УДК 519.213

В.С. Берегун, О.І. Красильніков, канд. фіз.-мат. наук

Апроксимативні методи знаходження щільності імовірностей

Систематизированы методы теоретического и экспериментального нахождения плотности вероятностей, базирующиеся на ее представлении линейной комбинацией базисных функций.

The methods of the theoretical and experimental finding of probability density based on its presentation by linear combination of base functions are systematized.

Вступ

В різноманітних задачах обробки випадкових сигналів найбільш поширеною є модель гауссівських випадкових процесів. Однак в багатьох реальних випадках така модель не є адекватною [1]. Зокрема це стосується ехосигналів в радіо- та гідролокації [2], флуктуаційних сигналів різноманітного походження [3] та ін. Закони розподілу негауссівських сигналів відносно просто можуть бути виражені за допомогою характеристичних функцій [3, 4], однак знаходження щільностей імовірностей таких сигналів за формулою обернення в більшості випадків не має точних аналітичних розв’язків.

При подачі на лінійну систему гауссівських випадкових процесів процеси на виході системи теж будуть гауссівськими [1, 4], а для негауссівських вхідних процесів можуть відбуватись ефекти нормалізації та денормалізації [5, 6] вихідних процесів. Задача точного знаходження щільності імовірностей процесів на виході лінійної системи при негауссівських вхідних процесах в теперішній час не розв’язана.

При проходженні випадкових сигналів через нелінійні системи, наприклад через типовий тракт виявлення [4], їхній закон розподілу принципово змінюється. Точні розв’язки задачі знаходження щільності імовірностей випадкових процесів на виході нелінійної системи можливі за умов, коли нелінійна система є безінерційною та має монотонну амплітудну характеристику.

Таким чином, як при знаходженні щільності імовірностей самих випадкових сигналів, так і при аналізі результатів їхніх функціональних перетворень в багатьох випадках необхідно застосовувати наближені методи.

1. Постановка задачі

Найбільш розповсюдженими наближеними методами знаходження щільності імовірностей є топографічні та апроксимативні методи.

Топографічні методи базуються на системах розподілів Пірсона [7] або Джонсона [8] та полягають в поданні невідомої щільності імовірностей точкою на площині в системі координат (β_1, β_2), де $\beta_1 = \gamma_3^2$, $\beta_2 = \gamma_4 + 3$, γ_k – k-й кумулянтний коефіцієнт випадкового процесу, що досліджується. Топографічні методи запропоновано використовувати [9] при наближених знаходженнях щільності імовірностей флуктуаційних сигналів та їхніх лінійних перетворень.

Головним недоліком топографічних методів є неможливість врахування моментів, порядок яких більше чотирьох, що в багатьох випадках призводить до неоднозначних розв’язків задач наближеного визначення невідомої щільності імовірностей.

Апроксимативні методи [10, 11] базуються на класичних математичних методах [12, 13] подання досліджуваної функції $f(x)$ за допомогою лінійної комбінації функцій $\varphi_k(x)$, тобто у вигляді функціонального ряду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \tag{1}$$

де $\varphi_k(x)$ – деякі прості і достатньо добре досліджені функції, які називаються базисними; c_k – коефіцієнти розкладу в базисі $\varphi_k(x)$. Класичними прикладами ряду (1) є степеневі і тригонометричні ряди.

В теорії сигналів і систем методи, які базуються на поданні (1), давно використовуються в задачах аналізу, синтезу і передачі сигналів [14-16], дослідження систем [17-19], кореляційно-спектрального аналізу випадкових процесів [10, 11, 20], дослідження щільності імовірностей [11, 21-23].

Сформулюємо задачу знаходження щільності імовірностей випадкової величини з використанням подання (1). Нехай $p_N(x)$ – апроксимація неперервної щільності імовірностей $p(x)$ частковою сумою ряду (1), тобто

$$p_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k \varphi_k(x), \tag{2}$$

де $\varphi_k(x)$ – задана система базисних функцій. Необхідно визначити коефіцієнти c_k так, щоб помилка ε_N апроксимації була мінімальною в смислі вибраної метрики (відстані) між $p(x)$ і $p_N(x)$ і прямувала до нуля при $N \to \infty$.

