

УДК 519.213

В.С. Берегун, О.І. Красильніков, канд. фіз.-мат. наук

## Дослідження областей невід'ємності ортогональних подань щільності імовірностей

Математическим моделированием определены области для кумулянтных коэффициентов случайных величин, при которых ортогональные разложения их плотностей вероятностей в ряды по полиномам Эрмита и Лагерра будут неотрицательными.

Mathematical modelling determines areas for cumulant coefficients of random variables at which orthogonal representation of their probability density functions in series after Hermite and Laguerre polynomials will be non-negative.

### Вступ

При апроксимації щільності імовірностей ортогональними поданнями можуть виникати від'ємні значення, що суперечить невід'ємній визначеності щільності імовірностей. Причиною виникнення від'ємних значень природно вважати використання обмеженої кількості складових ортогональних рядів і знакозмінність ортогональних поліномів, що при цьому використовуються. Дана проблема була відзначена в багатьох роботах [1-4], однак ці роботи не дають відповіді на питання – як враховувати від'ємні значення? Пояснити це можна відсутністю аналітичного розв'язку задачі.

Метою даної роботи є отримання областей невід'ємності – таких співвідношень між числовими характеристиками випадкових величин, при яких гарантовано будуть відсутні від'ємні значення ортогональних подань щільності імовірностей. Для знаходження таких областей використовуємо математичне моделювання.

### 1. Дослідження областей невід'ємності рядів Ерміта

Для щільностей імовірностей  $p(x)$ , які визначені на нескінченному інтервалі  $(-\infty; \infty)$ , здійснюється ортогональне подання [3, 5] по поліномах Ерміта:

$$p(x) = \rho_H(x) \sum_{k=0}^{\infty} c_{Hk} H_k(x),$$

де  $H_k(x)$  – поліноми Ерміта [3, 5],

$\rho_H(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$  – вагова функція поліномів

Ерміта,  $c_{Hk}$  – коефіцієнти розкладу.

Для рядів Ерміта в роботі [6] здійснена спроба аналітичного знаходження областей невід'ємності і запропонована методика перетворення коефіцієнтів розкладу ряду таким чином, щоб в результаті подання не мало від'ємних значень. В роботі [6] для ряду

$$S_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(1 + \frac{\gamma_3}{6} H_3(x) + \frac{\gamma_4}{24} H_4(x)\right), \quad (1)$$

де  $\gamma_3$  – коефіцієнт асиметрії,  $\gamma_4$  – коефіцієнт ексцесу; чисельними методами отримана область невід'ємних значень в координатах  $(\gamma_3, \gamma_4)$ , обмежена фігурою на рис. 1, де вісь абсцис відповідає значенням  $\gamma_4$ , а вісь ординат – значенням  $\gamma_3$ .

