

УДК 681.586

И.О. Моргун, канд. техн. наук

## Динамика цилиндрического пьезотрансформатора с разночастотным электрическим воздействием на возбуждающие электроды

Рассматривается задача об установившихся электроупругих колебаниях цилиндрического пьезоэлектрического трансформатора с двумя секциями генераторных электродов и двумя парами возбуждающих электродов, каждая из которых возбуждается электрическим сигналом со своей частотой и фазой. Задача поставлена и решена с привлечением линейной теории тонких электроупругих оболочек при смешанных электрических граничных условиях: электрического напряжения на одной из ее частей и тока смещения – на другой. Приведены выражения, позволяющие вычислять все основные электромеханические характеристики динамического процесса – перемещений, электрической напряженности пьезокерамики, электрических напряжений на генераторных электродах.

A task is examined about the set electroresilient vibrations of cylindrical piezoelectric transformer with two sections of generator electrodes and two pair of excitative electrodes, each of which becomes excited by an electric signal with certain frequency and phase. The problem is set and solved with attraction of the linear theory of thin electro elastic shells under the mixed electric boundary conditions: electric voltage on one of its parts and a bias current – on another. The expressions, allowing calculating all basic electromechanical characteristics of dynamic process, namely displacements, piezoelectric strength, electric voltages on generative electrodes, are presented.

### Введение

Преобразователи с несколькими электрически не связанными электродами в технической литературе принято называть пьезоэлектрическими трансформаторами. Электроды, подключенные к источнику электрического напряжения, называют возбуждателем. Электроды, подключенные к электрической нагрузке, называют генератором. Пьезотрансформаторы выполняют в виде однослойных или многослойных стержней, прямоугольных пластин, дисков, колец с различным расположением и размерами электродов возбуждателя и генератора, различными схемами их коммутации [1-3]. Анализ существ-

вующих научных публикаций по этой тематике показывает, что математические модели разработаны в основном для пьезотрансформаторов в виде стержня, пластины прямоугольной либо круглой формы [4-6]. Что касается преобразователей, выполненных в виде пьезокерамических оболочек с секционированными электродами [7-9], то для таких объектов математические модели отсутствуют.

Целью настоящей работы является разработка математической модели, позволяющей рассчитывать электроупругие колебания цилиндрической пьезокерамической оболочки содержащей две пары электродов генератора электрически не связанных между собою при электрическом разночастотном воздействии на возбуждающие электроды.

### Постановка и решение задачи

Запишем постановку задачи: уравнения движения пьезокерамической цилиндрической радиально поляризованной оболочки [10] и выражение индукции  $D_r$  для цилиндрической оболочки, записанное с использованием соотношений Коши [4] в безразмерном виде, разделив  $w$ ,

$u$ ,  $R$ ,  $h$  на  $R$ ;  $t$  на  $\frac{R}{c_k}$ ;  $E$  на  $\frac{1}{d_{33}}$ ;  $D$  на  $e_{13}$ :

$$(1 + \delta) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - \delta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \nu \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} - \delta \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} + w + \delta \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \nu E = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$D = \frac{\partial U}{\partial \theta} + w + \frac{1}{\varepsilon} E, \quad (2)$$

где  $h$  – толщина оболочки;  $R$  – радиус средней поверхности оболочки;  $e_{13}$ ,  $C_{11}^E$ ,  $\varepsilon_{33}^S$ ,  $\gamma$  – пьезомодуль, модуль упругости, диэлектрическая проницаемость и плотность пьезокерамики, соответственно;  $w$ ,  $u$  – нормальная и тангенциальная составляющие перемещений средней поверхности оболочки;  $\theta$  – угловая координата;  $E$ ,  $D$  – радиальные компоненты напряженности серединой поверхности оболочки и индукции электрического поля;  $t$  – время;  $c_k$  – скорость звука в пьезокерамике;  $d_{33}$  – ее пьезомодуль.

