УДК 621.39

С.М. Веретюк, В.В. Пілінський, канд. техн. наук, Н.І. Бойчук

Моделювання рельєфу земної поверхні як середовища поширення радіохвиль із застосуванням фрактальної геометрії

Узагальнено інформацію щодо фрактальних поверхонь, і моделей цих поверхонь. Наведено поширені алгоритми побудови фрактальних поверхонь, проаналізовано їх прикладний характер. Зазначені особливості застосування класичних підходів до визначення складників електромагнітного поля над фрактальною поверхнею.

The information about fractal surfaces and models of its surfaces is generalised. Known algorithms of forming fractal surfaces are considered, its applied points are specified. For features application classical approaches to field defining over fractal surface is considered.

Вступ

Для впровадження мобільних радіосистем необхідне застосування моделей поширення електромагнітних хвиль, які дозволяють визначити втрати сигналу в середовищі поширення і в загальному вигляді є сукупністю математичних виразів, діаграм, графіків та алгоритмів.

Математичні моделі радіоліній детально розглянуто в роботах [1,2,3].

Основний принцип формування математичної моделі радіолінії зображено на рис.1.

Рис. 1. Принцип формування математичної моделі радіолінії

Модель радіолінії інкапсулює в собі моделі нижчих рівнів. Саме на етапі розбудови моделі земної поверхні виникає потреба в адекватному описі профілю поверхні. Тому метою роботи є вибір і обґрунтування адекватної моделі рельєфу земної поверхні як моделі середовища поширення електромагнітних хвиль (ЕМХ) для проектування лінії зв’язку.

Фрактальні поверхні

В контексті дослідження поширення ЕМХ над земною поверхнею важливим етапом є аналіз розсіювання хвиль нерівною поверхнею. Оскільки профіль земної поверхні неможливо описати ані детерміністичними ані стохастичними засобами, тому задача формалізації опису профілю земної поверхні є актуальною. Для опису земної поверхні та для отримання результатів загального характеру необхідно підібрати універсальну математичну конструкцію.

Переважну більшість об’єктів в природі неможливо описати гладкими кривими або поверхнями, які властиві для геометричних фігур. Відомо, що іррегулярні функції складають більшість в порівнянні з неперервними, гладкими функціями, тому властивість диференційовності є нетиповою для реальних природних об`єктів.

Дослідження природних об`єктів вказує на наявність характерних рівнів регулярності, фрагментації та подібності. Цим властивостям відповідають фрактали та фрактальні функції [4,5,6].

Основною характеристикою фрактального об’єкта є його фрактальна розмірність D:

$$D = \lim_{\delta \to 0}\left[-\frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}\right], \qquad (1)$$

де $N(\delta)$ - кількість елементів, δ - елемент об’єкту (залежно від типу об’єкта може бути відрізком, ділянкою поверхні або об’єму).

За даними Мандельброта [4] фрактальна розмірність має бути більшою за топологічну (якщо топологічна розмірність поверхні дорівнює 2, то $D>2$, фізичний зміст цієї нерівності полягає в тому, що вона характеризує ускладнення поверхні в порівнянні з гладкою). Топологічна розмірність просторових об’єктів дорівнює 3, тобто, для фрактальної поверхні справедливе співвідношення $2<D<3$. Фрактальна розмірність вказує на властивість масштабної інваріантності об’єкту, який аналізують.

Таким чином, фрактальну поверхню визначаємо як поверхню, фрактальна розмірність якої відповідає нерівності $2<D<3$, і за означенням Мандельброта це «структура, яку складено із частин, які в деякому сенсі подібні». В контексті поширення ЕМХ слід зауважити, що фрактальній поверхні властива наявність нерівностей всіх масштабів відносно довжини розсіюваної хвилі.

Особливості застосування класичних методів розв`язку задачі поширення ЕМХ над фрактальною поверхнею

Практично неможливо вказати умови поширення ЕМХ, за яких відсутні нерівності земної поверхні. Зазвичай, досить наближено, критерієм для оцінювання впливу нерівностей є відношення характерної висоти нерівностей h до довжини хвилі λ. Якщо промінь відбивається від горизонтальної площини на глибині h, то виникає різниця фаз $\Delta\phi$. Вертикальними нерівностями можна знехтувати за умови (відповідно до критерію Релея): $\Delta\phi < \frac{\pi}{2}$ [7].

