

## Теория сигналов и систем

УДК 621.391

В.Я. Жуйков, д-р техн. наук, Н.Н. Кузнецов, А.Н. Харченко

### Оценка изменения сигналов с помощью дифференциальных энергетических операторов

В статье рассматривается обобщенный класс дифференциальных энергетических операторов высших порядков дискретного вида. Исследовано влияние изменения частоты, амплитуды, постоянной составляющей и гармоник сигнала на значения примененных к ним энергетических операторов. Приведены примеры оценки различных свойств сигналов с помощью существующего и обобщенного классов энергетических операторов.

The article deals with generalized class of discrete high order differential energy operators. The influence of changes in signal frequency, amplitude, steady component and harmonic structure on the operator value is investigated. The examples of different signal's features estimation with the existing and generalized classes are shown.

#### Введение

Класс дифференциальных энергетических операторов высших порядков позволяет оценивать энергетические характеристики сигнала с учетом изменения его амплитуды и частоты [1]. Из операторов этого класса наибольшее распространение получил оператор Тигера – дифференциальный энергетический оператор 2-го порядка, который характеризует изменение энергии сигнала [2], и широко применяется при обработке речевых сигналов [3,4,5].

Особенностью дифференциальных энергетических операторов является их чувствительность к составляющим сигнала, обладающим высокой скоростью изменения [2]. Такие составляющие характеризуются широкой полосой частот, поэтому рассматриваемые операторы обычно применяют к узкополосным компонентам исходного сигнала [2,3].

Обобщенное выражение для энергетического оператора  $j$ -го порядка дискретного вида [1] записывается следующим образом:

$$T_j(x(n)) = x(n)x(n+j-2) - x(n-1)x(n+j-1), (1)$$

где  $x(n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  – решетчатая функция исходного сигнала,  $j \geq 1$ . Отметим, что при  $j < 1$

операторы  $T_j$  приобретают интегрирующие свойства [1].

В частности, при  $j = 2$ , выражение (1) совпадает с формулой оператора Тигера:

$$T_2(x(n)) = x(n)^2 - x(n-1)x(n+1). (2)$$

В статье исследована зависимость энергетических операторов высших порядков от изменения амплитуды, частоты и постоянной составляющей сигнала, а так же их фильтрующие свойства.

#### Дифференциальные энергетические операторы высших порядков

Рассмотрим относительное изменение  $X_k$  функции  $x(n)$  на интервале  $(n, n+k)$  длительностью  $k$  отсчетов, т.е.

$$X_k = \frac{x(n) - x(n+k)}{x(n)}. (3)$$

Определим производную от  $X_k$  как характеристику скорости относительного изменения функции  $x(n)$ :

$$\begin{aligned} O_k = (X_k)' &= \left( \frac{x(n) - x(n+k)}{x(n)} \right)' = \\ &= \frac{x(n+k-1)x(n) - x(n-1)x(n+k)}{(x(n))^2} = (4) \\ &= \frac{T_{k+1}(x(n))}{(x(n))^2}. \end{aligned}$$

Числителем полученного выражения является общая запись дифференциального энергетического оператора высшего порядка, а знаменатель характеризует мгновенную энергию функции [6].

В частном случае, при  $k = 0$

$$O_0 = (X_0)' = \left( \frac{x(n) - x(n)}{x(n)} \right)' = \frac{T_1(x(n))}{(x(n))^2} \equiv 0, (5)$$

при  $k = 1$

$$O_1 = (X_1)' = \left( \frac{x(n) - x(n+1)}{x(n)} \right)' = \frac{T_2(x(n))}{(x(n))^2}.$$

Физический смысл образованного класса операторов заключается в оценке энергии, требуемой для изменения сигнала, описываемого функцией  $x(n)$ , на интервале  $(n, n+k)$  относительно текущей мгновенной энергии в момент  $n$ .

### Особенности применения энергетических операторов высших порядков.

Рассмотрим случаи применения операторов  $T_k$  и  $O_k$  к гармоническим сигналам: 1) с постоянной амплитудой и частотой; 2) с переменной амплитудой; 3) с изменяющейся частотой; 3) с постоянной составляющей.