Коэффициенты, входящие в уравнения (1) и (2), определяются по формулам

$$\delta = \frac{h^2}{12R^2} \left( 1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right); \quad \nu = \frac{e_{13}}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S}; \quad \epsilon = \frac{e_{13} d_{33}}{\epsilon_{33}^S}.$$

Наружная и внутренняя поверхности оболочки имеет металлизированные электроды. Внутренний электрод сплошной и заземлен, а наружный – разделен в осевом направлении разрезами электрически не связанные части. Шириной разрезов и толщиной электродированных покрытий в дальнейшем будем пренебрегать.

На секцию электродов, занимающих области  $[\theta_0; \alpha_0]$ ,  $[-\theta_0; -\alpha_0]$  ( $\pm\theta_0; \pm\alpha_0; \pm\varphi_0$  – угловые координаты разрезов электрода), подводится заданное электрическое напряжение  $Q_1(t)$  частоты  $\omega_1$  с начальной фазой  $\sigma_1$ , а на секции, занимающие области  $[\alpha_0; \varphi_0]$ ,  $[-\alpha_0; -\varphi_0]$ , напряжение  $Q_2(t)$  частоты  $\omega_2$  с начальной фазой  $\sigma_2$  (рис.1). Подводимые электрические сигналы возбуждают в этих частях преобразователя электрические поля с напряженностями на срединной поверхности соответственно

$$E^{(1)}(t) = -\frac{Q_1(t)}{h}; \quad (3)$$

$$E^{(2)}(t) = -\frac{Q_2(t)}{h}. \quad (4)$$

Генераторные электроды  $(\theta_0; -\theta_0)$ ,  $(\varphi_0; -\varphi_0)$  подключены к электронному устройству с бесконечно большим (несколько десятков мегом) входным сопротивлением (режим “холостого хода”). Тогда для этих областей преобразователя выполняется условие по электрическому полю для разомкнутых электродов, обеспечивающее равенство нулю тока смещения через эти поверхности цилиндрической оболочки,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \int_0^L D d\theta dz = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^L D d\theta dz = 0, \quad (6)$$

где  $L$  – безразмерная высота цилиндрической оболочки отнесенная к  $R$ .

Задачу будем решать последовательно в два этапа: вначале для подводимого напряжения  $Q_1(t)$  (первый этап), а затем для напряжения  $Q_2(t)$  (второй этап). При этом электроды, на которые напряжение не подводится, будут закорачиваться, т.е. для областей  $[\alpha_0; \varphi_0]$ ,  $[-\alpha_0; -\varphi_0]$  на первом этапе и областей  $[\theta_0; \alpha_0]$ ,

$[-\theta_0; -\alpha_0]$  на втором этапе. Все физические величины, изменяющиеся от характера возбуждения при рассмотрении задачи на первом и втором этапах ее решения, будем обозначать верхним индексом «(1)» или «(2)» соответственно.

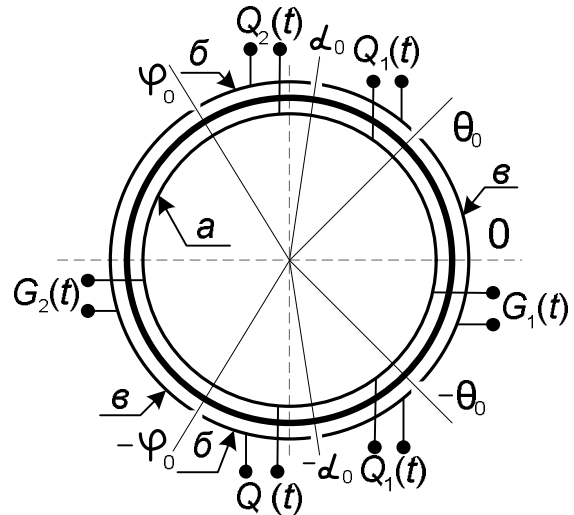


Рис.1. Расположение электродов на цилиндрическом пьезокерамическом трансформаторе (вид сверху): а – внутренний электрод заземления; б – возбуждающие электроды; в – генераторные электроды

**Первый этап:** подается напряжение  $Q_1(t)$ , напряжение  $Q_2(t)$  равно нулю. Для областей, где электроды закорачиваются  $E=0$ .

