

УДК 621.396.2

Т.О. Терещенко, д-р техн. наук, Д.В. Лазарєв

## Швидкий алгоритм синхронізації в системах зв'язку з розширенням спектру

Предложен быстрый алгоритм синхронизации для систем связи с расширением спектра псевдослучайной последовательностью длиной  $2^m-1$  точек с использованием быстрой свертки длиной  $2^m$  точек. Определены типы псевдослучайных последовательностей и их длины, для которых целесообразно использовать предлагаемый алгоритм. Оценены погрешности расчетов и трудоемкость нового способа синхронизации.

The fast algorithm of synchronization using  $2^m$  points fast convolution for communication systems with direct sequence spread spectrum by  $2^m-1$  points pseudo noise sequence has been proposed. The types and lengths of pseudo noise sequences suitable for usage with proposed algorithm are determined. There were made estimates of correlation errors and computational complexity.

### Вступ

В завадостійких системах зв'язку та радіолокації, зокрема типу UMTS/WCDMA, для збільшення відношення сигнал-шум передаваного сигналу використовується розширення спектру прямою послідовністю (РСПП). Збільшення відношення сигнал-шум залежить від довжини псевдовипадкової послідовності (ПВП), що використовується для розширення спектру [1]. Але при збільшенні довжини ПВП, суттєво зростає трудомісткість та час синхронізації. Пропонується новий швидкий апроксимаційний спосіб синхронізації, який має низьку трудомісткість і може використовуватись в системах зв'язку з РСПП.

### 1. Математичні основи синхронізації псевдовипадкових послідовностей

На початку сеансу зв'язку існує деякий часовий зсув  $t$  ПВП передавача і ПВП приймача. Для прийому сигналу необхідно, щоб значення  $t$  було меншим за тривалість одного символу ПВП. Зменшення зсуву до названого рівня – завдання початкової синхронізації (далі – просто синхронізації). Існує 2 класичних способи синхронізації – послідовна кореляція (ковзаючий корелятор) та узгоджена фільтрація [2]. Обидва способи базуються на кореляції прийнятого сиг-

налу з його локальною копією. Дискретна кореляційна функція (КФ) сигналу  $x(n)$  та його копії  $h(n)$  обчислюється як:

$$y(k) = \sum_n x(n) \bar{h}(n-k) = x(-k) * \bar{h}(k), \quad (1)$$

де  $\bar{h}$  – комплексно-спряжена локальна копія сигналу,  $k$  – значення зсуву,  $*$  – знак згортки. Будемо розглядати дійсні функції, для яких  $\bar{h} = h$ . В обох способах використовується пряме обчислення формули (1), яке має трудомісткість  $O(N^2)$ , де  $N$  – довжина ПВП. Ковзаючий корелятор видає один вихідний відлік за час прийому всієї послідовності, а узгоджений фільтр видає вихідний відлік при кожному новому вхідному відліку, тому в ковзаючому кореляторі – час, а в узгодженому фільтрі – потреба в обчислювальних ресурсах, збільшуються з квадратичною залежністю від довжини ПВП. Через названі проблеми, вирішення задачі зменшення трудомісткості обчислення КФ може дати суттєвий вииграш у часі синхронізації та зменшити потреби в обчислювальних ресурсах.

Дискретна дійсна КФ являє собою згортку ПВП зі своєю копією, відліки якої впорядковані в оберненій послідовності. Оскільки в системах зв'язку з РСПП кодова послідовність циклічна з періодом  $N$ , перейдемо до циклічної форми кореляційної функції:

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) h(n-k) = x(-k) * h(k), \quad (2)$$

в якій використовується циклічна згортка. Кореляційну функцію можна обчислювати за допомогою згортки, просто змінивши порядок відліків в одній з вхідних послідовностей [3]. В цифровій обробці сигналів широко застосовується алгоритм обчислення згортки, який використовує швидкі перетворення Фур'є (ШПФ) [4]. Для його реалізації виконується три ШПФ довжини  $N$  (два прямих - для сигналу і його копії та одне зворотне для представлення результату у часовій області) та  $N$  операцій множення. Значимо, що ШПФ копії сигналу обчислюють завчасно, і використовують його результат для подальших обчислень. Цей алгоритм обчислення згортки буде використано для зменшення трудомісткості синхронізації.

