УДК 621.326

В.В. Филаретов, д-р техн. наук

Теорема Сигорского об определителе суммы матриц и диакоптика

Рассмотрены основания и приложения теоремы Сигорского об определителе суммы матриц. Предложены новые интерпретации этой теоремы в базисах двоичных векторов и схемных миноров, повышающие эффективность использования теоремы при аналитическом решении задач матричной алгебры и символьно-численном анализе электрических цепей по частям.

Sigorskiy's Theorem for Sum of Matrices Determinant and Diacoptics. The basics and application of the Sigorskiy's Theorem for sum of matrices are examined. The new interpretations of the theorem are given for the binary vectors basis and schematic minors that makes more efficient the use of the theorem for the matrix algebra problems analytical solution and symbolic-numerical analysis of electrical circuits using decomposition.

Введение

Артур Кэли (1821–1895) – основатель алгебры матриц – как-то заметил: «Многое можно сказать об этой теории матриц…». Такой эпиграф Виталий Петрович Сигорский предпослал главе «Матрицы» справочного пособия «Математический аппарат инженера» [1].

В фундаментальной монографии [2, с. 9], полвека сохраняющей свое значение, отмечается, что «в связи со все более возрастающей сложностью электрических цепей и их элементов перед теорией схем встала задача создания универсальных методов, пригодных для использования в различных областях электротехники и обеспечивающих максимальную автоматизацию процесса анализа». Методами, удовлетворяющими этим требованиям стали методы диакоптики, то есть методы исследования электрических цепей делением их на части.

«Матричный язык», как никакой другой, способствовал формализации мышления, поэтому с начала 60-х годов прошлого века лег в основу многочисленных программ моделирования электрических цепей и САПР в целом. Для обоснования большинства методов теории электрических цепей использовался и используется матричный подход. Так было и в случае топологического метода бисекции (деление схемы на две части, анализ подсхем в отдельности и объединение результатов анализа подсхем).

После Элизара Вульфовича Зеляха, который ввел в теорию электрических схем матричную алгебру [3], трудно найти специалиста, более приверженного матричным выкладкам, чем В.П.Сигорский. Его по праву можно считать основателем матричной диакоптики.

1. Матричная формула бисекции

Схема отображается матрицей, которая представляется в виде суммы подматриц, соответствующих подсхемам. Важно, что подсхемы могут анализироваться независимо друг от друга (одновременно или в разное время) в символьном или численном виде. Представление матрицы в виде суммы двух матриц по аналогии с операцией деления схемы можно называть бисекцией матрицы.

Рассмотрим случай полностью заполненной матрицы *C* порядка *n*=3, представляющей сумму двух полностью заполненных матриц *A* и *B* того же порядка. Представим определитель этой суммы через столбцы слагаемых матриц

$$\Delta = \left|c^1, c^2, c^3\right| = \left|a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3\right|. \quad (1)$$

В соответствии со свойством линейности определителя относительно столбцов можно записать

$$\Delta = \left|a^1 + b^1, c^2, c^3\right| = \left|a^1, c^2, c^3\right| + \left|b^1, c^2, c^3\right|. \quad (2)$$

Применяя это свойство относительно вторых и третьих столбцов полученных определителей, имеем

$$\begin{aligned}\Delta &= \left|a^1, a^2, c^3\right| + \left|a^1, b^2, c^3\right| + \left|b^1, a^2, c^3\right| + \left|b^1, b^2, c^3\right| = \\ &= \left|a^1, a^2, a^3\right| + \left|a^1, a^2, b^3\right| + \left|a^1, b^2, a^3\right| + \left|a^1, b^2, b^3\right| + \quad (3)\\ &+ \left|b^1, a^2, a^3\right| + \left|b^1, a^2, b^3\right| + \left|b^1, b^2, a^3\right| + \left|b^1, b^2, b^3\right|.\end{aligned}$$

Таким образом, в результате отсутствуют определители, содержащие элементы в виде суммы элементов различных матриц, и получаются определители, образованные из столбцов матриц *A* и *B* всеми возможными сочетаниями.