Решения будем искать в виде рядов по собственным формам колебаний оболочки (ряды Фурье):

$$w^{(1)}(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n^{(1)} \cos n\theta \cos(\omega_1 t - \sigma_1);$$

$$u^{(1)}(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(1)} \sin n\theta \cos(\omega_1 t - \sigma_1);$$

$$E^{(1)}(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(1)} \cos n\theta \cos(\omega_1 t - \sigma_1), \quad (7)$$

где  $w_n^{(1)}$ ,  $u_n^{(1)}$ ,  $E_n^{(1)}$  – неизвестные коэффициенты разложений, подлежащие отысканию;  $\omega_1$ ,  $\sigma_1$  – частота и фаза возбуждающего напряжения  $Q_1(t)$ .

Подставив выбранные разложения (7), с заменой в них индекса суммирования  $n$  на  $m$ , в выражения (5) и (6), получим для области  $[-\theta_0; \theta_0]$  электрическую напряженность

$$E^{(1)} = -\epsilon \left[ w_0^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} \left( w_m^{(1)} + m u_m^{(1)} \right) \right] H(\theta_0 - |\theta|) \quad (8)$$

где  $H(\theta_0 - |\theta|)$  – функция Хевисайда, которая принимает значение единицы для области, где

электроды разомкнуты ( $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ ), и нулевые значения для оставшейся части оболочки. Аналогично для области  $\phi_0 \leq \theta \leq -\phi_0$

$$E^{(1)} = -\varepsilon \left[ w_0^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} \left( w_m^{(1)} + mu_m^{(1)} \right) \right] \times \left[ H(\phi_0 - \theta) - H(\pi + \phi_0 - \theta) \right]. \quad (9)$$

Для той части электродов, к которым подводится электрическое напряжение  $Q_1(t)$ , напряженность запишется в виде:

$$E^{(1)} = -\frac{Q_1(t)}{h} \left\{ H(\theta - \theta_0) - H(\theta - \alpha_0) + H[\theta - (2\pi - \alpha_0)] - H[\theta - (2\pi - \theta_0)] \right\}. \quad (10)$$

Электрическая напряженность поля в произвольной точке серединной поверхности преобразователя запишется как сумма выражений (8), (9) и (10), которая раскладывается в ряд Фурье по четным функциям:

$$E^{(1)} = f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \\ A = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx;$$

$$f(x) = \begin{cases} M_1^{(1)}, & (0 \leq \theta \leq \theta_0); \\ N_1^{(1)}, & (\theta_0 < \theta \leq \alpha_0); \\ M_2^{(1)}, & (\alpha_0 \leq \theta \leq \phi_0); \\ M_2^{(1)}, & (\phi_0 \leq \theta \leq \pi), \end{cases}$$

$$\text{где } M_1^{(1)} = -\varepsilon \left[ w_0^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} \left( w_m^{(1)} + mu_m^{(1)} \right) \right];$$

$$N_1^{(1)} = -\frac{Q_1(t)}{h}; N_2^{(1)} = 0;$$

$$M_2^{(1)} = -\varepsilon \left[ w_0^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\phi_0}{m\phi_0} \left( w_m^{(1)} + mu_m^{(1)} \right) \right];$$

$$A = \eta_0^{(1)} M_1^{(1)} + \xi_0^{(1)} N_1^{(1)} + \beta_0^{(1)} M_2^{(1)};$$

$$a_n = \eta_n^{(1)} M_1^{(1)} + \xi_n^{(1)} N_1^{(1)} + \beta_n^{(1)} M_2^{(1)}.$$

Коэффициенты, входящие в записанные выражения определяются выражениями:

$$\eta_0^{(1)} = \frac{\theta_0}{\pi}; \quad \beta_0^{(1)} = 1 - \frac{\phi_0}{\pi}; \quad \xi_0^{(1)} = \frac{\alpha_0 - \theta_0}{\pi};$$

$$\eta_n^{(1)} = \frac{2 \sin n\theta_0}{n\pi}; \quad \beta_n^{(1)} = -\frac{2 \sin n\phi_0}{n\pi};$$

$$\xi_0^{(1)} = \frac{2(\sin n\alpha_0 - \sin n\theta_0)}{n\pi}.$$

Составляющие электрической напряженности  $E_n^{(1)}$  примут вид

$$E_n^{(1)} = -\eta_n^{(1)} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m}^{(1)} \left( w_m^{(1)} + mu_m^{(1)} \right) - \xi_n^{(1)} \frac{Q_1}{h},$$

где  $\lambda_{n,m}$  – коэффициенты, зависящие от  $n$  и  $m$ .

