text{э}\text{, откуда } \frac{dx}{dF}=\frac{1}{2F_{\text{э}}/F}, \qquad (16)$$

Интегрируя (16) по $F$ в пределах от $F_0$ до $F_{max}$, получаем

$$x_L=\int\limits_{F_0}^{F_L}\frac{dF}{2F_{\text{э}}/F}. \qquad (17)$$

Исключая из (17), (10), (11) и (12) $F_{\text{э}}$ и $\Omega_1$, приводим с учетом (15) вариационную задачу к следующему виду:

$$x_L=\int\limits_{F_0}^{F_L}\frac{dF}{2\,\mathrm{J}_0(q)\sin X_0}, \qquad (18)$$

$$F\left[1+Cb(F)\right]q^3\,\mathrm{J}_1(q)\cos X_0=\nu, \qquad (19)$$

где $\nu=F_0(1+Cb_0)q_0^3\,\mathrm{J}_1(q_0)\cos X_0(0)=const$ — адиабатический инвариант [5], зависящий от начальных значений величин $q$, $F$, $b$, $X_0$ на входе в автофазный участок ($x$=0)

Вариационная задача (18), (19) является одномерной, с независимой переменной $F$ и двумя искомыми функциями $q(F)$, $X_0(F)$, причем уравнение (19) является алгебраической связью между величинами $q$, $X_0$, т.е. имеет место задача на условный экстремум [6]. Следуя общему правилу (метод неопределенных множителей Лагранжа), составим вспомогательный функционал

$$\mathrm{J}_h=\int\limits_{F_0}^{F_{\max}}\left\{\frac{1}{2\,\mathrm{J}_0(q)\sin X_0}+p(F)\times\right.$$

$$\left.\times(F(1+Cb)q^3\,\mathrm{J}_1(q)\cos X_0-\nu)\right\}dF, \qquad (20)$$

где $p(F)$ – вспомогательная функция (множитель Лагранжа).

Уравнения Эйлера для функционала (20) имеют следующий вид:

$$-\left[2\,\mathrm{J}_0(q)\sin X_0\right]^{-2}2\,\mathrm{J}_0'(q)\sin X_0+p(F)\times$$

$$\times F\left[1+Cb(F)\right]\left[q^3\,\mathrm{J}_1(q)\right]'\cos X_0=0, \qquad (21)$$

$$-\left[2\,\mathrm{J}_0(q)\sin X_0\right]^{-2}2\,\mathrm{J}_0(q)\cos X_0-p(F)\times$$

$$\times F\left[1+Cb(F)\right]q^3\,\mathrm{J}_1(q)\sin X_0=0. \qquad (22)$$

Здесь везде штрих обозначает дифференцирование по $q$. Исключая из (21) и (22) $p(F)$ получаем

$$\left[\ln \mathrm{J}_0(q)\right]'\mathrm{tg}^2X_0=-\left[\ln q^3\,\mathrm{J}_1(q)\right]'.$$

Учитывая, что

$$\mathrm{J}_0'(q)=-\mathrm{J}_1(q);\ \mathrm{J}_1'(q)=\mathrm{J}_0(q)-\mathrm{J}_1(q)/q,$$

представим эту зависимость в следующем виде:

$$\mathrm{tg}^2X_0=\frac{\mathrm{J}_0^2(q)}{\mathrm{J}_1^2(q)}+\frac{2\,\mathrm{J}_0(q)}{q\,\mathrm{J}_1(q)}. \qquad (23)$$

Из (19) с учетом (23) и (15) получаем

$$F\frac{1}{|1-g|}\left[\frac{(1-g)^2}{(1+Cb_0)^2}-\frac{C}{2}\left(F^2-F_0^2\right)\right]^{-1/2}=$$

$$=\nu\frac{1}{q^3\,\mathrm{J}_1(q)}\left[1+\frac{2\,\mathrm{J}_0(q)}{q\,\mathrm{J}_1(q)}+\frac{\mathrm{J}_0^2(q)}{\mathrm{J}_1^2(q)}\right]^{1/2}. \qquad (24)$$

Из соотношения (16) с учетом (11) ($x(F_0)$=0), получаем соотношение для безразмерной координаты $x$

$$x(q)=\int\limits_{q_0}^{q}\frac{F'(q)dq}{2\,\mathrm{J}_0(q)\sin X_0(q)}. \qquad (25)$$

Соотношения (14), (15), (23), (24),(25) и представляют собой решение вариационной задачи в параметрической форме.

## 4. Анализ оптимального исследования

На основании (14), (15), (23), (24), (25), путем расчета выражений с использованием математического пакета MatLab, получены зависимости, позволяющие оптимизировать погонное усиление на автофазном участке ЛБВ (рис. 1- 5).