Аналогичный процесс разложения для матрицы *det(A+B)* произвольного порядка *n* до последних столбцов включительно, приводит к сумме, которая содержит определители слагаемых матриц *detA* и *detB*, а также определители, образованные из столбцов матриц A и B всеми возможными сочетаниями. При этом столбцы в таких определителях занимают те же места, которые они занимали в матрицах *A* и *B*.

Завершение выражений вида (2) и (3) можно представить суммой

$$\det(A+B)=\det A+\sum\Delta(1)+\sum\Delta(2)+ \\ +\ldots+\sum\Delta(s)+\ldots+\sum\Delta(n-1)+\det B, \qquad (4)$$

где $\Delta(s)$ – определитель, полученный замещением *s* столбцов определителя первой матрицы соответствующими столбцами второй матрицы. Знаки сумм означают, что суммируются определители всех возможных сочетаний *s* замещаемых столбцов.

Для подсчета количества таких сочетаний воспользуемся двоичными векторами (ДВ), в которых единица будет соответствовать элементу матрицы A, а нуль – элементу матрицы B. Например, выражение (4) для случая n=3, содержит 8 слагаемых (3), соответствующих ДВ: 111, 110,101,100,011,010,001,000. Сумма всех возможных сочетаний из *n* элементов (булеана) $\binom{s}{n}$ при s=0,1,…,n равна 2^n. Именно столько слагаемых содержится в (4).

Выражение (4) пригодно для представления слагаемых стоящих под знаками суммы в виде миноров матриц *A* и *B* – частей или подматриц исходной матрицы. В этом и состоит задача диакоптики. Воспользуемся, как В.П.Сигорский, сравнительно малоизвестным обобщенным разложением Лапласа для определителей $\Delta(s)$ по *s* замещенным столбцам

$$\Delta(s)=\sum\;(-1)^{\sigma}M_S^B\overline{M}_S^B, \qquad (5)$$

где σ – сумма номеров строк и столбцов, участвующих в формировании минора M_S^B (или $\overline{M}_S^A$), M_S^B – минор матрицы *B*, выделенный на совокупности *s* строк; $\overline{M}_S^A$ – минор (n–s)-го порядка матрицы *A*, дополнительный к минору M_S^B.

В основе выражения (5) лежит понятие алгебраического дополнения минора *M* порядка *s*, расположенного в строках с номерами i_1, i_2, …, i_s и столбцах с номерами j_1, j_2, …, j_s некоторой квадратной матрицы α порядка *k*

$$M=(-1)^{s+t}\det\alpha_{j1,j2,\ldots jk}^{i1,i2,\ldots ik}, \qquad (6)$$

где $\det\alpha_{j1,j2,\ldots jk}^{i1,i2,\ldots ik}$ – определитель матрицы порядка n–k, полученной из матрицы α вычеркиванием строк и столбцов минора *M*; $s=i_1+i_2+\ldots+i_k$, $t=j_1+j_2+\ldots+j_k$. Выражение (6) первоначально было использовано в теореме Лапласа о разложении определителя матрицы по некоторому множеству ее строк или столбцов [4].

Строго говоря, фактическими авторами результата (6), лежащего в основе теоремы, приписываемой «молвой» Лапласу, являются, не только П.Лаплас (1773 г.), но и А.Вандермонд (1771 г.), Э.Безу (1779 г.), а законченное решение сформулировал и доказал О.Коши в 1779 году [4].

С учетом (5) и (6) из (4) получается другое выражение для определителя суммы двух матриц

$$\det(A+B)=\det A+\sum_{s=0}^{n-1}\sum(-1)^{\sigma}M_S^B\overline{M_S^A}+\det B, \qquad (7)$$

Следует подчеркнуть, что здесь второе суммирование, в отличие от формулы (5), ведется не только по минорам, размещенным в некоторых *s* строках, но и по каждой (из $\binom{s}{n}$) совокупности *s* строк.

Формула (7) выражает теорему Сигорского об определителе суммы матриц, которая представляет собой аналитическое решение задачи разложения определителя матрицы *C* по ее частям *A* и *B*. Этот результат или его наброски, по-видимому, были впервые опубликованы в [5]. Простое доказательство теоремы представлено в [1]. Приведенный здесь вывод отличается детализацией выражения (4). Сложность символьного решения обусловлена тем, что определитель матрицы со сложными элементами в виде суммы двух элементов сводится к разложению 2^n определителей. Например, для матрицы второго порядка требуется раскрытие четырех определителей этого же порядка, для матрицы третьего порядка – восьми определителей (3) и т.д.