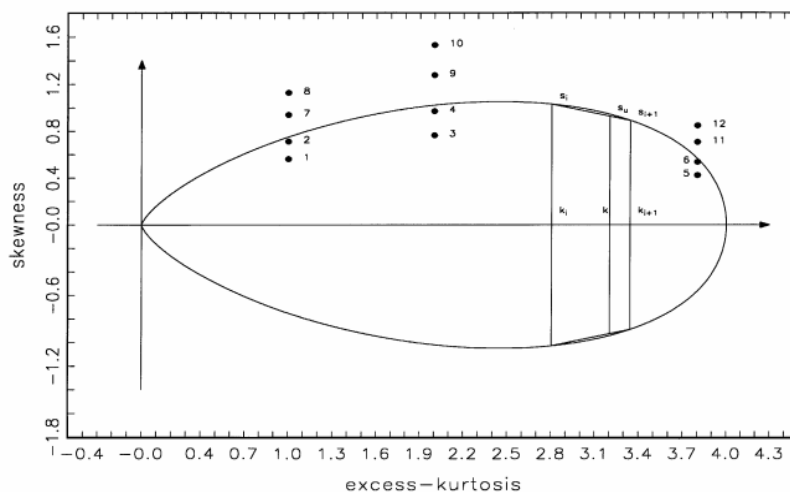


Рис. 1

Отримано симетричну відносно осі абсцис область, що містить наступні характерні точки:  
 $(\sqrt{6}, \sqrt{6} / \sqrt{3 + \sqrt{6}}) = (2,4508; 1,0493)$  і  
 $(\sqrt{6}, -\sqrt{6} / \sqrt{3 + \sqrt{6}}) = (2,4508; -1,0493)$  – максимальні відхилення від осі ординат,  $(4; 0)$  – максимальне відхилення від осі абсцис.

Наведені вище результати були перевірені методами математичного моделювання. Шляхом попарного перебору значень  $\gamma_3$  і  $\gamma_4$  виявлена відповідна область невід'ємності (рис. 2). Методика дослідження полягала у задаванні пар значень  $(\gamma_3, \gamma_4)$  і перевірці виразу (1) на невід'ємність. В разі позитивної відповіді точка  $(\gamma_3, \gamma_4)$  переносилась на графік в координатах  $(\gamma_3, \gamma_4)$ . Сукупність таких точок дала область, зображену на рис. 2. Крім того, область невід'ємних значень ряду (1) встановлена в координатах  $(\beta_1 = \gamma_3^2, \beta_2 = \gamma_4 + 3)$  (рис. 3), які використовуються в топографічних зображеннях щільності імовірностей системами розподілів Пірсона на [7, 8] і Джонсона [9].

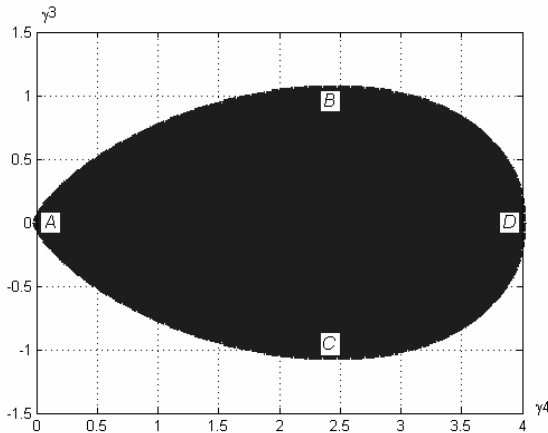


Рис. 2

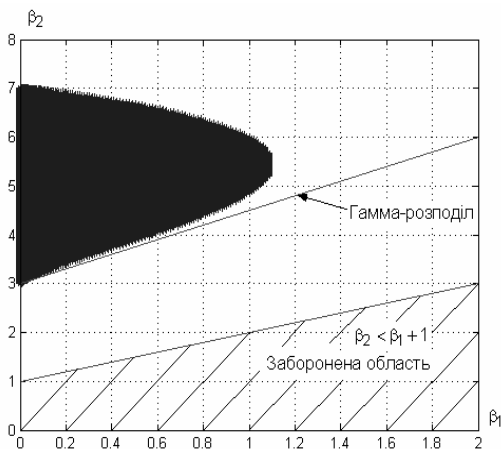


Рис. 3

На рис. 4-7 наведені графіки виразу (1) в граничних точках згідно рис. 2. (суцільна лінія), і в точках, де невід'ємність не забезпечується (штрихова лінія): рис. 4. –  $A(0; 0)$  і  $(0; -1)$ , рис. 5. –  $B(4; 0)$  і  $(0; 4.5)$ , рис. 6 –  $C(2,45; 1,04)$  і  $(2,45; 1,5)$ , рис. 7 –  $D(2,45; -1,04)$  і  $(2,45; -1,5)$ .