## 2. Апроксимаційний метод виконання згортки

Довжини ПВП, зокрема послідовностей максимальної довжини, а такої Голда та Касамі, котрі використовуються для розширення спектру, рівні  $M = 2^m - 1$  відліків [1]. Для розрахунку швидких перетворень довжини  $M$  використовують алгоритми Рейдера [5] та Блюстейна [6]. Але трудомісткість цих алгоритмів в 4-12 разів більше, ніж трудомісткість обчислення згортки на  $2^m$  відліках, через те, що для отримання кожного перетворення Фур'є необхідно обчислити 3 ШПФ довжини, не рівної  $M$ , та виконати додаткові обчислення. Так, в алгоритмі Рейдера використовується ШПФ довжиною рівною чи більшою  $2(M - 1) + 1$ , в алгоритмі Блюстейна - ШПФ довжиною  $2M - 1$  або більше.

В основі запропонованого способу синхронізації лежить алгоритм швидкого перетворення Фур'є довжини  $N = M + 1$  для ПВП довжини  $M$ . Звичайно, що таким способом можна лише приблизно розрахувати КФ.

Для оцінки похибок синхронізації виконаємо наступні дії.

Доповнимо вхідні дані нулями так, щоб отримати послідовності  $x'(0, 1, \mathbf{K}, N - 2) = x(0, 1, \mathbf{K}, M - 1)$ ,  $x'(N - 1) = 0$  та  $h'(0, 1, \mathbf{K}, N - 2) = h(0, 1, \mathbf{K}, M - 1)$ ,  $h'(N - 1) = 0$ .

Знайдемо відношення між  $x(l)$ ,  $h(l)$  та згортокою доповнених нулями послідовностей  $y'(k) = x'(-k) * h'(k)$  при  $l = 0, 1, \dots, M - 1$ ,  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ , що розраховується як

$$y'(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x'(n) h'(n-k), \quad n, k = 0, 1, \mathbf{K}, N-1, \quad (3)$$

Оскільки  $x'(N - 1) = 0$ , верхню межу суми можна обмежити  $M - 1$ . Тоді, у виразі (3)  $x'$  можна замінити на  $x$ :

$$y'(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n) h'(n-k). \quad (4)$$

Враховуючи, що при  $n = k - 1$   $h'(n - k) = h'(N - 1) = 0$ , суму можна розкласти на дві, а добуток  $x(n) h'(n - k)$  при  $n = k - 1$  прибрати. При цьому, в першій сумі (до  $n = k - 1$ )  $h'(k) = h(k + 1)$ , оскільки  $h'(N - 2, N - 3, \dots, N - M - 1) = h(M - 1, M - 2, \dots, M - M)$ . В другій сумі  $h'(k) = h(k)$ .

$$y'(k) = \sum_{n=0}^{k-2} x(n) h(n-k+1) + \sum_{n=k}^{M-1} x(n) h(n-k). \quad (5)$$

Перша складова,  $\sum_{n=0}^{k-2} x(n) h(n-k+1)$ , відпо-

відає відліку  $y(k+1)$ , а друга складова,

$$\sum_{n=k}^{M-1} x(n) h(n-k), \quad \text{відповідає } y(k), \quad \text{де } y(k) -$$

згортка на  $M$  відліків, розрахована за формулою (2). Кількість відліків у кожній сумі залежить від номера відліку  $k$ . Рис. 1 демонструє різницю між КФ, розрахованими за формулами (2), та (3). Розрахунок КФ за формулою 3 і є апроксимаційним способом.