При отсутствии постоянной составляющей сигнала, в точках  $x(n) = 0$ , оператор  $O_k$  стремится в плюс бесконечность, что может вызвать затруднения при автоматизированных вычислениях. Однако общий характер изменения оператора  $O_k$  зависит в большей степени от частоты сигнала, а не от его амплитуды, тогда как оператор  $T_k$  одинаково чувствителен к изменениям частоты и амплитуды сигнала. На рис. 1 пред-

ставлены значения операторов  $O_1$  и  $T_2$  примененных к сигналам без постоянной составляющей: а) синусоидальному  $x_1(n)$ ; б) синусоидальному с модулируемой амплитудой  $x_2(n)$ ; в) синусоидальному с переменной частотой  $x_3(n)$ .

Для синусоидального сигнала  $x_1(n)$  рис. 1 (а) коэффициенты оператора  $T_2(x_1(n))$  рис. 1 (г) постоянны. Значения оператора  $O_1(x_1(n))$  рис. 1 (г) изменяются с периодом, равным периоду сигнала  $x_1(n)$ , причем его огибающая совпадает со значениями оператора  $T_2(x_1(n))$ .

Для синусоидального сигнала с переменной амплитудой рис. 1 (б) изменения коэффициентов оператора  $T_2(x_2(n))$  рис. 1 (д) отображают изменения амплитуды синусоиды, тогда как значения  $O_1(x_2(n))$  рис. 1 (д) от амплитудной модуляции не зависят, и принимают ту же величину, что и для сигнала  $x_1(n)$ . В случае постоянной амплитуды и переменной частоты рис. 1 (в) оба оператора изменяются с учетом модуляции частоты рис. 1 (е).

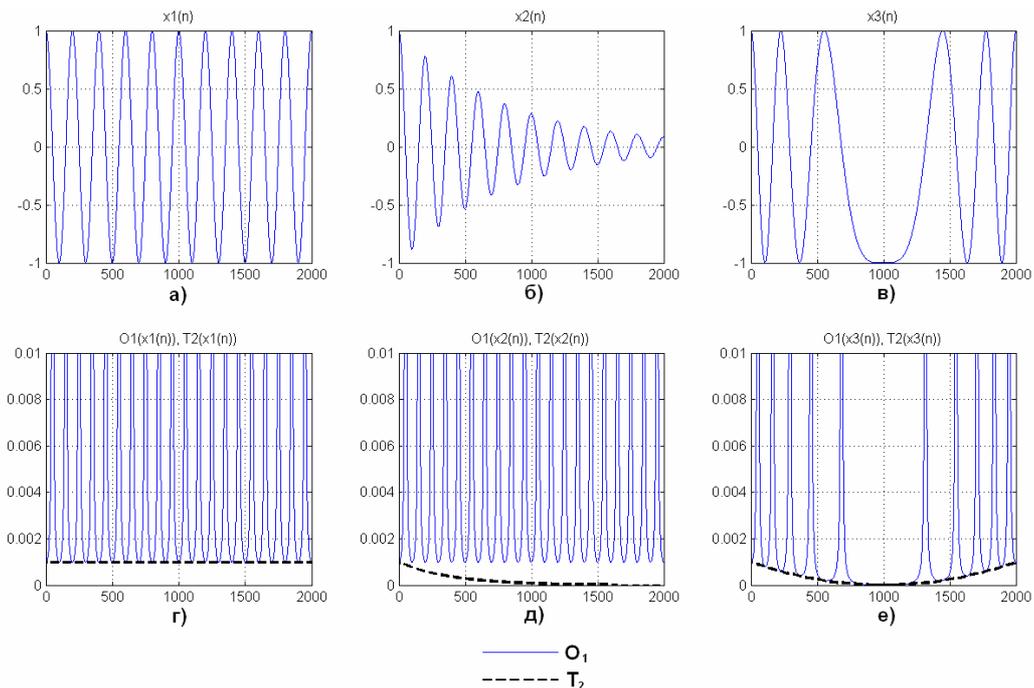


Рис. 1 Результат применения операторов  $T_2$  и  $O_1$  к сигналам без постоянной составляющей: а) синусоидальному  $x_1(n)$ ; б) синусоидальному с переменной амплитудой  $x_2(n)$ ; в) синусоидальному с переменной частотой  $x_3(n)$ . Значения операторов, примененных: г) к сигналу  $x_1(n)$ ; д) к сигналу  $x_2(n)$ ; е) к сигналу  $x_3(n)$

Операторы  $T_k$  одинаково чувствительны к колебаниям амплитуды и частоты, и позволяют оценивать величину их совместного изменения. Операторы  $O_k$  чувствительны к варьированию частоты в большей мере, чем амплитуды. Таким образом, совместное использование операторов  $T_k$  и  $O_k$  позволит производить оценку как изменений частоты, так и амплитуды.