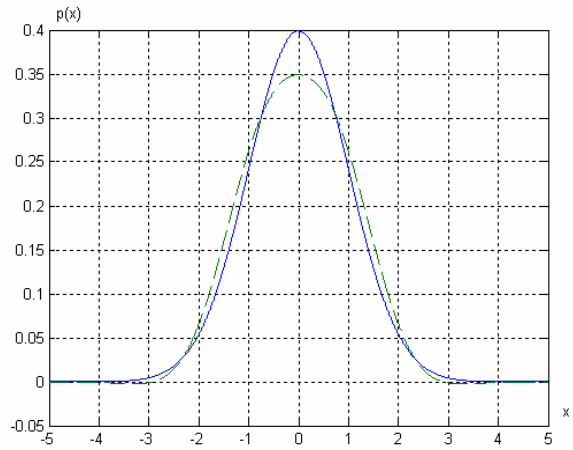


Рис. 4

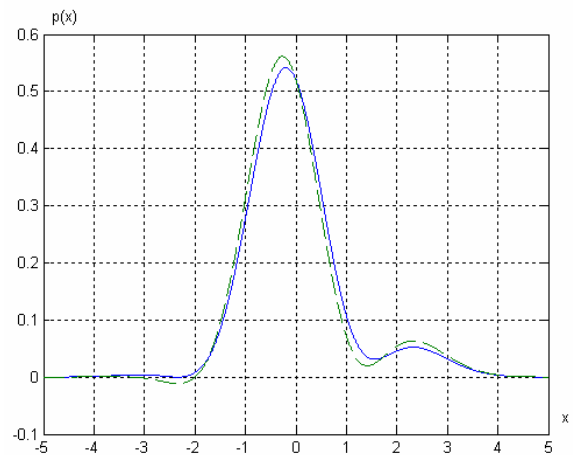


Рис. 5

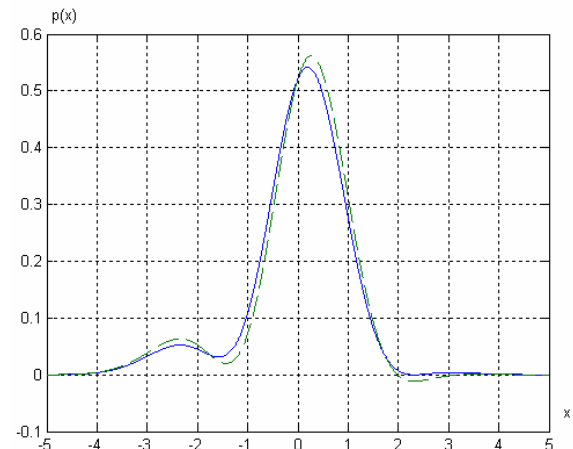


Рис. 6

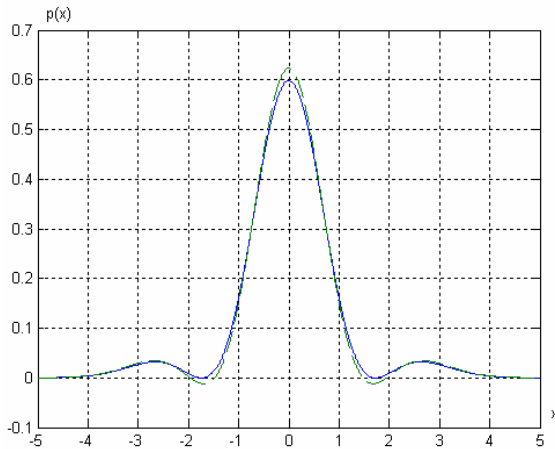


Рис. 7

Отримані результати в цілому підтверджують результати роботи [6], але необхідно зауважити, що точки *C* і *D* взяті меншими, ніж в роботі [6], оскільки в наведених там граничних точках невід’ємність не забезпечується. Аналіз рис. 4-7 показує, що неточність визначення кумулянтних коефіцієнтів  $\gamma_3$  і  $\gamma_4$  в межах 0,5 призводить до появи незначних від’ємних значень.