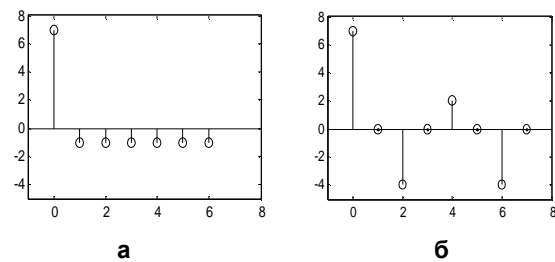


Рис. 1. Кореляційна функція  $m$ -послідовності довжиною 7: (а) обчислена звичайним способом (б) апроксимаційним способом

КФ довжиною  $M$  має один пік, амплітуда якого дорівнює значенню довжині послідовності, та інші відліки, рівні  $-1$ . КФ довжиною  $N$  також має один пік рівний  $M$ , але інші відліки не рівні  $-1$ , оскільки для цього потрібно виконання умови

$$\sum_{n=0}^{k-2} x(n) h'(n-k+1) + \sum_{n=k}^{M-1} x(n) h'(n-k) = -1$$

для  $k \neq 0$ , але існуючі ПВП не мають такої властивості.

## 3. Зсув вхідної послідовності

У випадку, коли зсув  $t$  вхідної послідовності довжиною  $M$  не рівний нулю, пік КФ зсувається і його індекс дорівнює значенню зсуву. При цьому амплітуда піка не змінюється і дорівнює  $M$ .

У КФ довжиною  $N$  значення амплітуди відліку з індексом, рівним зсуву, зменшується, а значення наступного відліку збільшується пропорційно величині зсуву  $t$  згідно з рівнянням (5). Ця властивість КФ проілюстрована на рис. 1 та 2. При  $t = 0$ ,  $y(0) = M$ ,  $y(1) = 0$  (рис. 1 (б)); при  $t = N/2$ ,  $y(N/2) = y(N/2 + 1) = N/2$  (рис. 2 (а)); при  $t = M - 1$ ,  $y(M - 1) = 2$ ,  $y(M) = M - 1$  (рис. 2 (б)). Оскільки в кожному випадку сума відліків з індексами  $t$  та  $t + 1$  приблизно дорівнює  $M$ , можна визначити зсув, визначивши індекс відліку з максимальною амплітудою, та зменшивши його на одиницю, якщо він більший за  $N/2$ . При цьому, для порівняння з пороговим значенням використовувати суму відліків з індексами  $t$  та  $t + 1$ .

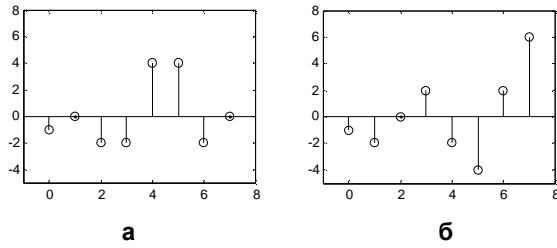


Рис. 2. Кореляційна функція  $m$ -послідовності зі зсунутою копією, обчислена апроксимаційним способом: (а)  $t = 4$ ; (б)  $t = 6$

4. Характеристики КФ

Порівнюємо характеристики КФ різних ПВП, розрахованих класичними та апроксимаційним способами. У табл. 1 подано довжину регістра зсуву –  $m$ , максимальні значення відліків КФ  $y'(k)$  при  $k \neq 0$  для послідовностей максимальної довжини, Голда та Касамі –  $\rho_m, \rho_\Gamma, \rho_K$ , а також ці ж величини, розраховані апроксимаційним способом –  $\rho_{A,m}, \rho_{A,\Gamma}, \rho_{A,K}$ , приведених до величини  $M$ . Величина  $M$  в класичному способу дорівнює амплітуді піка  $y(t)$ , в апроксимаційному – сумі двох відліків  $y(t) + y(t+1)$ .

Значення  $\rho_\Gamma, \rho_K$  були розраховані за відомими формулами [2].  $\rho_{A,m}, \rho_{A,\Gamma}$  та  $\rho_{A,K}$ , отримані експериментально для вибіркової послідовностей.