При використанні подання (1) та апроксимації (2) основними задачами є вибір базисних функцій $\varphi_k(x)$, визначення умов існування коефіцієнтів c_k і способи їх обчислення, збіжність ряду і єдиність розв’язку.

Подання у вигляді (2) широко використовується в теоретичних та експериментальних методах знаходження щільності імовірностей під різними назвами, що в певній мірі ускладнює його практичне застосування.

Метою даної роботи є систематизація апроксимативних методів подання щільності імовірностей базуючись на методі моментів та методі найменших квадратів.

2. Метод моментів

Припустимо, що відомі початкові моменти α_n, $n=\overline{1,N}$, випадкової величини ξ. У цьому випадку з використанням (2) неважко отримати систему $N+1$ рівнянь для визначення коефіцієнтів c_k, $k=\overline{0,N}$, прирівнюючи моменти α_n моментам для щільності $p_N(x)$:

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \tilde{\alpha}_{nk} = \alpha_n, \tag{3}$$

де $n=\overline{0,N}$, $\alpha_0=1$; $\tilde{\alpha}_{nk} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n \varphi_k(x)dx$.

В загальному випадку рівняння (3) не є лінійними, і складність їх розв’язку суттєво залежить від вибору базисних функцій $\varphi_k(x)$. Крім того для деяких базисних функцій апроксимація (2) може мати від’ємні значення, що не відповідає властивостям щільності імовірностей.

Поставимо вимогу, щоб виконувались умови:

$$1)\ \varphi_k(x) \ge 0; \qquad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x)dx = 1. \tag{4}$$

Тоді $\varphi_k(x)$ є деякими щільностями імовірностей, $\tilde{\alpha}_{0k}=1$, а коефіцієнти c_k задовольняють умовам:

$$1)\ c_k \ge 0; \qquad 2)\ \sum_{k=0}^{N} c_k = 1. \tag{5}$$

При виконанні умов (4) і (5) формула (2) називається кінцевою дискретною сумішшю розподілів [24]. Зазвичай приймають всі $\varphi_k(x)$ одного типу.

Розглянемо окремий випадок суміші розподілів, що не потребує розв’язання рівнянь (3). Припустимо, що інтервал практично можливих значень випадкової величини ξ становить $[x_{\min}, x_{\max}]$, тобто $P\{x_{\min} \le \xi < x_{\max}\} \approx 1$. Розіб’ємо цей інтервал на N інтервалів шириною $\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}$. Введемо функцію

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x}, x \in \left(-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}\right], \\ 0, x \notin \left(-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Визначимо базисні функції $\varphi_k(x)$ наступним чином:

$$\varphi_k(x) = \varphi(x - x_k), \tag{7}$$

де $x_k = x_{\min} + \frac{(2k-1)\Delta x}{2}$, $k=\overline{1,N}$.

Тоді апроксимація (2) є сумішшю рівномірних розподілів (6)

$$p_N(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \varphi(x - x_k), \tag{8}$$

де p_k – імовірність потрапляння значень досліджуваної випадкової величини у відповідний інтервал, $p_k = \Delta x p(x_k)$, $p(x_k)$ – значення щільності імовірностей в точці x_k.

В статистиці апроксимація (8) приводить до класичної оцінки $\overline{p}_N(x)$ невідомої щільності імовірностей у вигляді гістограм

$$\overline{p}_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \overline{p}_k \varphi(x - x_k),$$

де $\overline{p}_k$ – частоти потрапляння досліджуваної випадкової величини ξ у відповідний інтервал.

В загальному випадку в якості вагових функцій, що задовольняють умовам (4), можуть бути обрані довільні щільності імовірностей. Найбільш вивченими сумішами розподілів є гауссівські (полігауссівські) суміші розподілів [25, 26], для яких

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sigma_k\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x - m_k)^2}{2\sigma_k^2}\right\}. \tag{9}$$

Використання сумішей для побудови апроксимації (2) пов’язане з серйозними проблемами. Це пояснюється тим, що крім коефіцієнтів c_k необхідно знаходити параметри базисних функцій. Зокрема, якщо в якості $\varphi_k(x)$ прийняти функції (9), то при $N=2$ кількість невідомих дорівнює шести. Крім того, достатньо складно знайти помилку апроксимації.