Теорема Сигорского (6), опираясь на свойство линейности определителя и результаты Лапласа, не только сводит вычисление определителя *n*-го порядка к вычислению определителей меньших порядков. В качестве определителей меньших порядков предусматривается использование определителей не одной, а двух матриц, являющихся частями исходной матрицы, что является классическим решением задачи матричной диакоптики.

В.П.Сигорский, осознавая вычислительную трудоемкость формул (4) и (6), предупреждал [1, с. 211], что «полученные разложения из-за своей сложности не пригодны для практических вычислений определителей, но они могут быть полезны при доказательстве различных соотношений». Время поправило это излишне скромное утверждение, поскольку теорема Сигорского в виде выражения (7) не только легла в основу многих результатов теории электрических цепей, но и оказалась эффективной для практических расчетов определителей в целом ряде случаев.

Результат (7) получил широкое применение для формирования полиномиальных схемных функций в символьном, численном и символьно-численном виде, использования их как в задачах анализа, так и синтеза [6–8]. Однако гораздо менее известно использование теоремы Сигорского в символьном анализе сложных электрических цепей по частям [9–13], чему здесь будет уделено основное внимание.

Первым существенным применением выражения (7) было его использование в теоретическом подтверждении достоверности диакоптического метода *d*-деревьев [9,10]. Спустя двадцать лет этот проверенный временем результат лег в обоснование диакоптического метода схемных миноров (метода двоичных векторов) [11–13]. При этом было установлено, что разработанный ранее за рубежом метод мультисоединений для анализа по частям графа Коутса [14] и метод нуллорной декомпозиции [15,16] также доказываются и обобщаются с помощью теоремы (7) [12].

Удивительную пригодность выражения (7) для машинной (компьютерной) реализации заметили и использовали многие специалисты [17,18]. Выше уже было предложено исследовать разложение (4) с помощью двоичных векторов (ДВ). Этого недостаточно – все возможные миноры матрицы являются ее инвариантом и желательно дать им двоичное отображение.

2. Формула бисекции матрицы на основе двоичных векторов

Десять лет назад для повышения эффективности реализации формулы (7) были введены ДВ другого типа, которые имеют размерность $2n$ (n – порядок матрицы). Первая половина разрядов ДВ соответствует порядковой нумерации строк матрицы, а вторая – ее столбцов. ДВ являются подмножеством двоичных чисел, первая и вторая половина разрядов которых, содержат одинаковое количество единиц (или нулей).

ДВ представляет собой код, указывающий, какие строки и столбцы (соответственно первая и вторая половина разрядов ДВ) подлежат вычеркиванию для образования минора. По определению минора вычеркивается одинаковое количество строк и столбцов. Множество ДВ и их миноров однозначно задает матрицу соответствующего порядка, то есть является ее двоичным инвариантом, достаточным для учета этой матрицы при решении задач в составе любой другой матрицы или матриц без необходимости непосредственного сложения.

Формирование множества ДВ матрицы не встречает затруднений. Самое простое решение состоит в том, чтобы перебирать $2n$-разрядные двоичные числа (от $2n$ нулей до $2n$ единиц) и выбирать те из них, которые содержат одинаковое количество единиц в первой и второй половинах разрядов. Это свойство, вытекающее из определений минора и ДВ, позволяет получить число ДВ матрицы в виде

$$I = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{n}^2 . \tag{8}$$

В табл. 1 сведены расчеты по формуле (8) для матриц различных порядков.

В силу одинаковой четности номеров строк и столбцов взаимно дополнительных миноров [1] информацию о знаке слагаемого можно получить из расположения единиц в одном из векторов пары. Принимается во внимание порядковый номер единицы в той или иной половине ДВ. Положительный (отрицательный) знак выбирается в случае четной (нечетной) суммы порядковых номеров позиций, содержащих единицы.