Для ПВП відношення  $\rho/M$  повинно бути якомога меншим, щоб забезпечити більше відношення сигнал/шум у реальній системі зв'язку. Як видно з табл. 1, відношення для деяких із наведених піків КФ до їх довжини при розрахунку звичайним методом та апроксимаційним суттєво відрізняються. Наприклад, відношення  $\rho_{A,m}/M$  для  $m$ -послідовностей розрахованих апроксимаційним способом для довжини 63, складає 0,222, а розраховане звичайним способом  $1/M$  для цієї ж довжини складає 0,016, що в два рази менше, ніж для відношення  $\rho_{A,m}/M$  для послідовності довжиною 1023, розрахованої апроксимаційним способом. Для послідовностей Голда довжиною 63 та 127 відповідні значення відрізняються не суттєво, але для послідовностей довжини 511 та 1023 значення відрізняються майже у два рази. Для послідовностей Касамі значення  $\rho_K/M$  та  $\rho_{A,K}/M$  відрізняються приблизно настільки ж, наскільки відрізняються відповідні значення для ПВП Голда.

Таблиця 1. Максимальні відносні значення відліків КФ при  $k \neq 0$

Довжина регістра зсуву ПВП	Класичний спосіб			Апроксимаційний спосіб		
	$\rho_m/M$	$\rho_\Gamma/M$	$\rho_K/M$	$\rho_{A,m}/M$	$\rho_{A,\Gamma}/M$	$\rho_{A,K}/M$
6	0,016	0,27	0,143	0,222	0,222	0,222
7	0,008	0,134		0,095	0,158	
8	0,004		0,031	0,086		0,157
9	0,002	0,065		0,055	0,102	
10	0,001	0,064	0,032	0,049	0,11	0,067

Отже, є переваги у застосуванні апроксимаційного способу для послідовностей Голда та Касамі.

5. Алгоритм синхронізації

Алгоритм синхронізації ПВП наведений на рис. 3.

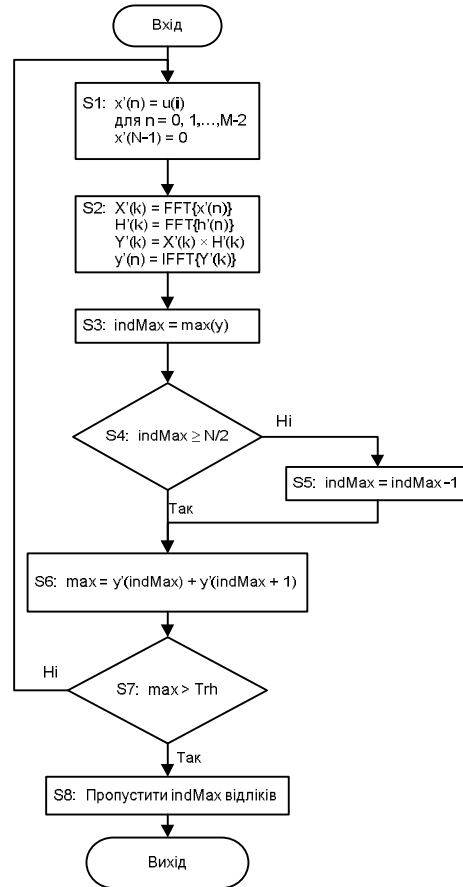


Рис. 3. Алгоритм синхронізації

Алгоритм містить наступні кроки:

S1.  $M$  відліків вхідного сигналу записуються в масив  $x'(n)$ . В останній відлік масиву записується нульове значення.

S2. Виконується згортка  $x'(n)$  та  $h'(n)$ . Одна з цих послідовностей повинна бути попередньо інвертована, наприклад  $h'(N-n) = h(n)$ . Розраховується спектр сигналу та локальної копії –  $X'(k)$  та  $H'(k)$ , відповідно. Спектр  $H'(k)$  розраховується один раз. Після цього виконується зворотне швидке перетворення Фур'є над добутком спектрів, в результаті чого отримують КФ –  $y'(n)$ .

S3. Визначається індекс відліку з максимальною амплітудою та зберігається у змінну  $indMax$ .

S4. Якщо  $indMax$  менший за половину довжини КФ – перехід до S6. Якщо рівний або більший за половину довжини КФ – перехід до S5.