Характер изменения операторов  $T_k$ , и оператора Тигера в частности, для сигналов с постоянной составляющей отличаются от описанных в источниках [2]. Для таких сигналов значения оператора  $T_k$  значительно возрастают с увеличением этой составляющей, тогда как значения оператора  $O_k$  несколько уменьшаются.

На рис. 2. изображены значения операторов  $O_1$  и  $T_2$ , примененных к синусоидальному сигналу с периодом  $L = 60$  отсчетов, амплитудой равной 1 постоянными составляющими равными 2 и 4.

Оператор  $T_2$  принимает значения в несколько раз больше значений оператора  $O_1$ , с увеличением значения постоянной составляющей сигнала значения оператора  $T_2$  существенно увеличиваются, тогда как значения оператора  $O_1$  несколько уменьшаются. Коэффициенты оператора  $O_1$  искажены влиянием мгновенных значений функции, однако с увеличением постоянной составляющей искажение уменьшается.

Использование операторов  $O_k$  целесообразно для сигналов со сравнительно большой

постоянной составляющей, например при оценке функции с высокочастотными пульсациями небольшой амплитуды. Применяя к такому сигналу оконное преобразование, при длине окна значительно меньшей периода исходного сигнала, пульсации можно рассматривать как сигнал с большой постоянной составляющей. В этом случае характер изменения операторов  $O_k$  соответствует операторам  $T_k$ , принимая при этом меньшие значения.

### Фильтрующие свойства операторов

Рассмотрим периодический сигнал  $x(n)$  с периодом  $L$ ,  $x(n) \equiv x(n + m \cdot L)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Как следует из выражения (5), операторы  $T_{m \cdot L + 1}$  или  $O_{m \cdot L}$  равны нулю для всех точек исходного сигнала:

$$T_{m \cdot L + 1}(x(n)) \equiv 0, m = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

$$O_{m \cdot L}(x(n)) \equiv 0, m = 1, 2, \dots$$

При отсутствии постоянной составляющей сигнала  $x(n)$ , обращаются в ноль так же операторы  $T_{m \cdot L/2 + 1}$  или  $O_{m \cdot L/2}$ , порядок которых на единицу больше или равен полупериоду сигнала соответственно, т.е.

$$T_{m \cdot L/2 + 1}(x(n)) \equiv 0, m = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$O_{m \cdot L/2}(x(n)) \equiv 0, m = 1, 2, \dots$$

Для сигнала  $X(n)$ , записанного в виде:

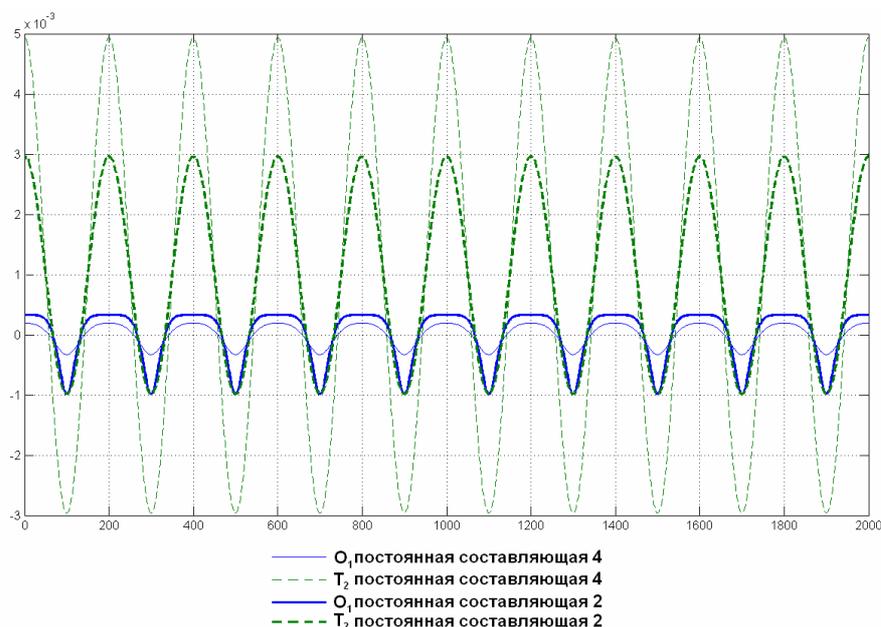


Рис. 2 Результат применения операторов  $T_2$  и  $O_1$  к синусоидальному сигналу с постоянной составляющей

$$X(n) = A_1 \cos\left(\frac{n}{L_1} \cdot 2\pi\right) + A_2 \cos\left(\frac{n}{L_2} \cdot 2\pi\right) + A_3 \cos\left(\frac{n}{L_3} \cdot 2\pi\right) + A_0, \quad (8)$$