Подставляя разложение (7) в уравнения движения оболочки (1) будем иметь:

$$\begin{cases} (1 + \delta)n^2 u_n^{(1)} + nw_n^{(1)} + \delta n^3 w_n^{(1)} - v n E_n^{(1)} = \omega^2 u_n^{(1)}; \\ nu_n^{(1)} + \delta n^3 u_n^{(1)} + w_n^{(1)} + \delta n^4 w_n^{(1)} - v E_n^{(1)} = \omega^2 w_n^{(1)}. \end{cases} \quad (11)$$

Домножив второе уравнение системы (11) на  $n$ , вычтя из него первое и разрешив относительно  $u_n^{(1)}$  получим:

$$u_n^{(1)} = \frac{n(\omega_1^2 - \chi_{n3})}{\omega_1^2 - \chi_{n3}} w_n^{(1)}, \quad (12)$$

где  $\chi_{n3} = \delta n^2 (n^2 - 1)$ .

Подставляя выражение (12) в первое уравнение системы (11), с учетом выражения для составляющих напряженности  $E_n$  (7) получим:

$$\frac{\omega^4 - \chi_{n2}\omega^2 + \chi_{n4}}{\omega^2 + \chi_{n3}} w_n - v \eta_n \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \frac{\chi_{m1}\omega^2 - \chi_{m4}}{\omega^2 + \chi_{m3}} w_m = v \xi_n \frac{Q}{h},$$

где  $\chi_{m1} = (1 + n^2)$ ;  $\chi_{n2} = (1 + \delta n^2)\chi_{n1}$ ;  $\chi_{n4} = (n^2 - 1)\chi_{n3}$ .

$$\text{Обозначив } \Omega_n^{(1)}(\omega) = \frac{\omega^4 - \chi_{n2}\omega^2 + \chi_{n4}}{\omega^2 + \chi_{n3}};$$

$$\Psi_m^{(1)}(\omega) = \frac{\chi_{m1}\omega^2 - \chi_{m4}}{\omega_2 + \chi_{m3}}, \text{ выражение для отыска-$$

ния  $w_n$  можно записать в виде:

$$\Omega_n^{(1)}(\omega) w_n^{(1)} - v \eta_n^{(1)} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_{n,m}^{(1)} \Psi_m^{(1)}(\omega) w_m^{(1)} = v \xi_n^{(1)} \frac{Q}{h}, \\ (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Далее, по вычисленным значениям  $w_n^{(1)}$ ,  $u_n^{(1)}$ , находится амплитуды электрических напряжений  $G_1^{(1)}(t)$ ,  $G_2^{(1)}(t)$  на разомкнутых электродах пьезотрансформатора:

$$G_1^{(1)}(t) = \varepsilon h \left[ w_0^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} \left( w_m^{(1)} + mu_m^{(1)} \right) \right];$$

$$G_2^{(1)}(t) = \varepsilon h \left[ w_0^{(1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\phi_0}{m\phi_0} \left( w_m^{(1)} + mu_m^{(1)} \right) \right].$$

Во времени напряжение на этих электродах изменяется по закону:

$$S_1^{(1)} = G_1^{(1)} \cos(\omega_1 t - \sigma_1); S_2^{(1)} = G_2^{(1)} \cos(\omega_1 t - \sigma_2).$$

На **втором этапе** подается напряжение  $Q_2(t)$ , напряжение  $Q_1(t)$  равно нулю и соответствующие электроды закорочены. Ход решения аналогичен первому этапу.