Для урахування горизонтальних розмірів нерівностей визначають область земної поверхні, суттєву для відбивання (перші зони Френеля). В роботі [5] показано, що критерієм може бути:

$$l << \frac{1}{\sin\gamma_i}\sqrt{\pi\lambda r}\ , \qquad (2)$$

де l –розмір горизонтальних нерівностей, γ_i – кут ковзання, м; r- відстань до передавача, м.

Із зазначених умов випливає, якщо менше кут ковзання і більше довжина хвилі, тоді вплив нерівностей є меншим. В процесі розв´язання практичних задач поширення ЕМХ над нерівностями здебільшого необхідно знати вплив великої кількості нерівностей однакового типу: морської поверхні, рослинного шару, міської забудови, одноманітного рельєфу місцевості, тощо. Нерівна поверхня, відповідно до принципу Гюйгенса-Френеля, є множиною вторинних джерел поля, які мають свою амплітуду і різницю фаз. Однак, якщо маємо велику кількість таких джерел, то існує набір в «середньому» синфазних відбитих хвиль, тобто таким чином можна визначити «псевдогладку» поверхню. Слід зауважити, що поля цих джерел додаються когерентно. Це когерентне розсіювання є значним саме в тому напрямі, в якому поширюється хвиля, дзеркально відбита від площини, яка має сенс певної середньої площини. Окрім того, нерівності поверхні обумовлюють наявність розсіювання в інших напрямах, в такому випадку вторинні джерела випромінюють некогерентно.

Класичний підхід до визначення когерентного складника поля розсіювання полягає у розбиванні поверхні розсіювання на елементарні ідеально гладкі ділянки (вважаємо, що закон розподілу цих ділянок є визначеним). Сумарне когерентне поле тоді визначають за співвідношенням:

$$E_{КОГ} = \sum_i^N \langle E_i \rangle \exp(j\varphi_i)\ , \qquad (3)$$

де $\langle E_i \rangle$ та φ_i відповідно математичне очікування напруженості електричного поля і фаза хвилі відбитої від і-тої ділянки поверхні.

Найбільш ефективним методом визначення характеристик поля над нерівною поверхнею є метод інтегральних рівнянь, а саме розв´язок однорідного хвильового рівняння поля (рівняння Гельмгольця) для певних умов, відносно будь-якого складника поля Ψ, для вільного простору можемо записати:

$$\nabla^2\vec{\Psi} + k^2\vec{\Psi} = 0\ ,\ k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (4)$$

Також дослідження поля розсіювання можна провести із застосуванням наближень Кірхгофа - поле в точці p на відстані R від поверхні, яка є сукупністю вторинних джерел, може бути представлено співвдношенням:

$$\psi(p) = \oint_S \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} G - \psi \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds\ , \qquad (5)$$

де ψ - будь-яка проекція векторів E і H в декартовій системі координат, G – функція Гріна для вільного простору [8].

Цей вираз за відомими значеннями ψ та $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ на поверхні S дозволяє визначати функцію ψ в усіх точках.

Проте для випадку математичних фрактальних нерівностей застосування класичних підходів має ряд обмежень. Фрактальні функції не мають похідних в усіх точках, а отже неможливо провести дотичну і відповідно неможливо визначити нормаль до поверхні. Фрактальний фронт хвилі, є недиференційованим, не має нормалі, і тому втрачають сенс поняття «променева траєкторія» та «геометрична оптика». Проте дослідження розсіювання проводять, як правило, на об’єктах з кінцевими розмірами, а отже для опису таких об’єктів можна використовувати моделі природних (фізичних) фракталів, тобто тих, які зберігають фрактальні властивості на обмеженому інтервалі масштабів [9].

Алгоритми формування фрактальних поверхонь

Основою алгоритмів формування фрактальних поверхонь є засоби побудови фрактальних часових рядів (ФЧР). Зауважимо, що ФЧР є самоафінними функціями і лише в окремих випадках самоподібними [4,6].

Найпростіша фрактальна поверхня.

Фрактальну поверхню, отриману в результаті паралельного переносу фрактальної кривої вздовж напряму, перпендикулярного до її площини називають *найпростішою фрактальною поверхнею*. Концепція побудови представлена на рис. 2.