где  $A_i$  и  $L_i$ ,  $i=1,2,3$  – соответственно амплитуды и периоды гармонических составляющих сигнала,  $A_0$  – постоянная составляющая сигнала, значения примененного к нему оператора  $T_k$  либо обращаются в ноль, либо совпадают со значениями оператора того же порядка, примененного к сигналу без частотных составляющих с периодами  $L_i$ ,  $i=1,2,\dots$ , если порядок  $k$  оператора на единицу больше наименьшего общего кратного (НОК) всех либо некоторых периодов  $L_i$ , соответственно. Например, при  $k = \text{НОК}(L_2 + L_3) + 1$ :

$$T_{\text{НОК}(L_2+L_3)+1}(X(n)) = T_{\text{НОК}(L_2+L_3)+1}\left(A_1 \cos\left(\frac{n}{L_1} \cdot 2\pi\right) + A_0\right). \quad (9)$$

Все вышесказанное относится и к оператору  $O_k$ , порядок которого равен наименьшему общему кратному всех либо некоторых периодов  $L_i$ ,  $i=1,2,\dots$ , исходного сигнала  $X(n)$ .

На рисунке 3 изображены: в) значения оператора  $T_{13}$ , примененного к сигналам а)

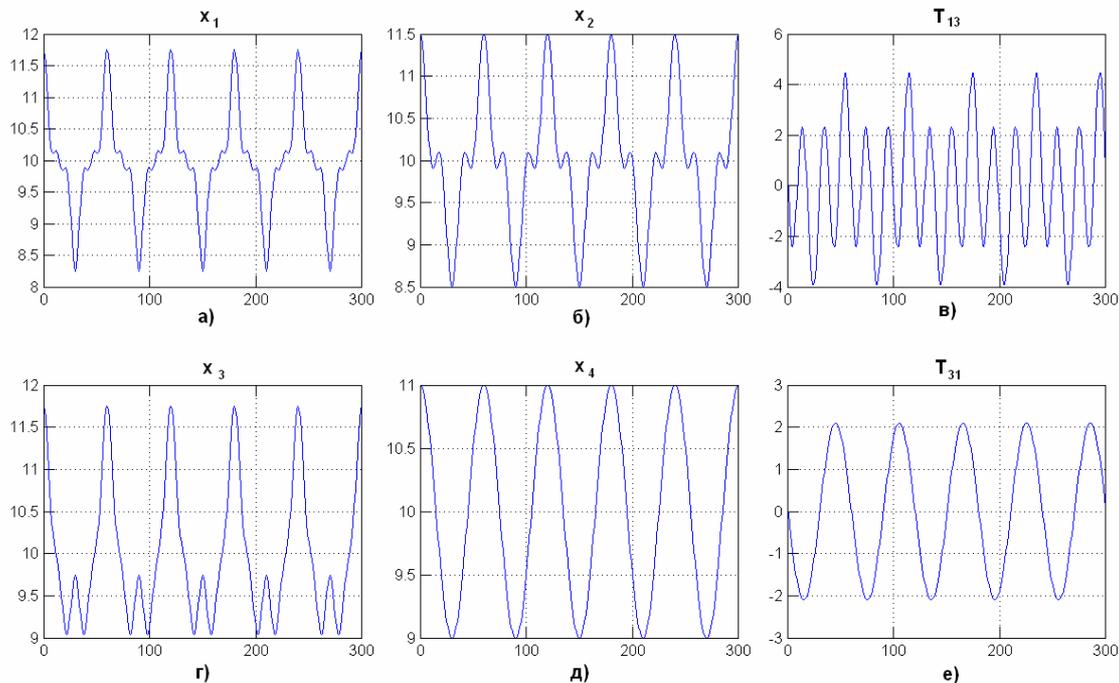
$$x_1(n) = 1 \cdot \cos\left(\frac{n}{60} \cdot 2\pi\right) + 0.5 \cos\left(\frac{n}{20} \cdot 2\pi\right) + 0.25 \cos\left(\frac{n}{12} \cdot 2\pi\right) + 10$$