Наступним кроком досліджені симетричні розподіли, для яких всі непарні кумулянтні коефіцієнти  $\gamma_k$  дорівнюють нулю. Для цього було розглянуто ряд

$$S_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(1 + \frac{\gamma_4}{24} H_4(x) + \frac{\gamma_6}{720} H_6(x)\right). \quad (2)$$

Шляхом математичного моделювання (перебором значень  $\gamma_4$  і  $\gamma_6$ ) знайдено область, де ряд (2) приймає лише невід’ємні значення (рис. 8).

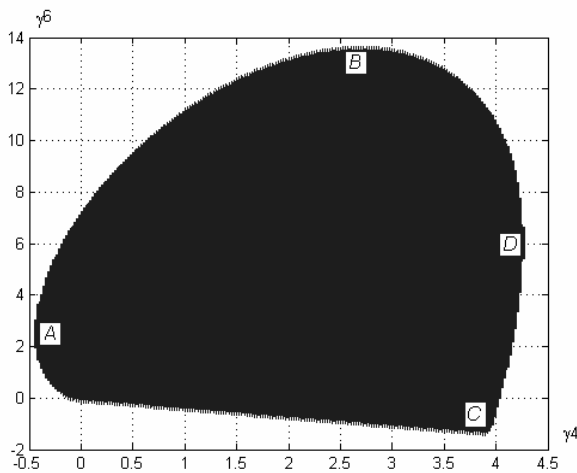


Рис. 8.

Наведемо графіки рядів Грама-Шарльє (2) в граничних точках (згідно рис. 8) суцільною лінією, і штриховою лінією в точках, де не-

від’ємність не забезпечується: рис. 9. –  $A(-0,4;2,25)$  і  $(-1;2,25)$ , рис. 10. –  $B(2,7;13,4)$  і  $(2,7;16)$ , рис. 11. –  $C(3,89;-1,5)$  і  $(4,5;-2)$ , рис. 12. –  $D(4,2;6)$  і  $(4,7;6)$ .

З рис. 9-12 видно, що неточність визначення кумулянтних коефіцієнтів  $\gamma_4$  і  $\gamma_6$  в межах 0,5 призводить до появи незначних від’ємних значень.