S5. Індекс зменшується на одиницю.

S6. Розрахунок пікової амплітуди, еквівалентної відліку  $y(t)$  при розрахунку КФ за формулою (2).

S7. Значення, отримане після виконання кореляції не перевищує задане значення – перехід до S1.

S8. Пропуск  $indMax$  відліків після  $x'(0)$ . Якщо виконання попередніх кроків циклу зайняло більше ніж  $indMax$  відліків, пропускається  $rM + indMax$  відліків, де  $r = 0, 1, \dots$

Порівнюємо трудомісткість обчислень синхронізації з використанням класичних способів, та апроксимаційного способу.

Формули для обчислення кількості операцій множення

$$2\text{Mog}_2(N) + 8N + 4N \quad (6)$$

та додавання

$$3\text{Mog}_2(N) + 8N + 2N + 2 \quad (7)$$

враховують обчислення двох швидких перетворень Фур'є з кроку S2 для дійсних чисел, трудомісткість яких складає  $2\text{Mog}_2(N) + 8N$  операцій множення та  $3\text{Mog}_2(N) + 8N$  операцій додавання [4];  $4N$  множень та  $2N$  додавань для перемноження комплексних спектрів довжиною  $N$  з кроку S2; 2 операції додавання з кроків S5 та S6.

Обчислення КФ класичними способами, за формулою (2), вимагає  $M^2$  операцій множення та стільки ж додавань. В табл. 2 наведена кількість необхідних операцій для деяких довжин ПВП.

**Таблиця 2. Порівняння трудомісткості синхронізації ПВП**

M	Прямий спосіб, множень та додавань	Апроксимаційний спосіб	
		Множень	Додавань
63	3969	1536	1794
127	16129	3328	3970
255	65025	7168	8706
511	261121	15360	18946
1023	1046529	32768	40962

З табл. 2 видно, що зі зростанням довжини ПВП, вираш від використання апроксимаційного способу швидко зростає. Це дозволяє використовувати швидку синхронізацію, котра не потребує високих обчислювальних потужностей.

## Висновки

1. Розроблений спосіб синхронізації для завадостійких систем зв'язку з розширенням спектру, доцільно використовувати в системах типу UMTS/WCDMA. Він має меншу трудомісткість у порівнянні з класичними методами – узгодженим фільтром та ковзаючим корелятором. При реалізації способу синхронізації швидким алгоритмом при довжині ПВП 1023 відліки, необхідно в 32 рази менше операцій множення та в 25 разів менше операцій додавання. Зі зростанням довжини ПВП, вираш від використання апроксимаційного способу швидко зростає.

2. Запропонований спосіб синхронізації доцільно використовувати в тих випадках, коли кореляційні властивості ПВП погіршуються не суттєво, а саме для послідовностей Голда довжиною 63 та 127, та Касамі довжиною 64 та 1023.

3. Для визначення зсуву використовується не один відлік КФ, як при використанні звичайного способу, а два, сума яких приблизно дорівнює піку, отриманому звичайним способом. Значення цих відліків, у найгіршому випадку, дорівнює половині піку, отриманому звичайним способом.

4. Реалізація швидкого алгоритму синхронізації не потребує додаткових обчислювальних потужностей.

## Література

1. Феер К. Беспроводная цифровая связь. Методы модуляции и расширения спектра: Пер. с англ. / Под ред. В. И. Журавлева. – М.: Радио и связь, 2000. – 520 с.: ил.
2. Прокис Дж. Цифровая связь. Пер. с англ. / Под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.: ил.
3. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 448 с.: ил.
4. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Второе издание Пер. с англ. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. – 656 с.: ил.
5. Rader C.M., "Discrete Fourier Transforms when the Number of Data Samples Is Prime," Proceedings of the IEEE, Vol. 56, June 1968, pp. 1107-1108.
6. Leo I. Bluestein, "A linear filtering approach to the computation of the discrete Fourier transform," Northeast Electronics Research and Engineering Meeting Record 10, 218-219 (1968).