и б)  $x_2(n) = 1 \cdot \cos\left(\frac{n}{60} \cdot 2\pi\right) + 0.5 \cos\left(\frac{n}{20} \cdot 2\pi\right) + 10$ ;

а также: е) значения оператора  $T_{31}$ , примененного к сигналам г)

$$x_3(n) = 1 \cdot \cos\left(\frac{n}{60} \cdot 2\pi\right) + 0.5 \cos\left(\frac{n}{30} \cdot 2\pi\right) + 0.25 \cos\left(\frac{n}{15} \cdot 2\pi\right) + 10,$$

и д)  $x_4(n) = 1 \cdot \cos\left(\frac{n}{60} \cdot 2\pi\right) + 10$ .



**Рис. 3.** Примеры сигналов, для которых дифференциальные энергетические операторы принимают одинаковые значения: а) сигнал  $x_1(n) = 1 \cdot \cos\left(\frac{n}{60} \cdot 2\pi\right) + 0.5 \cos\left(\frac{n}{20} \cdot 2\pi\right) + 0.25 \cos\left(\frac{n}{12} \cdot 2\pi\right) + 10$ ; б) сигнал  $x_2(n) = 1 \cdot \cos\left(\frac{n}{60} \cdot 2\pi\right) + 0.5 \cos\left(\frac{n}{20} \cdot 2\pi\right) + 10$ ; в) значения оператора  $T_{13}$ , примененного к сигналам  $x_1(n)$  и  $x_2(n)$ ; г) сигнал  $x_3(n) = 1 \cdot \cos\left(\frac{n}{60} \cdot 2\pi\right) + 0.5 \cos\left(\frac{n}{30} \cdot 2\pi\right) + 0.25 \cos\left(\frac{n}{15} \cdot 2\pi\right) + 10$ ; д) сигнал  $x_4(n) = 1 \cdot \cos\left(\frac{n}{60} \cdot 2\pi\right) + 10$ ; е) значения оператора  $T_{31}$ , примененного к сигналам  $x_3(n)$  и  $x_4(n)$

Оператор  $T_{13}$  рис. 3 (в) нечувствителен к гармонике  $0.25 \cos\left(\frac{n}{12} \cdot 2\pi\right)$ , а также позволяет судить о периодах двух других гармонических составляющих сигнала. Оператор  $T_{31}$  рис. 3 (е) нечувствителен к гармоникам  $0.5 \cos\left(\frac{n}{30} \cdot 2\pi\right)$  и  $0.25 \cos\left(\frac{n}{15} \cdot 2\pi\right)$ , так как их периоды кратны.

Таким образом, применение дифференциальных энергетических операторов высших порядков к периодическим сигналам позволяет определять как период  $L$  сигнала, так и периоды  $L_j$  его отдельных составляющих с точностью до шага дискретизации, а так же оценивать их энергетические параметры. При этом устраняется необходимость в предварительной фильтрации сигнала для такой оценки.

### Выводы

Предложен обобщенный класс энергетических операторов высших порядков, рассматриваемый как оценка скорости относительного изменения сигнала, что приводит к нормированию операторов по мгновенной энергии. Обобщенный класс позволяет независимо оценивать изменения амплитуды и частоты сигнала, а так же уменьшить влияние его постоянной составляю-

щей на значения коэффициентов операторов. Рассмотрены фильтрующие свойства энергетических операторов, позволяющие оценивать характеристики отдельных частотных составляющих исходного сигнала.

### Литература

1. *P. Maragos, A. Potamianos.* Higher order differential energy operators // IEEE. – 1995. – Vol. 2 – No.8 – P.152-154.
2. *J.F Kaiser.* On a simple algorithm to calculate the 'energy' of a signal // IEEE. – 1990. – Vol. 2. – P. 381–384.
3. *Жуйков В.Я., Харченко А.Н.* Алгоритм классификации сегментов речевого сигнала//Электроника и Связь, тематический выпуск "Электроника и нанотехнологии", часть 1, № 2-3, 2009, стр. 130-137
4. *T. Van Pham.* Wavelet analysis for robust speech processing and applications. – 2007. – 171 p.
5. *C. Lemyre, M. Jelinek, R. Lefebvre.* New approach to voiced onset detection in speech signal and its application for frame error concealment // ICASSP. – 2008. – Vol. 9. – P. 4757–4760.
6. *Сысун В.И., Борисков П.П., Величко А.А.* Web-версия учебного пособия "Теория сигналов и цепей"