

УДК 534.14:535

А.В. Богданов

## Стационарные колебания границ упругого слоя, при действии равномерно распределенных тепловых источников на интервале вдоль продольной координаты

Проведен анализ стационарных термоупругих колебаний границ плоского слоя. Постановка выполнена в рамках теории несвязанной термоупругости для случая, когда тепловые источники локализованы в слое  $-a \leq x \leq a$  (ось  $x$  вдоль границы полупространства). Разработан метод решения указанной задачи, проведен расчет упругих характеристик и сделан их анализ по отношению к удаленности от источника возбуждения.

The stationary thermoelastic vibrations analysis of the plain layer boundary is conducted. The problem is solved within the framework of disjoint thermoelasticity theory for the case when thermal sources concentrated in the layer  $-a \leq x \leq a$  (axis  $x$  is located along the half-space boundary). A method for solving of the indicated problem is developed, the calculation of the elastic characteristics is conducted and their analysis is executed in relation to remoteness from the source of excitation.

### Введение

Эффект опто-термо-упругого (ОТУ) преобразования энергии используют для задач дефектоскопии тонкослойных конструкций в микроэлектронике. С теоретической стороны, в настоящее время существует большое количество работ, посвященных вопросу периодического во времени ОТУ преобразования [1, 2]. Следует также заметить, что исследователи обычно интересуются лишь упругодеформированным состоянием на «не облучаемой» поверхности объекта (термооптическая генерация звуковых волн [3]). Целью данной работы является анализ получаемых результатов о колебательном процессе, в зависимости от местоположения приемника. Данный вопрос не освещен в современной литературе однако актуален, поскольку не всегда приемник и излучатель имеют «центровку» по продольной координаты. Данный эффект может привести к неточности снимаемых показаний

### 1. Постановка задачи

Рассматривается упругий слой, на который, с момента времени  $t = 0$ , действует нормальный к границе  $z = 0$  ( $x$  и  $z$  – декартовы коор-

динаты, ось вдоль поверхности слоя), ограниченный в продольном направлении лазерный поток. В результате его воздействия в упругом слое будут возникать как продольные, так и поперечные упругие волны. Возбуждаемое им поле тепловых источников имеет удельную мощность  $w_0 = 0,5 I_0 \beta e^{-\beta z} e^{i\omega t}$  [3], где  $I_0$  – амплитуда интенсивности внешнего воздействия,  $\omega$  – круговая частота амплитудной модуляции,  $\beta$  – коэффициент оптического поглощения вещества.

Данная модель применима к случаю, когда необходимо возбудить упругие колебания в объекте малых размеров. Например, при дефектоскопии многослойных кремневых структур (микросхемы).

Поскольку тепловые поля являются нагрузкой для поля упругих перемещений и напряжений, то следует рассмотреть способ нахождения характеристик температурного поля. Данная особенность связана с тем, что температурные характеристики не имеют скорости распространения в пространстве. Упругие возмущения же в свою очередь распространяются с определенной скоростью. Проведя исследование по данному вопросу [4], будем искать решение путем разложение в ряд Фурье по продольной координате.

Приведенная ниже постановка задачи выполнена с использованием следующих величин:  $\theta(x, z, t)$  – разница температур точек слоя в возмущенном и невозмущенном состояниях;  $\alpha$  – коэффициент линейного теплового расширения;  $v = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  – скорость распространения упругой волны сжатия ( $\lambda$  и  $\mu$  – коэффициенты Ламе,  $\rho$  – плотность материала);  $C^T = \lambda + 2\mu$ .

Исходные уравнения имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta(x, z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \theta(x, z, t)}{\partial t} = -\frac{\beta e^{-\beta z + i\omega t}}{2\kappa} I_0 H(a - |x|); \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{zz}(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zx}(x, z, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_z(x, z, t)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xx}(x, z, t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_x(x, z, t)}{\partial t^2}; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sigma_{zz}(x,z,t) = C^T \frac{\partial u_z(x,z,t)}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x(x,z,t)}{\partial x} - \alpha B^* \theta(x,z,t), \\ \sigma_{zx}(x,z,t) = \mu \left( \frac{\partial u_z(x,z,t)}{\partial x} + \frac{\partial u_x(x,z,t)}{\partial z} \right) \\ \sigma_{xx}(x,z,t) = C^T \frac{\partial u_x(x,z,t)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z(x,z,t)}{\partial z} - \alpha B^* \theta(x,z,t). \end{cases} \quad (3)$$