На рис.1 приведен график зависимости положения сгустка относительно тормозящего полупериода электромагнитной волны ($\mathrm{tg}^2X_0$) от полуширины фазового сгустка ($q$). Из этого рисунка видно, что $\mathrm{tg}^2X_0$ является монотонно убывающей функцией от $q$ ,т.е. по мере уменьшения фазовой ширины сгустка ($\Delta=2q$) центр пакета осцилляторов смещается в сторону максимума тормозящего поля волны ($\mathrm{tg}^2 X_0 \to \infty$ при $\Delta \to 0$). То. из решения вариационной задачи следует, что смещение сгустка в сторону максимума тормозящего поля одновременно сопровождается уменьшением его фазовой ширины.

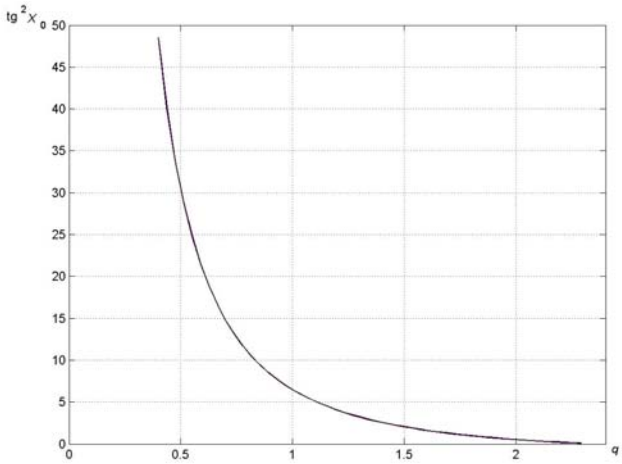


**Рис. 1. Зависимость** $\mathrm{tg}^2 X_0$ **от** $q$

На рис. 2 представлены графики зависимостей $F(q)$ и $F_э(q)$ для различных значений полуширины фазового сгустка на входе в автофазный участок (параметра $q_0$). Из этого рисунка видно, что характер изменения амплитуды волны $F(q)$ и эквивалентного поля $F_э(q)$ во всех случаях является монотонным, однако различен для разных значений параметра q0, причем по мере увеличения амплитуды бегущей волны $F(q)$ фазовая ширина сгустка $\Delta = 2q$ монотонно уменьшается, т.е. пакет осцилляторов сжимается.

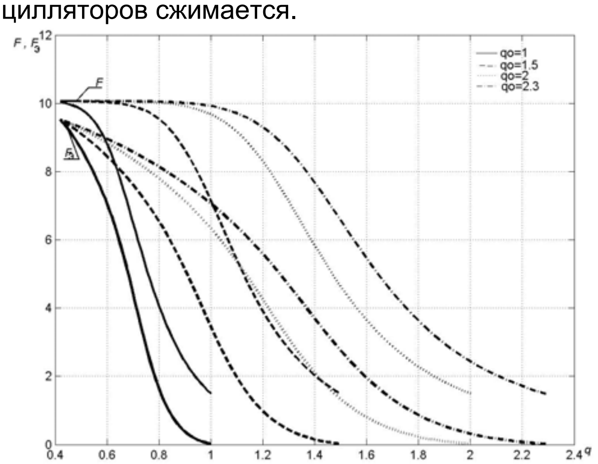


**Рис. 2. Графики зависимостей безразмерных амплитуд бегущей волны *F* и эквивалентного статического поля *F*$_э$ от *q* для различных значений *q*$_0$**

Примечательным фактом представленной зависимости является то, что со сжатием пакета осцилляторов (уменьшением $q$) амплитуда бегущей волны $F$ стремится к значению, равному амплитуде статического поля, т.е. отношение $\frac{F_э}{F}$ стремится к своему предельному значению, равному единице.

Таким образом, смещение центра сгустка электронов в сторону максимума тормозящего ВЧ поля волны происходит с одновременным уменьшением его фазовой ширины, что улучшает энергообмен волны и пучка на автофазном участке.

Полученное решение вариационной задачи определяет оптимальный закон изменения параметра несинхронности $b(x)$ для различных значений полуширины электронного сгустка на входе в пространство взаимодействия автофазной секции.