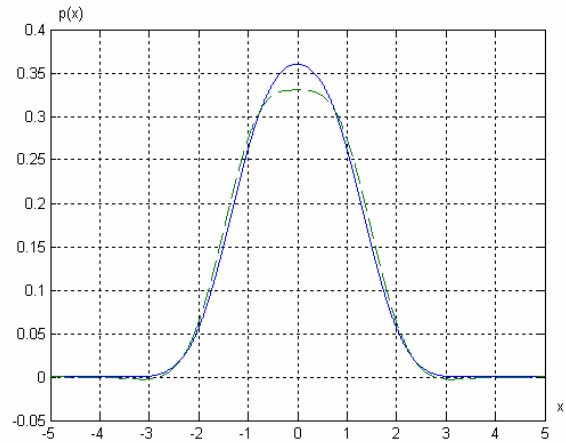


Рис. 9

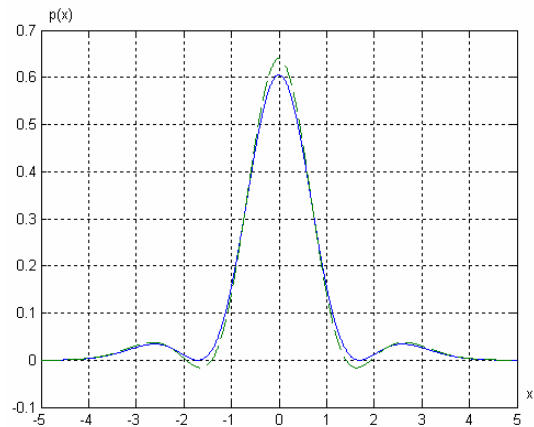


Рис. 10

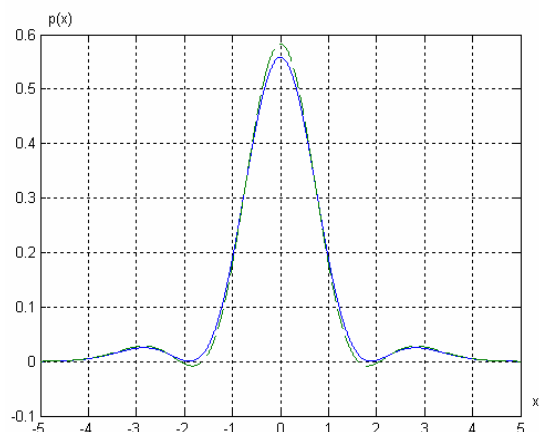


Рис. 11

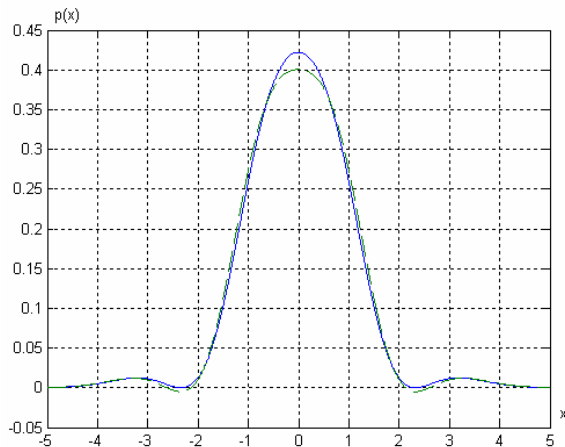


Рис. 12

## 2. Дослідження областей невід'ємності рядів Лагерра

Для щільностей імовірностей  $p(x)$ , що визначені на півнескінченному інтервалі  $(0; \infty)$ , здійснюється [10] ортогональне подання

$$p(x) = \rho_L(x) \sum_{k=0}^{\infty} c_{Lk} L_k^{(\lambda)}(x),$$

де  $L_k^{(\lambda)}(x)$  – поліноми Лагерра [11] з параметром  $\lambda$ ;  $\rho_L(x) = \exp(-x)x^\lambda$  – вагова функція поліномів Лагерра;  $c_{Lk}$  – коефіцієнти розкладу.

Нехай випадкова величина, що характеризується щільністю імовірностей  $p(x)$ , має початкові моменти  $\alpha_k$  ( $\alpha_1 = m$ ) і середнє квадратичне відхилення  $\sigma$ , а також кумулянтні коефіцієнти  $\gamma_3$  і  $\gamma_4$ .

Для дослідження областей невід'ємності було обрано ряд, що має наступний вигляд:

$$S_3(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} \left(\frac{x}{\beta}\right)^\lambda \sum_{k=0}^4 c_{Lk} L_k^{(\lambda)}\left(\frac{x}{\beta}\right), \quad (3)$$

$$\text{де } \lambda = \frac{m^2}{\sigma^2} - 1, \quad \beta = \frac{\sigma^2}{m}, \quad c_{L0} = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)},$$

$$c_{L1} = c_{L2} = 0, \quad c_{3L} = \frac{1}{\Gamma(\lambda+4)} \left[ \frac{\alpha_2}{\beta^2} (\lambda+3) - \frac{\alpha_3}{\beta^3} \right],$$

$$c_{4L} = \frac{1}{\Gamma(\lambda+5)} \left[ 3(\lambda+3)(\lambda+4) \frac{\alpha_2}{\beta^2} - 4(\lambda+4) \frac{\alpha_3}{\beta^3} + \frac{\alpha_4}{\beta^4} \right].$$

Для порівняння результатів для ряду Ерміта виразимо коефіцієнти розкладу  $c_{3L}$  і  $c_{4L}$  через коефіцієнти асиметрії  $\gamma_3$  і ексцесу  $\gamma_4$ , а також

через математичне сподівання  $m$  і середнє квадратичне відхилення  $\sigma$ .