Имея множество ДВ первой матрицы, можно легко получить ДВ второй матрицы, применив операцию дополнения двоичного числа. Это значит, что единицы в позициях ДВ заменяются нулями и наоборот. Следовательно, общая формула (7) может быть представлена в виде

$$\Delta = \sum (-1)^{\sigma i} \Delta_A(d_i)\Delta_B(\overline{d_i}), \tag{9}$$

где σ_i – знак i-го слагаемого, определяемый по ДВ d_i , $\Delta_A(d_i)$ – минор, соответствующий d_i , матрицы A; $\Delta_B(\overline{d_i})$ – минор, соответствующий дополнению ДВ $\overline{d_i}$, матрицы B.

Формула (9), сохраняя основное свойство формулы (7) – раздельное использование миноров матриц A и B, является более наглядной, что позволяет легко учесть структуру матрицы подлежащей бисекции, исключив из рассмотрения слагаемых, у которых один или оба сомножителя равны нулю. Замечательно, что количество слагаемых формулы (9) известно заранее и рассчитывается по формуле (8).

Таблица 1. Количество двоичных векторов матрицы

Порядок матрицы	2	3	4	5	6	7	8	9
Число двоичных векторов	6	20	70	252	924	3432	12870	48620

В отличие от формулы (7) определитель суммы двух матриц по формуле (9) находится как декартово произведение их двоичных инвариантов. Миноры различных инвариантов оказываются совместными, если их ДВ взаимно дополняют друг друга. Это вытекает из классического разложения определителя матрицы, изначально предложенного Г.В.Лейбницем: определитель образован суммой произведений элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки или столбца.

Например, определитель матрицы *C* второго порядка

$$\Delta = \left|c^1, c^2\right| = \left|a^1 + b^1, a^2 + b^2\right| \qquad (10)$$

получается как декартово произведение инвариантов матриц *A* и *B*, содержащих по шесть ДВ вида: 0000, 0101, 0110, 1001, 1010, 1111. Из 36 пар сомножителей только 6 пар оказываются совместными: 0000–1111, 0101–1010, 0110–1001, 1001–0110, 1010–0101, 1111–0000. Отсюда получаем искомые восемь слагаемых, поскольку разложения *detA* или *detB* содержат по два слагаемых

$$\begin{aligned} det(A+B) &= detA + a_{11}b_{22} + a_{12}b_{21} + \\ &+ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{11} + detB. \end{aligned} \qquad (11)$$

Чтобы найти определитель при *n*=3 (1) и получить завершенное решение (3) потребуется умножить (табл.1) двадцать ДВ матрицы *A* на двадцать ДВ матрицы *B.* Важно, что выполнять такую трудоемкую операцию не нужно – достаточно сопоставить каждому из ДВ матрицы *A* его дополнение из ДВ матрицы *B*. В результате получим 20 пар совместных ДВ:

1) 000000–111111, 2) 001001–110110,
3) 001010–110101, 4) 001100–110011,
5) 010001–101110, 6) 010010–101101,
7) 010100–101011, 8) 100001–011110
9) 100010–011101,10) 100100–011011,
11) 011011–100100, 12) 011101–100010,
13) 011110–100001, 14) 101011–010100,
15) 101101–010010, 16) 101110–010001,
17) 110011–001100, 18) 110101–001010,
19) 110110–001001, 20) 111111–000000.

Первый и последний ДВ соответствуют *detA* и *detB*, в которых будет по 6 слагаемых. Каждое из оставшихся 18 произведений миноров с двумя и четырьмя единицами даст по два слагаемых, поскольку ДВ с четырьмя единицами соответствуют одному элементу той или иной матрицы. Всего будет 6·2+18·2=48 слагаемых, что согласуется с выражением (3): 6·8=48.

На этом простейшем примере видна трудоемкость символьного решения для определителя матрицы, представляющей сумму двух матриц. Однако матрицы соответствующие системам уравнений реальных цепей и сетей обладают высокой разреженностью. Типичным является случай, когда матрица С является квазидиагональной, как показано на рис. 1, а подматрица, лежащая на пересечении ее блоков, имеет небольшой порядок (n=2,3,4,5).