Графики оптимизированного закона изменения параметра несинхронности $b$ вдоль длины взаимодействия $x$ для различных значений полуширины сгустка на входе в автофазный участок представлены на рис. 3. При этом значения безразмерных параметров: $C$=0,02; $F_0$=1,5; $b_0$=-100,2; значения $q_0$ =1; 1,5; 2; 2,3. Из рис. 3 следует, что увеличению ширины сгустка $2q_0$ на входе в автофазный участок соответствует существенное повышение длины $x$, даже при оптимальном изменении параметра несинхронности; при этом указанная длина значительно меньше, чем при отсутствии профилирования фазовой скорости. Последнее утверждение показывает сравнение оптимального расчета с результатами строгой теории из работы [3], в которой полуширина сгустка была неизменной ($q_0$=1,5 , длина насыщения уменьшилась в результате оптимизации с 22 до 6,7).

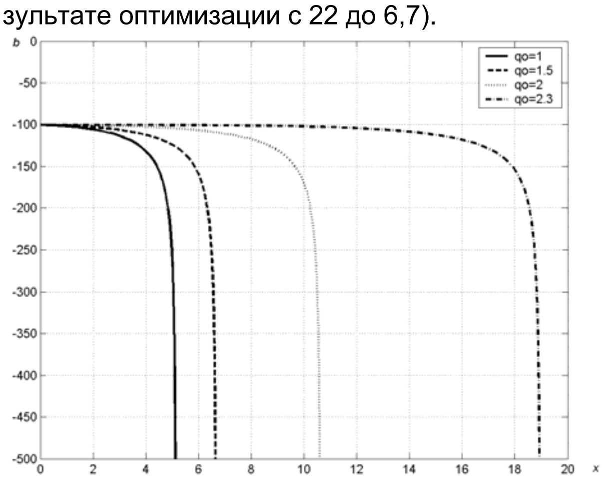


**Рис. 3. Зависимости параметра несинхронности *b* от безразмерной длины *x* при различных значениях *q*$_0$ (1; 1,5; 2; 2,3)**

Рис. 4 иллюстрирует зависимость безразмерной амплитуды бегущей волны F вдоль длины автофазного участка x для различных значений $q_0$ (1; 1,5; 2; 2,3) и при изменении параметра несинхронности вдоль участка, соответствующего рис. 3. Из рис. 4 видно, что крутизна нарастания оптимизированной при помощи изменения по длине автофазного участка параметра несинхронности $b(x)$ величины $F$ уменьшается с увеличением начальной ширины сгустка ($2q_0$), особенно при $q_0>1$. Это связано с тем, что при большой ширине сгустка для обеспечения его устойчивости необходимо сильно смещать его центр по отношению к максимуму тормозящего полупериода бегущей волны, резко уменьшая тем самым эффективность взаимодействия. По мере увеличения $F$ фазовая ширина сгустка уменьшается и появляется возможность смещения его в сторону максимума тормозящего ВЧ поля без нарушения устойчивости, что приводит к увеличению эффективности взаимодействия.

Особенно заметным становится прирост погонного коэффициента усиления за счет профилирования параметра несинхронности при больших величинах $q_0$. В этом легко убедиться, если провести на рис. 4 касательные к кривым в начале координат (касательные описывают закон увеличения $F$ при постоянном параметре $b$ по всей длине автофазного участка).

Из представленного на рис. 4 графика видно, что при $q_0=1$ усиление на автофазном участке (отношение $F/F_0$) для оптимизированной с помощью профилирования фазовой скорости зависимости $F(x)$ достигается при длине $x$, соизмеримой с соответствующей (касательная в начале координат) режиму с постоянным параметром несинхронности. Для зависимости $F(x)$ же при $q_0=1{,}5$ длина автофазной секции $x$ после оптимизации сокращается с 12,2 до 6,7, т.е. почти в 2 раза. Из этого можно заключить, что существенное увеличение погонного усиления достигается для больших значений $q_0$. Полученный результат важен для практической реализации описываемого режима преобразования энергии в АЛБВ. КПД такой ЛБВ существенно зависит от числа захваченных электронов в сгустке по сравнению со всеми электронами, вылетевшими из катода за период ВЧ поля. Большой процент захвата электронов можно получить только в случае больших значений $\Delta_0$, близких к предельным по устойчивости $\Delta_0 \sim 3\pi/2$ [6]). Но при этом для получения усиления более 5 дБ при использовании режима с постоянным законом изменения параметра несинхронности необходимо брать очень большую длину автофазного участка. Полученный же оптимальный закон $b(x)$ позволяет заметно уменьшить эту длину.