При використанні сумішей в задачах статистики також виникають суттєві складнощі, які пов’язані з отриманням оцінок параметрів суміші і аналізом їх властивостей. Тому в статистичних задачах використовують [22] спрощений варіант суміші, який має такий вигляд

$$\overline{p}_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{h(N)}\varphi\left(\frac{x-\xi_k}{h(N)}\right), \qquad (10)$$

де функція $\varphi(x)$ задовольняє умовам (4) і називається ядром, $h(N)$ – коефіцієнти вкладу, ξ_k, $k=\overline{1,N}$, – вибірка об'єму N досліджуваної випадкової величини ξ.

Оцінки (10) достатньо добре вивчені [27] і називаються ядерними оцінками щільності імовірностей $p(x)$. Для ядерних оцінок визначені додаткові умови на ядро і коефіцієнти вкладу, при яких оцінки (10) є асимптотично незміщеними і слушними.

3. Метод найменших квадратів

Нехай апроксимація щільності імовірностей $p(x)$, $x\in[a,b]$, задана формулою (2). Визначимо помилку апроксимації ε наступним чином:

$$\varepsilon^2 = \int_a^b \left[p(x) - p_N(x)\right]^2 dx. \qquad (11)$$

Визначимо умови, при яких помилка буде мінімальною. Для цього продиференціюємо праву частину (11) по c_n і прирівняємо отриманий результат нулю:

$$2\int_a^b \left[p(x) - p_N(x)\right]\frac{dp_N(x)}{dc_n}dx = 0. \qquad (12)$$

Підставляючи в (12) формулу (2), отримуємо рівняння для знаходження коефіцієнтів c_k:

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)dx = \int_a^b p(x)\varphi_n(x)dx. \qquad (13)$$

Розглянемо окремі випадки, конкретизуючи базисні функції $\varphi_k(x)$.

1. Нехай $\varphi_k(x) = \left\{x^k\right\}_{k=0}^{\infty}$. У цьому випадку формула (13) набуває вигляду

$$\sum_{k=0}^{N} c_k \int_a^b x^{k+n}dx = \alpha_n, \qquad (14)$$

де α_n – початкові моменти випадкової величини ξ. Очевидно, що формула (14) є окремим випадком (3).

2. Нехай функції $\varphi_k(x)$ задовольняють умові ортогональності, тобто

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)dx = \begin{cases} 0, & k\neq n, \\ \int_a^b \varphi_k^2(x)dx, & k=n. \end{cases} \qquad (15)$$

Тоді з формули (13) отримуємо

$$c_k = \frac{\int_a^b p(x)\varphi_k(x)dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x)dx}. \qquad (16)$$

Відзначимо, що функції (7) розглянуті вище, задовольняють умові (15), а обчислювання за формулою (16) з використанням (6) і (7) дають $c_k = p_k = \Delta x p(x_k)$, тобто співпадають з формулою (8).

3. Об'єднаємо випадки 1 і 2, вводячи поліноми

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^{k} h_{kj}x^j, \qquad (17)$$

які задовольняють умові (15), тобто є ортогональними. Такими поліномами можуть бути, зокрема, поліноми Лежандра [13].

У цьому випадку коефіцієнти c_k, які визначаються формулою (16), можна виразити через початкові моменти α_n випадкової величини ξ:

$$c_k = \frac{\sum_{j=0}^{k} h_{kj}\alpha_j}{\int_a^b \varphi_k^2(x)dx}.$$

Ми розглянули задачу апроксимації щільності імовірностей $p(x)$, що задана на кінцевому інтервалі $[a,b]$. Для застосування отриманих результатів необхідно виконання умов:

$$\int_a^b p^2(x)dx < \infty, \qquad (18)$$

$$\int_a^b \varphi_k^2(x)dx < \infty. \qquad (19)$$

Багато розподілів, що використовуються в прикладних задачах, визначені на всій числовій осі чи на півосі. Для таких розподілів умова (18) може часто не виконуватись, а умова (19) для функцій (17) при хоча б одній нескінченній границі не виконується ніколи.