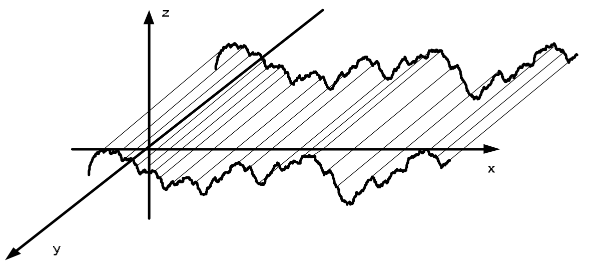

Рис. 2. Найпростіша фрактальна поверхня (генератор – функція Вейєрштраса).

Формально розмірність такої поверхні відповідає сумі розмірностей прямої і фрактальної лінії, і таким методом можна формувати поверхні з розмірністю *2<D<3*, проте вони не будуть відповідати ускладненим реалістичним моделям земної поверхні, яка є більш складною в горизонтальній площині.

Суперпозиція найпростіших фрактальних поверхонь.

Для отримання нетривіальних більш наближених до реальних профілів застосовують метод суперпозиції найпростіших фрактальних поверхонь[6].

Суть методу полягає в додаванні декількох найпростіших фрактальних поверхонь після попередньої трансформації. Трансформація передбачає масштабування вздовж вісі *z* випадковим коефіцієнтом $h \in [0;1]$ і обертання в площині *x0y* на випадковий кут $\phi \in [0;2\pi]$ навколо випадкової точки (x_0; y_0). В даному випадку «генератором» найпростіших фрактальних поверхонь може бути або одна й та сама фрактальна крива, або різні, але обов`язковою умовою є їх формування з однаковою фрактальною розмірністю.

Профілі отримані таким чином використовують для моделювання ландшафтів в графічних редакторах. В контексті поширення ЕМХ, прикладна цінність таких поверхонь полягає у можливості реалізації трасування променів засобами ЕОМ. Аналітичне представлення, формалізація такої поверхні є складною задачею [6].

Алгоритм зміщення середньої точки.

Суть методу полягає в поступовому розбитті квадрата в заданій площині на квадрати менших розмірів. Задачу зведено до обчислення координат вузлів отриманої решітки. На першому кроці слід задати значення висоти в кутах заданого квадрату. Наступний крок передбачає визначення координати центру квадрату за правилом середнього арифметичного:

$$z_Ц = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}, \qquad (6)$$

де $z_ц$, z_1,..,z_4 – значення висот відповідно в центрі квадрату та в кутах.

До отриманого значення додають величину Δz, що розподілена за Гаусовим законом із нульовим середнім та дисперсією σ, яку визначають виразом:

$$\sigma = r^H, \qquad (7)$$

де r-відстань від центральної точки до вершини, для першої ітерації $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$, H-показник Херста [9], який пов`язаний із фрактальною розмірністю співвідношенням $D = 3 - H$.

Наступні кроки передбачають виконання перерахованих операцій для кожного квадрата. Приклад фомування поверхні представлено на рис.3

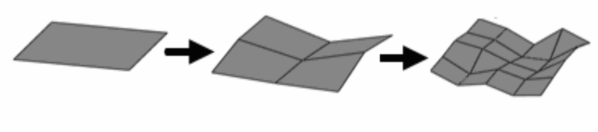

Рис. 3. Реалізація алгоритму зміщення середньої точки (представлено перші три ітерації)

Вказаний алгоритм має перевагу в порівнянні з іншими, оскільки даним методом можна формувати поверхні максимально наближені до реальних об`єктів, адже є можливість одразу визначити площину із фіксованими значеннями висоти в контрольних точках, а також показником Херста впливати на шорсткість поверхні. Детально такий підхід наведено в [6]. Ця методика дозволяє формувати наближені до реальних профілі земної поверхні лише засобами ЕОМ, оскільки через процедурний характер не дозволяє формалізувати процес опису аналітичним виразом.

Метод Фур`є.

В основі методу – двомірне дискретне перетворення Фур'є. Відповідно до нього фрактальну поверхню задану функцією $h = z(x, y)$, можна представити у вигляді:

$$z(x,y) = \sum_{f_i = f_{1\min}}^{f_{1\max}} \sum_{f_j = f_{2\min}}^{f_{2\max}} A(f_i, f_j) \cdot e^{i\left(f_i x + f_j y + \phi_{RAND}\right)}, \qquad (8)$$

де *[f_{1min};f_{1max}], [f_{2min};f_{2max}]*- діапазони просторових частот; A(x,y) – амплітуда відповідних гармонік; $\phi_{RAND} \in [0;\pi]$ - випадкова фаза.

На практиці використовують лише дійсну частину (8).