где  $H(a-|x|)$  – функция Хевисайда, ограничивающая лазерный поток по продольной координате,  $2a$  – размер пучка оптического излучения, вдоль оси  $x$ ;  $\chi$ ,  $\kappa$ ,  $\beta$  – коэффициент температуропроводности, теплопроводности и оптического поглощения, соответственно;  $u(x,z,t)$  – возникающие в слое перемещения (индексы  $z$  и  $x$  обозначают перемещения вдоль соответствующих осей);  $\sigma(x,z,t)$  – возникающие в слое

механические напряжения;  $\eta = \frac{B^*}{C^T}$ ,  $B^* = 3\lambda + 2\mu$ .

Граница  $z=0$  предполагается термоизолированной (тепловой поток равен нулю) и свободной. В рассматриваемом случае на границе полупространства  $z=0$ , к приведенным выше граничным условиям, добавляется условие равенства нулю касательных напряжений.

## 2. Решение задачи

Для упрощения решения и анализа полученных результатов было проведено обезразмеривание физических величин:  $\xi = x\beta$ ,  $\zeta = z\beta$ ,  $\tau = t\beta$  (толщина слоя),  $\xi_0 = a\beta$ ,  $\tau_0 = R\beta$  (интервал разложения в ряд Фурье),  $\omega = \frac{\omega}{v\beta}$ ,  $\theta(\xi, \zeta, \tau) = \theta(x, z, t)\alpha$ ,  $u_x(\xi, \zeta, \tau) = u_x(x, z, t)\beta$ ,  $u_z(\xi, \zeta, \tau) = u_z(x, z, t)\beta$ ,  $\sigma_{xx}(\xi, \zeta, \tau) = \sigma_{xx}(x, z, t)/C^T$ ,  $\sigma_{xz}(\xi, \zeta, \tau) = \sigma_{xz}(x, z, t)/C^T$ ,  $\sigma_{zz}(\xi, \zeta, \tau) = \sigma_{zz}(x, z, t)/C^T$ .

Общее решение уравнения теплопроводности, с применением преобразования Фурье по пространственной координате  $\xi$  удалось получить аналитически (символ  $\sim$  в дальнейшем опустим). Решение, для температуры будет иметь вид:

$$\Theta_n = B_n^1 \frac{\exp\left(-z\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} +$$

$$+ B_n^2 \frac{\exp\left(-(\eta\beta - z)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}\right)}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} + \frac{A_2 b_n \exp(-z)}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1\right]} \quad (4)$$

где  $\Theta_n$  – член разложения температуры в ряд Фурье;  $A_1 = \frac{v}{\chi\beta}$ ,  $A_2 = -\frac{\alpha l_0}{2\kappa\beta}$ ; постоянные интегрирования  $B_n^1$  и  $B_n^2$  находятся из граничных условий.

Для решения упругой задачи были введены потенциалы перемещений, которые связаны с перемещениями следующими соотношениями:

$$u_z(x, z, t) = \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial z} + \frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial x}$$

$$\text{и } u_x(x, z, t) = \frac{\partial \Phi(x, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi(x, z, t)}{\partial z}.$$

В результате решения задачи были получены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \frac{\eta}{(\omega^2 - i\omega A_1)} \times \\ & \times \left( \frac{B_n^1 e^{-z\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}}}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} + \frac{B_n^2 e^{-(\eta\beta - z)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}}}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1}} \right) + \\ & + B_n^3 \frac{e^{-z\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} + B_n^4 \frac{e^{-(\eta\beta - z)\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}}{\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} - \\ & - \eta \frac{A_2 b_n e^{-z}}{1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - i\omega A_1\right] 1 - \left[\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2 - \omega^2\right]} \\ \Psi_n &= B_n^5 \frac{e^{-z\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}}{\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}} + B_n^6 \frac{e^{-(\eta\beta - z)\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}}{\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2}}. \quad (5) \end{aligned}$$

где  $\Phi_n$  и  $\Psi_n$  – члены разложения потенциалов перемещений в ряды Фурье;  $C_0^2 = \mu/\rho$ , постоянные интегрирования  $B_n^3 - B_n^6$  находятся из граничных условий.