Тим не менш, отримані результати можна узагальнити, замінивши умови (18) і (19) наступними умовами

$$\int_a^b p^2(x)\rho(x)dx < \infty, \qquad (20)$$

$$\int_a^b \varphi_k^2(x)\rho(x)dx < \infty, \qquad (21)$$

де функція $\rho(x)$, яка називається ваговою [13], задовольняє умовам:

$$1)\ \rho(x) \ge 0; \qquad 2)\ \int_a^b \rho(x)dx < \infty,$$

а межі інтегрування можуть бути як скінченними, так і нескінченними. Якщо інтервал $[a,b]$ є нескінченим, то умови (20), (21) повинні бути доповнені [28] умовою існування степеневих моментів ρ_n вагової функції

$$\rho_n = \int_a^b x^n \rho(x)dx < \infty, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

При умовах (20), (21) помилка апроксимації ε визначається наступним чином

$$\varepsilon^2 = \int_a^b \left[p(x) - p_N(x) \right]^2 \rho(x)dx,$$

а умова ортогональності функцій $\varphi_k(x)$ набуває вигляду

$$\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_n(x)\rho(x)dx = \begin{cases} 0, & k \ne n, \\ \int_a^b \varphi_k^2(x)\rho(x)dx, & k = n. \end{cases}$$

Якщо в якості функцій $\varphi_k(x)$ використовуються поліноми (17), то коефіцієнти c_k апроксимації (2) визначаються виразом

$$c_k = \frac{\int_a^b p(x)\rho(x)\varphi_k(x)dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x)\rho(x)dx}. \qquad (22)$$

Коефіцієнти c_k, що визначаються формулою (22), є коефіцієнтами ряду Фур’є [12, 13], а формула (2) – часткова сума цього ряду. Таким чином, якщо виконуються умови (20) і (21), то щільність імовірностей $p(x)$ може бути розкладена в ряд Фур’є

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \qquad (23)$$

де $\varphi_k(x)$ – система ортогональних поліномів (17), яка задовольняє умові (21), а коефіцієнти c_k знаходяться за формулою (22).

Ряди (23), в яких використовуються класичні ортогональні поліноми – Ерміта, Лагерра та Якобі, є найбільш дослідженими в теоретичному плані [28]. Однак в практичних задачах їх використання є обмеженим, оскільки для знаходження коефіцієнтів необхідно знати щільність імовірностей $p(x)$. Цього можна уникнути, використовуючи замість ряду (23) ряд з ваговою функцією

$$p(x) = \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \varphi_k(x), \qquad (24)$$

де $\tilde{c}_k$ – коефіцієнти розкладу.

Неважко показати, що коефіцієнти $\tilde{c}_k$ розкладу (24) обчислюються за формулою

$$\tilde{c}_k = \frac{\int_a^b p(x)\varphi_k(x)dx}{\int_a^b \varphi_k^2(x)\rho(x)dx}$$

і можуть бути виражені через початкові моменти α_n досліджуваної випадкової величини ξ з урахуванням формули (17).

Ряд (24) є основною формою подання щільності імовірностей при її теоретичних та експериментальних знаходженнях [4, 11, 22]. На практиці в ряді (24) найбільш широко використовуються поліноми Ерміта – в ряді Грама-Шарльє та його модифікації – ряді Еджворта. Менше використовуються поліноми Лагерра, і майже не використовуються поліноми Якобі.

В задачах статистики оцінка коефіцієнтів c_k чи $\tilde{c}_k$ не створює труднощів [11, 21, 22], однак виявити властивості цих оцінок у більшості випадків складно.

Відзначимо деякі проблеми [29], що виникають при практичному використанні ортогональних подань щільності імовірностей.

1. При застосуванні ортогональних подань щільності імовірностей слід враховувати проблему моментів [30], суть якої полягає в тому, що існують розподіли, для яких нескінченна послідовність моментів не задає ці розподіли однозначно.

2. Здебільшого застосування ортогональних рядів зводиться до використання перших кількох складових цих рядів без вказання помилок, які можуть при цьому виникати. Крім того при обмеженні кількості складових можуть виникати від’ємні значення функції $p_N(x)$.

3. Ортогональні подання часто використовуються при експериментальних дослідженнях щільності імовірностей без належного аналізу помилок оцінювання.

Висновки

1. Знаходження щільності імовірностей методом моментів потребує розв’язання системи рівнянь, які в загальному випадку є нелінійними, і складність їх розв’язку визначається вибором базисних функцій.

2. Застосування методу найменших квадратів дозволяє використовувати для знаходження щільності імовірностей класичні ряди Фур’є.

3. Для практичного застосування розкладень щільності імовірностей в ряди Фур’є доцільно

використовувати форму ряду з ваговою функцією, оскільки коефіцієнти такого ряду однозначно визначаються моментами випадкової величини.