Для того щоб функція $h = z(x, y)$ була фрактальною, вимагають щоб було слушним співвідношення:

$$A(f_1, f_2) \sim M f_1^{D-2} + N f_2^{D-2}, \qquad (9)$$

де M,N – амплітудні множники; D –фрактальна розмірність.

На рис. 4 представлено фрактальну поверхню, сформовану методом Фур'є, для D=1.5.

Даний алгоритм дає можливість формалізувати фрактальну поверхню, і ввести, як параметр, фрактальну розмірність. Цей метод дозволяє також визначати фрактальну розмірність поверхні шляхом проведення дискретного перетворення Фур'є і подальшого аналізу спектру [6].

Масштабно-інваріантні фрактальні криві.

Функцію $f(x)$ вважають масштабно-інваріантною за умови: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Властивість може бути прокоментована так: якщо відомі значення функції на певному початковому малому проміжку, то цим самим відомі значення функції відомі на будь-якому великому проміжку [5].

Прикладом такої функції є функція Вейєрштраса:

$$W(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 - e^{ib^n x}\right) e^{i\phi_n}}{b^{(2-D)^n}}, \qquad (10)$$

Фактично функція (10) є Фур'є-розкладом за частотами:

$$f_j = b f_{j-1} = b^j. \qquad (11)$$

На практиці використовують модифіковану функцію Вейєрштраса з нульовим середнім значенням [10]:

$$\xi(x) = \sigma C \sum_{n=0}^{N-1} (\text{D-1})^n \sin\left(K b^n x + \phi_n\right), \qquad (12)$$

де $C = \sqrt{\dfrac{2D(2-D)}{1-(D-1)^{2N}}}$ - коефіцієнт контролю амплітуди; N –кількість гармонік (N –скінчене); D – фрактальна розмірність, K- просторове хвильове число; φ_n – довільна фаза, σ^2 –середньоквадратичне значення $\xi(x)$; b>1 – параметр просторово-частотного масштабування.