Використаємо для цього вирази  $\alpha_3 = \mu_3 + 3\mu_2 m + m^3$  і  $\alpha_4 = \mu_4 + 4\mu_3 m + 6\mu_2 m^2 + m^4$  і отримаємо наступні співвідношення:

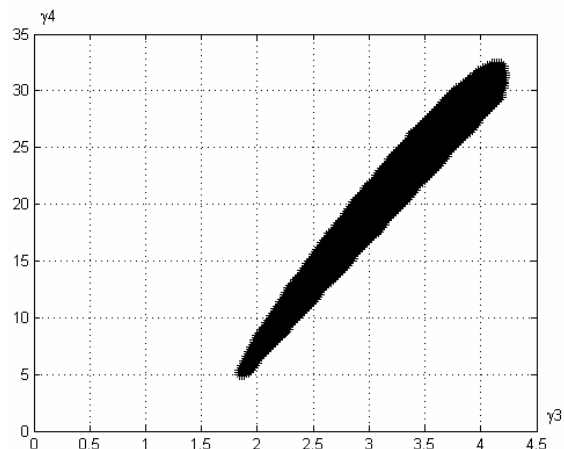
$$\frac{\alpha_2}{\beta^2} = \frac{\sigma^2 + m^2}{\left(\frac{\sigma^2}{m}\right)^2} = \gamma_1^2 + \gamma_1^4,$$

$$\frac{\alpha_3}{\beta^3} = \frac{\mu_3 + 3\mu_2 m + m^3}{\left(\frac{\sigma^2}{m}\right)^3} = \gamma_3 \gamma_1^3 + 3\gamma_1^4 + \gamma_1^6,$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_4}{\beta^4} &= \frac{\mu_4 + 4\mu_3 m + 6\mu_2 m^2 + m^4}{\left(\frac{\sigma^2}{m}\right)^4} = \\ &= (\gamma_4 + 3)\gamma_1^4 + 4\gamma_3 \gamma_1^5 + 6\gamma_1^6 + \gamma_1^8, \end{aligned}$$

де  $\gamma_k = \frac{\kappa_k}{\kappa_2^{k/2}}$  – кумулянтні коефіцієнти.

Таким чином, всі сталі величини ряду (3) визначаються моментами досліджуваної щільності імовірностей, а саме  $m$ ,  $\sigma$ ,  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$ . Використовуючи отримані результати, можна знайти області, де ряд (3) матиме лише невід'ємні значення в залежності від  $\gamma_3$  і  $\gamma_4$  при різних фіксованих значеннях  $m$  і  $\sigma$ . Методами математичного моделювання отримані результати таких досліджень, окремі з яких наведені на рис. 13-14. де нижня лінія відповідає межі забороненої області, а верхня – гамма-розподілу. Ці ж самі області в системі координат  $(\beta_1, \beta_2)$  зображені на рис. 15-16.