Поскольку для задач дефектоскопии, в которых используется описанный выше метод генерации упругих колебаний, съем информации происходит по результатам измерения упругих перемещений поверхности полупространства — приведем вид решения для упругих перемещений:

$$\left. \begin{aligned}
 u_{zn} &= \frac{\eta}{(\omega^2 - i\omega A_1)} \left( -B_n^1 \exp \left( -z \sqrt{\left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1} \right) + B_n^2 \exp \left( -(h\beta - z) \sqrt{\left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1} \right) \right) - \\
 &- B_n^3 \exp \left( -z \sqrt{\omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2} \right) + B_n^4 \exp \left( -(h\beta - z) \sqrt{\omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2} \right) + \\
 &+ \eta \frac{A_2 b_n}{1 - \left[ \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1 \right]} \frac{\exp(-z)}{1 - \left[ \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 - \omega^2 \right]} + \\
 &+ \left( \frac{n\pi}{R} \right) B_n^5 \frac{\exp \left( -z \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2} \right)}{\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2}} + \left( \frac{n\pi}{R} \right) B_n^6 \frac{\exp \left( -(h\beta - z) \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2} \right)}{\sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2}}, \\
 u_{xn} &= - \left( \frac{n\pi}{R} \right) \frac{\eta}{(\omega^2 - i\omega A_1)} \left( \frac{B_n^1 \exp \left( -z \sqrt{\left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1} \right)}{\sqrt{\left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1}} + \frac{B_n^2 \exp \left( -(h\beta - z) \sqrt{\left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1} \right)}{\sqrt{\left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1}} \right) - \\
 &- \left( \frac{n\pi}{R} \right) B_n^3 \frac{\exp \left( -z \sqrt{\omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2} \right)}{\sqrt{\omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2}} - \left( \frac{n\pi}{R} \right) B_n^4 \frac{\exp \left( -(h\beta - z) \sqrt{\omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2} \right)}{\sqrt{\omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2}} + \\
 &+ \left( \frac{n\pi}{R} \right) \eta \frac{A_2 b_n}{1 - \left[ \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 - i\omega A_1 \right]} \frac{\exp(-z)}{1 - \left[ \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2 - \omega^2 \right]} + \\
 &+ B_n^5 \exp \left( -z \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2} \right) - B_n^6 \exp \left( -(h\beta - z) \sqrt{C_0^2 \omega^2 - \left( \frac{n\pi}{R} \right)^2} \right)
 \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где  $u_{zn}$  и  $u_{xn}$  – члены разложения соответствующих перемещений в ряд Фурье.

### 3. Числовые результаты

В качестве материала упругого полупространства используется кремний, для которого [6]  $\alpha = 2,33 \cdot 10^{-6}$  м/град,  $\beta = 1,2 \cdot 10^6$  м<sup>-1</sup>,  $\chi = 8,8 \cdot 10^{-5}$  град/с,  $\kappa = 156$  Вт/м,  $E = 10^{11}$  Па,  $\nu = 8,43 \cdot 10^3$  м/с [7]. Приведенные результаты соответствуют случаю, когда лазерный поток имел амплитуду интенсивности  $I_0 = 10^2$  Вт/м<sup>2</sup>. Графики, полученные в результате расчетов по формулам (7), представлены на рис. 1–4.

На рис. 1 амплитудно-частотная (АЧХ) и фазо-частотная (ФЧХ) характеристики продольных перемещений на верхней границе слоя. Как

видно, с удалением от источника оптического излучения изменяется и амплитуда перемещений. Таким образом, если приемное устройство находится на удалении от места возбуждения, то снимаемые результаты будут искажены.

На рис. 2 амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики поперечных перемещений на верхней границе слоя. На представленных графиках мы видим, что с удалением от источника влияние поперечных колебаний усиливается.

На рис. 3 амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики продольных перемещений на нижней границе слоя. Как видно, характер перемещений повторяет поведение верхней границы.

На рис. 4 амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики поперечных перемещений на нижней границе слоя.

Значение  $R$  выбиралось исходя из результатов полученных в [4].