Складывая решения, полученные на первом и втором этапах решения задачи (одновременное возбуждение соответствующих электродов напряжениями  $Q_1(t)$  и  $Q_2(t)$ ), получим следующие напряжения на генераторных электродах [11]:

1) для электрода шириной  $[-\theta_0; \theta_0]$

$$U_1 = G_1(t) \cos(\omega_1 t - \Phi_1(t)), \quad (13)$$

где

$$G_1(t) = \sqrt{\left[ G_1^{(1)} \right]^2 + \left[ G_2^{(1)} \right]^2 + 2G_1^{(1)}G_2^{(1)} \cos[\sigma_1 - \Psi(t)]};$$

$$\varphi(t) = \arctg \frac{G_1^{(1)} \sin \sigma_1 + G_2^{(1)} \sin \Psi(t)}{G_1^{(1)} \cos \sigma_1 + G_2^{(1)} \cos \Psi(t)};$$

$$\Psi(t) = \sigma_2 - (\omega_1 - \omega_2)t; \quad (14)$$

2) для электрода шириной  $[-\varphi_0; \varphi_0]$  получаются выражения аналогичные (13) и (14), в которых необходимо верхний индекс «(1)» заменить на «(2)», а  $\theta_0$  на  $\varphi_0$ .

Нахождением амплитуды напряжений  $U_1$  и  $U_2$  на генераторных электродах пьезоэлектрического цилиндрического трансформатора заканчивается решение поставленной задачи.

## Выводы

1. В результате решения поставленной задачи разработана математическая модель, включающая в себя постановку и решение задачи об установившихся электроупругих колебаниях цилиндрического пьезоэлектрического трансформатора с генераторными электродами. При постановке задачи учтена неоднородность электрических граничных условий на его поверхности. Для решения задачи привлекается: линейная теория электроупругих оболочек, базирующаяся на гипотезах Кирхгофа-Лява; разложение искомых величин по собственным формам колебаний оболочки; разложение кусочно-непрерывных функций в ряды Фурье.

2. Получены выражения, позволяющие рассчитать прогибы и тангенциальные смещения оболочки, электрическую напряженность керамики, а также электрическое напряжение, возникающее на генераторных электродах преобразователя.

3. Анализ полученных решений показывает, что в рассмотренной колебательной системе при возбуждении электрическими напряжениями с близкими частотами следует ожидать биеений [11].

## Литература

1. *Лавриненко В.В.* Пьезокерамические трансформаторы / В.В. Лавриненко – М.: «Энергия», 1975. – 112 с.
2. *Пьезокерамические преобразователи физических величин* / [Шарапов В.М., Мусиенко М.П., Шарапова Е.В.] ; под ред. В.М. Шарашарапова. — Черкассы : ЧГТУ, 2005. — 631 с.
3. *Трофимов А.И.* Пьезокерамические преобразователи статических нагрузок / А.И. Трофимов – М.: Машиностроение, 1979. – 95 с.
4. *Гринченко В.Т.* Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т./ В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга.– Киев: Наук. думка, 1989 – .–Т. 5: Электроупругость.– 1989.– 280 с.
5. *Шульга Н.А.* Колебания пьезоэлектрических тел / Н.А. Шульга, А.М. Болкисев – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
6. *Шульга Н.А.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин / Н.А. Шульга, В.Л. Карлаш – Киев: Наук. думка. – 2008. – 270 с.
7. *Патент* України №69885А, G01L, 1/16, G01P 15/09, опубл. 15.09.04. Бюл. №9.
8. *Патент* України №69884А, G01L 1/16, G01P 15/09, опубл. 15.09.04 Бюл.№9.
9. *Патент* України №19702, МПК, G01L 1/16, G01P 15/09, опубл. 15.12.06. Бюл. №12.
10. *Дідковський В.С.* Електроакустичні п'єзокерамічні перетворювачі (розрахунок, проектування, конструювання) / В.С. Дідковський, О.Г. Лейко, В.Г. Савін – Кіровоград: «Імекс-ЛТД» . – 2006. – 448 с.
11. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику / Г.С.Горелик – М.: Физматлит.– 1959. – 572 с.