Рис. 13.  $\sigma = 1, m = 1$

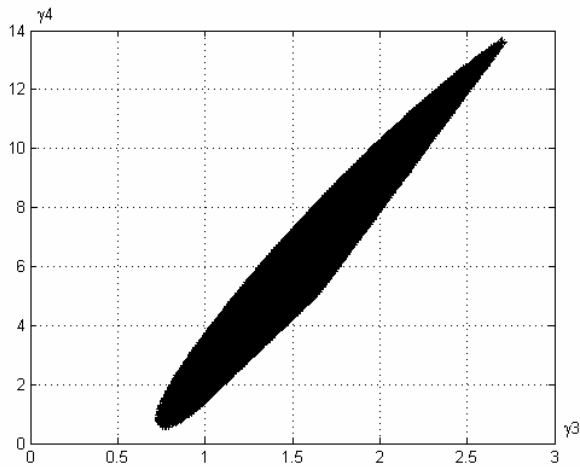


Рис. 14.  $\sigma = 1, m = 2$

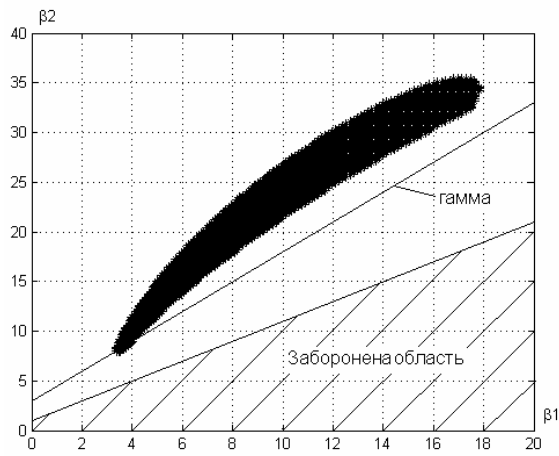


Рис. 15.  $\sigma = 1, m = 1$

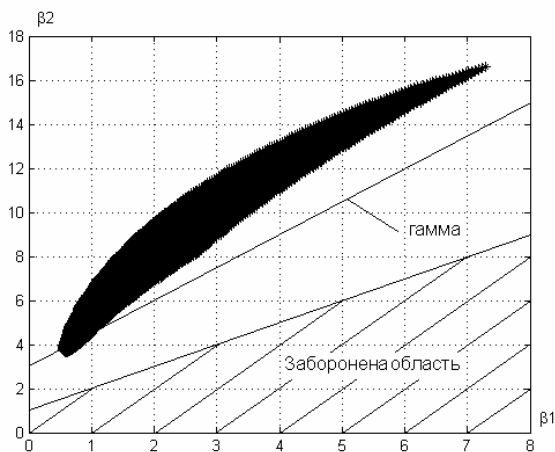


Рис. 16.  $\sigma = 1, m = 2$

З отриманих графіків видно, що при фіксованому значенні  $\sigma$  і збільшенні  $m$ , область невід'ємності зміщується в бік зменшення  $\beta_1$ . При цьому вона включає в себе частину лінії, що відповідає гамма-розподілу, щільність імовірностей якого подібна ваговій функції по-

ліномів Лагерра. На рис. 17-20 наведені графіки рядів Лагерра (3), що відповідають граничним точкам: рис. 17 –  $\sigma = 1, m = 1, \gamma_3 = 1,84, \gamma_4 = 5$ ; рис. 18 –  $\sigma = 1, m = 1, \gamma_3 = 4,2, \gamma_4 = 32,2$ ; рис. 19 –  $\sigma = 1, m = 2, \gamma_3 = 0,74, \gamma_4 = 0,75$ ; рис. 20 –  $\sigma = 1, m = 2, \gamma_3 = 2,7, \gamma_4 = 13,6$ .