Графіки функції $\xi(x)$ представлено на рис.5

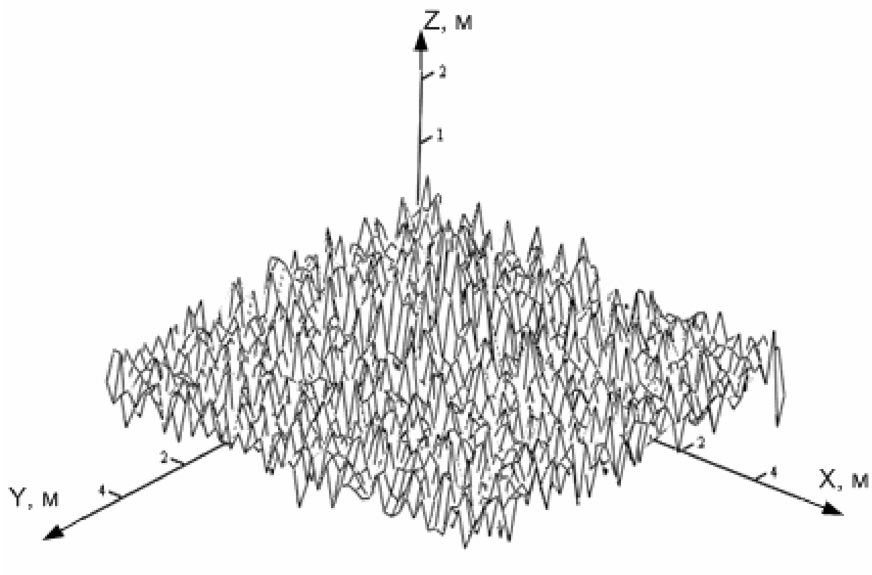

Рис. 4. Фрактальна поверхня сформована методом Фур'є

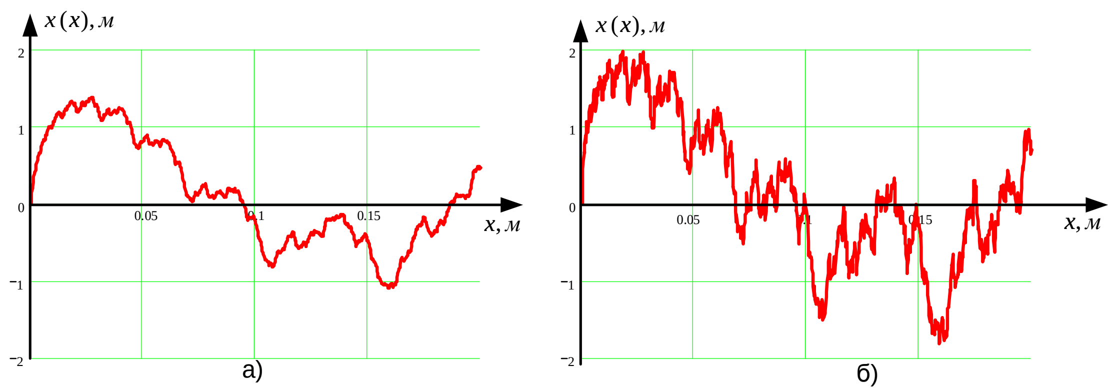

Рис. 5. Графік функції Вейєрштрасса за умов: а)D=1.7; б) D=1.8

Самоподібність функції визначають співвідношенням:

$$\xi(x) \approx (D-1)^{-1}\xi(bx), \qquad (13)$$

очевидно, що тоді горизонтальну вісь масштабують коефіцієнтом *b*, вертикальну - $(D-1)^{-1}$.

Особливістю функції (12) є зчисленна кількість гармонік, а отже вона зберігає фрактальні властивості лише в обмеженому діапазоні масштабів, і фактично є моделлю природних фракталів. Обмеженість діапазону призводить до диференційованості функції, а отже в такому випадку можливе застосування класичних методів визначення поля розсіювання.

Функція Вейєрштраса надає можливість формалізувати процес опису фрактальних об'єктів, а також задавати шорсткість поверхні та статистичні характеристики. На цій підставі вважаємо за доцільне використання цієї функції для опису профілю земної поверхні та для подальшого визначення складників поля розсіювання.

Під час моделювання профілю земної поверхні, доцільно використовувати експериментально визначені значення фрактальної розмірності для різних типів поверхонь [8].

Висновки

Методики, які не дозволяють формалізувати процес опису земної поверхні аналітичним виразом, не можуть бути безпосередньо використані для визначення поля розсіювання методом інтегральних рівнянь.

Зазначено особливості застосування класичних методів розв`язку задачі поширення ЕМХ над фрактальною поверхнею. У випадку математичних фракталів втрачають сенс поняття «променева траєкторія» та «геометрична оптика», через недиференційованість фрактальних функцій.

Доцільно для подальшого дослідження розсіювання електромагнітного поля використовувати діапазонннообмежену (з обмеженою кількістю гармонік) функцію Вейєрштраса, якій властиві такі ознаки:

– зберігає фрактальні властивості на обмеженому інтервалі масштабів, а одже є моделлю природних фракталів;
– дозволяє для аналізу поля розсіювання застосовувати класичні підходи (метод інтегральних рівнянь, тощо).

Література

1. *COST 231.*Propagation Prediction Models. Dieter J. Cichon 1, IBP PIETZSCH GmbH, Germany Thomas Kürner 1, E-Plus Mobilfunk GmbH, Germany. -1999. - P.115-127.
2. *COST 231*. Propagation Models for Macro-Cells. Thomas Kürner , E-Plus Mobilfunk GmbH, Germany.- 1999. - P.134-148.
3. *Веретюк С.М.,* Пілінський В.В. Сучасні математичні моделі радіоліній.// Электроника и связь. - 2006. - №3. -С. 59-68.
4. *Мандельброт Б*. Фрактальная геометрия природы: пер. с англ..-М.: Институт компьютерных исследований, 2002. -656 с.
5. *Геранін В.О*., Писаренко Л.Д., Рущицький Я.Я.: Теорія вейвлетів з елементами фрактального аналізу, Науково-методичне видання.- Київ:ВПФ УкрІНТЕІ, 2002. – 364 с., шл.- Укр.
6. *Шишкин Е.И*. Моделирование и аналіз пространственных и временных фрактальных объектов, Научно-методическое издание.- Екатеринбург: Уральский гос. университет, 2004.- 88 с. :ил.
7. *Фейнберг Е.Л*. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. -2-е изд. М.: Наука. Физматлит, 1999. – 496 с.
8. *Корн Г*., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: пер. с англ..-М.: Наука, 1970. – 720 с.
9. *Федер Е.* Фракталы: Пер. с англ..-М.: Мир, 1991. -254с., ил
10. *Потапов А.А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. Изд.2-ое, перераб. и доп. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.: ил.