На рис. 5 приведена зависимость электронного КПД $\eta_e$ от безразмерной длины автофазной секции $x$ для $q_0$ (1; 1,5; 2; 2,3) при значениях безразмерных параметров C=0,02; F0=1,5; b0=-100,2. Из этого рисунка видно, что электронный КПД ηе достигает значения порядка 97% (дальнейшее повышение КПД невозможно из-за появления остановок электронов, не учитываемых в приближенной теории, в отличии от строгой теории [3]). По мере увеличения начальной ширины сгустка q0 такие значения ηе достигаются на большей длине автофазного участка x; тем большей, чем больше начальная ширина захваченного сгустка (2q0).

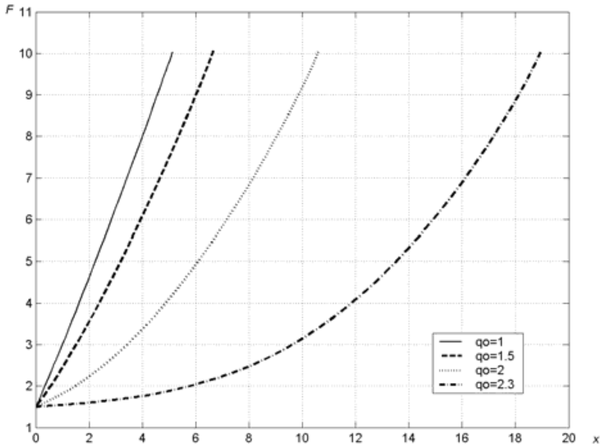


**Рис. 4. График зависимости безразмерной амплитуды бегущей волны $F$ от длины автофазного участка $x$ для разных значений $q_0$ (1; 1,5; 2; 2,3) при параметрах $C$=0,02; $F_0$=1,5; $b_0$=-100,2**

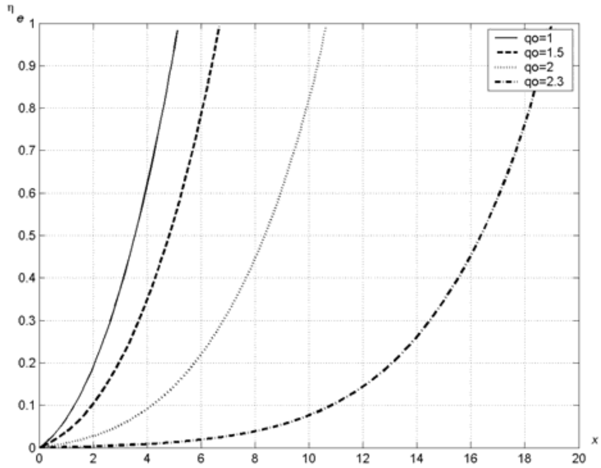


**Рис. 5 Зависимость электронного КПД ηе от безразмерной длины x автофазной секции для значений q0 (1; 1,5; 2; 2,3) при безразмерных параметрах C=0,02; F0=1,5; b0=-100,2**

## Выводы

*1.*При помощи решения вариационной задачи на базе приближенной аналитической нелинейной теории АЛБВ проведена оптимизация погонного усиления лампы профилированием параметра несинхронности $b(x)$. Определен закон изменения $b(x)$, позволяющий сократить длину автофазного участка.

*2.* Показано, что оптимизация энергообмена осуществляется непрерывным смещением центра захваченного сгустка электронов в сторону максимума тормозящего ВЧ поля волны в ЗС с одновременным уменьшением его фазовой ширины (т.е. сжатием сгустка электронов).

*3.* Проведенные расчеты показали, что увеличение погонного усиления достигнуто с сохранением высоких значений [3] электронного КПД (близких к предельно возможным).

**Литература**

1. *Балачук Я.П.*, Белявский Е.Д., Грязнова Т.А. Теория автофазных приборов О-типа с азимутально- несимметричной волной и большим фокусирующим полем //Электроника и связь. – 2005. – Т.26. – С. 9 – 12.
2. *Белявский Е.Д.*, Пилипович С.М., Теличкина О.В. Улучшение группировки в АЛБВ-Н с большим фокусирующим полем //Электроника и связь. – 2007. – №5. – С. 30 – 32.
3. *Белявский Е.Д.*, Пилипович С.М. Автофазная ЛБВ-Н с переменной фазовой скоростью и соленоидальной фокусировкой со 100% захватом электронов // Электроника и связь. – 2008. – №1-2. – С. 116 – 118.
4. *Белявский Е.Д*. О режиме захвата электронных сгустков азимутальнонесимметричной волной в статическом магнитном поле. // Известия ВУЗов “Радиофизика”.– 1987.–Т.30. – №11. – С.1410 – 1412.
5. *Ландау Л.Д.,* Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука. – 1965.
6. *Смирнов В.И*. Курс высшей математики. Т. 4. – М.: Гостехиздат. – 1953.