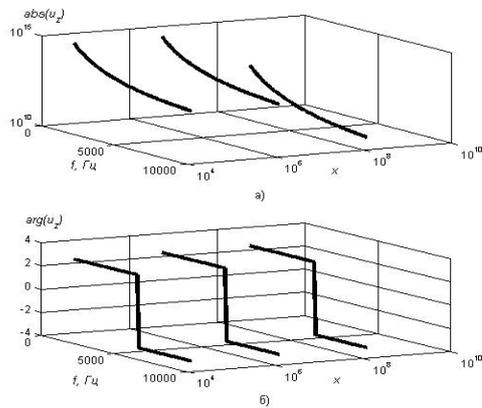


Рис. 1. АЧХ (а) и ФЧХ (б) продольных смещений поверхности  $z = 0$

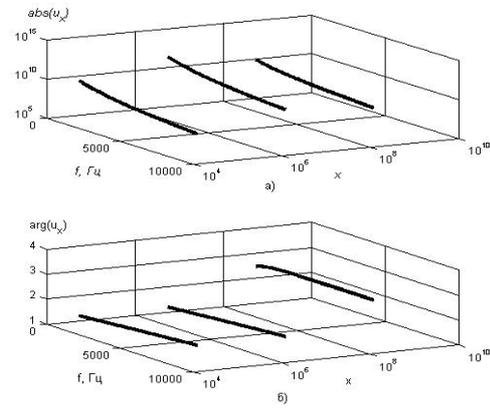


Рис. 2. АЧХ (а) и ФЧХ (б) поперечных смещений поверхности  $z = 0$

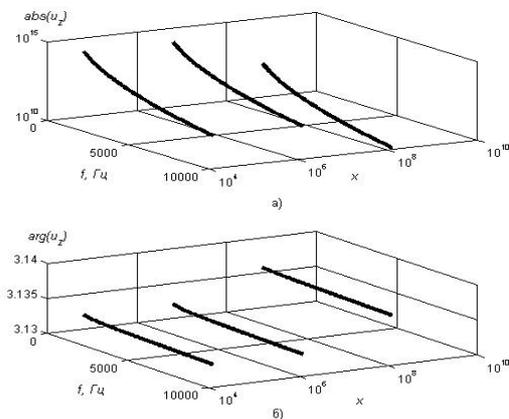


Рис. 3 АЧХ (а) и ФЧХ (б) продольных смещений поверхности  $z = 480$

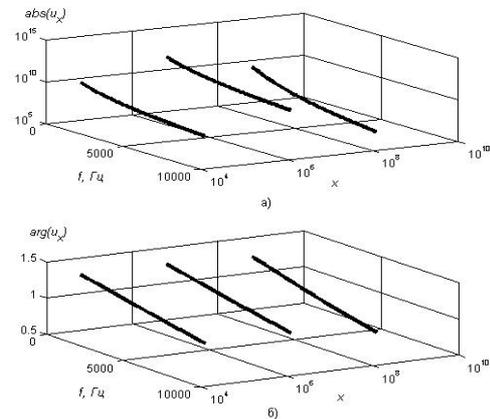


Рис. 4. (а) и ФЧХ (б) поперечных смещений поверхности  $z = 480$

**Выводы**

В процессе решения поставленной задачи, впервые получены математические выражения описывающие стационарные термоупругие колебания в двумерной постановке.

Проведя численное моделирование, было отмечено усиление влияния поперечных колебаний с удалением от источника, а также уменьшение продольных колебаний. Данный эффект говорит о том, что при съеме информации приемное устройство необходимо максимально близко к месту возбуждения упругих колебаний. Идеальным вариантом размещения приемного датчика можно назвать случай, когда амплитуда механических колебаний снимается при помощи бесконтактного датчика (например, интерферометром по отраженному лазерному лучу) в точке падения оптического излучения.

**Литература**

1. Коваленко А.Д. Термоупругость. — К.: Вища школа, 1975. — 216 с.

2. Корнаухов В.Г. Тепловое разрушение полимерных элементов конструкций при моногармоническом деформировании // Прикладная механика. — 2004. — Т. 40, № 6.— с. 30–70.

3. Лямшев Л.М. Лазерное термооптическое возбуждение звука / Отв. ред. В.И. Ильичев; АН СССР, Акустический институт им. Н.Н. Андреева — М.: Наука, 1989. — 237 с.

4. Богданов А.В. Нестационарные тепловые процессы в полупространстве, при действии равномерно распределенных тепловых источников на интервале вдоль продольной координаты // Электроника и связь. — Киев : НТУУ "КПИ", ФЭЛ, 2007 г.. - 5 (40). - с. 84–87.

5. Бейтмен Г., Эрдейн А. Таблицы интегральных преобразований: В 2-х т. — М.: Наука, 1969. — Т.1. — 343 с.; — Т.2. — 328 с.

6. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. акад. И.К. Кикоина.- М.: Атомиздат, 1976, — 1008 с.

7. Гузь А.Н., Головчан В.Т. Дифракция упругих волн в многосвязных телах. — К.: Наукова думка, 1972. — 254 с.