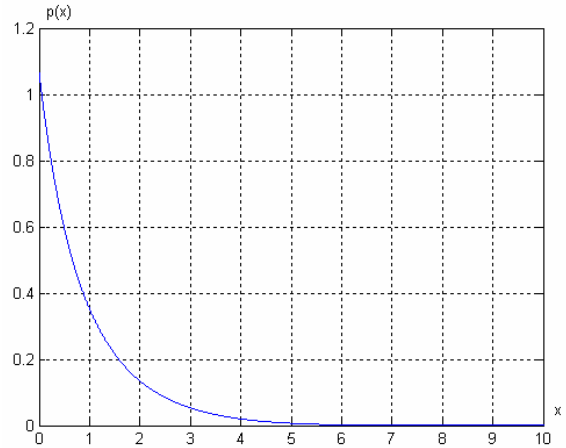


Рис. 17

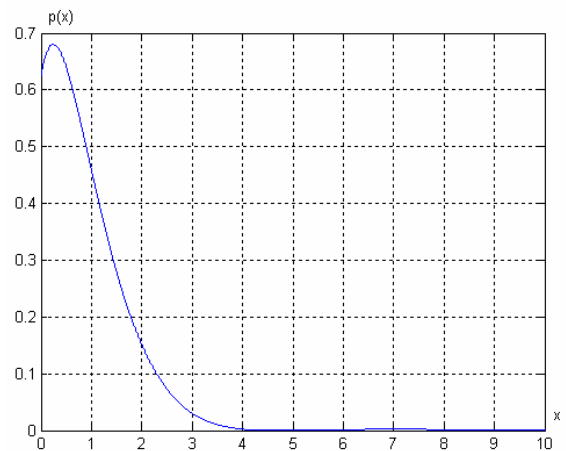


Рис. 18.

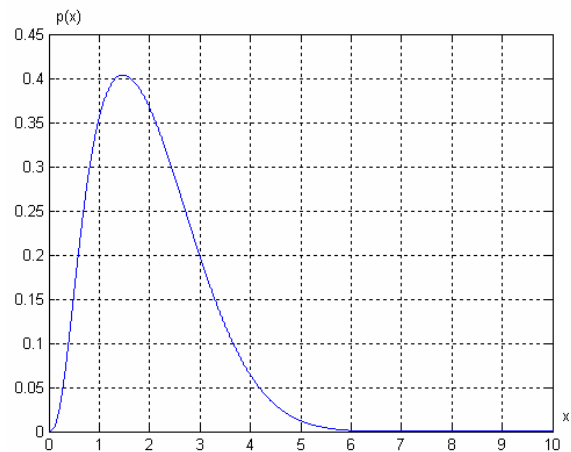


Рис. 19

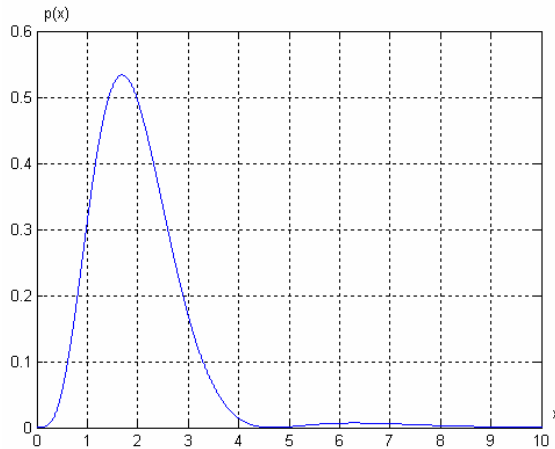


Рис. 20

### Висновок

Отримані області невід'ємності для рядів Ерміта і Лагерра дозволяють з'ясувати межі використання ортогональних подань. Показано, що при невеликих відхиленнях від областей невід'ємності з'являються незначні від'ємні відхилення. Для використання ортогональних подань при наближених знаходженнях щільностей імовірностей необхідно перевіряти, чи потрапляють кумулянтні коефіцієнти розподілу в знайдені області невід'ємності.

### Література

1. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Советское радио, 1978. – 376 с.

2. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
3. Кендалл М., Стюарт А. Теория распределений: Пер. с англ. / Под. ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1966. – 588 с.
4. Фомин Я.В., Тарловский Г.Р. Статистическая теория распознавания образов. – М.: Советское радио, 1980. – 264 с.
5. Крамер Г. Математические методы статистики: Пер. с англ. / Под. ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 684 с.
6. Jondeau E., Rockinger M. Gram-Charlier densities // Journal of Economic Dynamics & Control. – 2001. – vol. 25. – P. 1457-1483.
7. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1971. – 576 с.
8. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд., перераб и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
9. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах: Пер. с англ. / Под ред. В.В. Налимова. – М.: Мир, 1969. – 396 с.
10. Дёч Р. Нелинейные преобразования случайных процессов: Пер. с англ., под. ред. Б.Р. Левина – М.: Советское радио, 1965. – 208 с.
11. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2005. – 480 с.