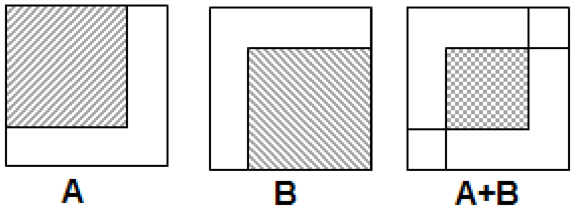


Рис. 1. Бисекция матрицы

В этом практически важном случае теорема Сигорского в форме (9) представляет весьма эффективный метод раскрытия определителей блочно-диагональных матриц высокого порядка и символьного анализа электрических цепей, имеющих, как правило, каскадную структуру. Вычислительное преимущество формулы (9) по сравнению с формулой (7) заключается в том, что формула (9) позволяет учитывать разреженность матриц А и В, что проявляется в исключении из рассмотрения нулевых миноров. При этом ненулевых миноров будет значительно меньше предельного числа ДВ, рассчитываемого по формуле (8), и окажется проще не подбирать двоичное дополнение (которого может не быть), а выполнять декартово перемножение инвариантов.

Вторым важным преимуществом формулы (9) является удобство ее обобщения для топологического анализа электрических цепей, при котором несущественна нумерация узлов схемы, а величина определителя несет информацию об устойчивости. Специалистам, незнакомым с формулой (7), приходится ценой трудоемких выкладок получать ее частные реализации, подобные (3). Это препятствует выводу диакоптических формул бисекции схемы по четырем и пяти узлам [15,16]. Вместе с тем в задачах формирования символьных схемных функций сложных интегральных схем необходим общий алгоритм построения диакоптических формул для произвольного числа узлов бисекции. Избежать рутинных выкладок и получить общее решение позволяет теорема Сигорского в форме двоичных векторов.

3. Минор схемы (подсхемы)

Пусть матрица на рис. 1 соответствует схеме, подлежащей бисекции. Заштрихованные части матриц *A* и *B*, отображающие подсхемы, содержат параметры элементов этих подсхем. Заштрихованная дважды часть матрицы $A+B$, отображающей объединенную схему, находится на пересечении строк и столбцов, соответствующих общим узлам подсхем.

Базисный узел схемы без потери общности считается принадлежащим обеим подсхемам. Сопоставление формул (7), (9) и рис. 1 показывает, что при нахождении определителя матрицы схемы достаточно учитывать миноры, соответствующие общим узлам подсхем, поскольку остальные миноры равны нулю. Это обусловлено наличием строк и столбцов в матрицах $A+B$, которые состоят из элементов, равных нулю (незаштрихованные части этих матриц на рис. 1).

Операция удаления строки и столбца в матрице эквивалентна операции подсоединения норатора и нуллатора к соответствующим узлам схемы. Это позволяет выполнить бисекцию на схемном уровне и свести раскрытие миноров определителей матриц к разложению определителей нораторно-нуллаторных схем.

Нуллор – аномальный схемный элемент, эквивалентный идеальному операционному усилителю, с управляющей ветвью – нуллатором и управляемой ветвью – норатором. Нуллорное представление Теллегена [19], обобщенное Брауном [20] и автором [21,22], оказалось чрезвычайно удобным, обеспечивая взаимосвязь между операциями над матрицами и преобразованиями схемы. Ориентированный взвешенный нуллор, получивший название неудаляемого управляемого источника [22], позволил применить для исследования нуллорных схем топологические методы и исследовать устойчивость по знаку схемного определителя [12].

Удаление строк и столбцов матрицы соответствует обычному нуллорному представлению, при котором утрачена информация о парах нораторов и нуллаторов в нуллорах, то есть любые два норатора и любые два нуллатора могут чередоваться, таким образом, при использовании обычного нуллора утрачивается информация о знаке определителя, хотя это не мешает применить матричный метод, для которого существенна нумерация узлов схемы [15,16].

При использовании нуллоров для анализа схем по частям в понятие ДВ подсхемы вкладывается новое содержание. Единицы в первой (второй) половине элементов ДВ соответствуют конечным узлам подключения нораторов (нуллаторов). Базисный узел, который не отражается в ДВ, является начальным узлом всех без исключения нораторов и нуллаторов.