4. При використанні рядів Фур'є для знаходження щільності імовірностей необхідним є вирішення ряду проблем, найважливішими серед яких є аналіз точності використання обмеженої кількості складових ортогонального ряду, з'ясування умов отримання невід'ємних значень подання, дослідження імовірнісних характеристик оцінки щільності імовірностей.

Література

1. *Шелухин О.И.*, Беляков И.В. Негауссовские процессы.– СПб.: Политехника, 1992.–312 с.
2. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 3. Обработка сигналов в радио- и гидролокации и прием случайных гауссовских сигналов на фоне помех: Пер. с англ./ Под ред. В.Т. Горяинова. – М.: Сов. радио, 1977. – 664с.
3. *Горовецкая Т.А.*, Красильников А.И., Чан Х.Д. Модели и законы распределения флуктуационных сигналов // Электроника и связь. – 2000. – № 9. – С. 5-14.
4. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. – М.: Сов. радио,1969. – 752 с.
5. *Зачепицкая Л.П.* О возможной денормализации случайных процессов некоторыми инерционными линейными системами // Радиотехника и электроника. – 1968. – Т. 13, №8.– С. 1452-1455.
6. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
7. *Митропольский А.К.* Техника статистических вичислений. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. – 480 с.
8. *Хан Г.*, Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах: Пер. с англ. / Под ред. В.В. Налимова. – М.: Мир, 1969. – 396 с.
9. *Левин Б.Р.*, Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.
10. *Романенко А.Ф.*, Сергеев Г.А. Аппроксимативные методы анализа случайных процессов. – М.: Энергия, 1974. – 176 с.
11. *Прикладной* анализ случайных процессов / Под ред. Прохорова С.А. – Самара: СНЦ РАН, 2007. – 582 с.
12. *Гутер Р.С.*, Кудрявцев Л.Д., Левитан Б.М. Функции действительного переменного. Приближение функций. Почти-периодические функции. – М.: Физматгиз, 1963. – 244 с.
13. *Колмогоров А.Н.*, Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
14. *Трахтман А.М.* Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. – М. Сов. радио, 1972. – 352 с.
15. *Залманзон Л.А.* Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
16. *Лекции* по теории связи / Под ред. Е. Дж. Багдади: Пер. с англ.– М.: Мир, 1964. – 402 с.
17. *Марченко Б.Г.*, Щербак Л.Н. Линейные случайные процессы и их приложения. – К.: Наукова думка, 1975. – 144 с.
18. *Куля В.И.* Ортогональные фильтры. – К.: Техніка, 1967. – 240 с.
19. *Дейч А.М.* Методы идентификации динамических объектов.– М.: Энергия, 1979.– 240 с.
20. *Лэннинг Дж.*, Бэттин Р. Случайные процессы в задачах автоматического управления: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1958. – 388 с.
21. *Куликов Е.И.* Методы измерения случайных процессов.– М.: Радио и связь, 1986.– 272 с.
22. *Шалыгин А.С.*, Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. – Л.: Машиностроение, 1986. – 320 с.
23. *Денисенко А.Н.* Сигналы. Теоретическая радиотехника. Справочное пособие. – М.: Горячая линия – Телеком, 2005. – 704 с.
24. *Коваленко И.Н.* Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 1982. – 256 с.
25. *Чабдаров Ш.М.*, Сафиуллин Н.З., Феоктистов А.Ю. Основы статистической теории радиосвязи. Полигауссовы модели и методы: Учеб. пособие. – Казань: Казанский авиац. ин-т им. Туполева, 1983. – 87 с.
26. *Королев В.Ю.* Смешанные гауссовские вероятностные модели реальных процессов. – М.: Макс Пресс, 2004. – 124 с.
27. *Деврой Л.*, Дьёрфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. L_1-подход: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 408 с.
28. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.
29. *Берегун В.С.*, Красильніков О.І. Ортогональні подання щільності імовірностей флуктуаційних процесів. Стан проблеми // Электроника и связь. – 2007. – № 4 (39). – С. 39-45.
30. *Марченко Б.Г.*, Щербак Л.Н. Проблема моментов и кумулянтный анализ // Отбор и обработка информации. – 1993. – Вып. 9 (85). – С. 12-20.