Для схемной интерпретации диакоптических формул по аналогии с минором определителя матрицы подсхемы можно ввести понятие «минор определителя подсхемы» или просто «минор подсхемы». Использование термина «минор подсхемы» более предпочтительно, поскольку этот термин отражает связь топологического метода с матричным методом в отличие от более общего понятия «параметр подсхемы».

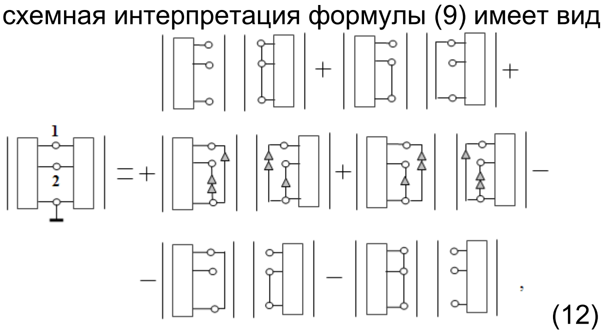
Для обозначения миноров схемы или подсхемы может применяться символика, принятая для обозначения миноров матрицы [1]. Нетрудно перейти от обозначений миноров подсхемы с десятичными индексами к ДВ и обратно. Важно, что множество ДВ является унифицированным отображением миноров подсхем с одним и тем же числом узлов. С учетом изложенного выше минор подсхемы, заданный некоторым ДВ, равен определителю схемы, которая получена из этой подсхемы в результате подсоединения нуллоров согласно ее ДВ.

Определитель матрицы узловых проводимостей схемы получается через миноры матриц подсхем (левая подсхема описывается матрицей проводимости A, а правая – матрицей проводимости B). Соединение идеальным проводником базисного узла с некоторым другим узлом, например узлом 1, влечет удаление в матрице 1-й строки и 1-го столбца. Подключение к некоторому узлу, например узлу 2, норатора (нуллатора) приводит к удалению 2-й строки (2-го столбца).

Нуллоры должны быть пронумерованы в соответствии с их очередностью в ДВ, а именно, i-я по порядку единица в первой (второй) половине ДВ соответствует норатору i (нуллатору i) i-го нуллора. Все шесть миноров подсхемы с тремя внешними узлами (n=2, l=6) использованы в формуле для бисекции схемы по трем узлам.

Миноры схемы (схемные миноры), как и миноры матрицы, удобно задавать ДВ размерности $2n$, где n – число общих узлов подсхем, не считая базисного узла. Первая (вторая) половина ДВ, содержащая n элементов, соответствует строкам (столбцам) матрицы подсхемы A или B в заштрихованной дважды части матрицы схемы $A+B$ (см. рис. 1). Причем удаление строки или столбца отмечается в ДВ единицей. Если данные строка или столбец сохраняются в матрице подсхемы, то это отображается в соответствующей позиции ДВ нулем. Положение или позиции элементов в каждой из половин ДВ задается упорядоченным множеством внешних узлов подсхемы, исключая базисный узел. Обозначениями позиций ДВ схемы служат обозначения ее узлов.

В случае деления схемы по трем узлам схемная интерпретация формулы (9) имеет вид



(12)

где одинарной стрелкой обозначается ориентированный норатор, а сдвоенной – ориентированный нуллатор. Идеальные проводники эквивалентны параллельному соединению однонаправленных норатора и нуллатора.

Двоичное отображение слагаемых формулы (12) совпадает с отображением, использованным в формуле (11), соответствующим бисекции матрицы второго порядка (10). Таким образом, слагаемые этой формулы представлены шестью парами ДВ. Векторы каждой пары взаимно дополняют друг друга (как минор и соответствующий минор), отображая сомножители диакоптической формулы. Упорядоченное множество общих (или внешних) узлов подсхем, являющееся обозначением позиций ДВ, имеет вид: 1212.

Все миноры подсхемы образуют ее инвариант, позволяющий включить эту подсхему как составную часть – «кирпичик» в любую другую подсхему или схему. При этом неважно, как выражены миноры – символьными выражениями или числами. То или иное задание обусловлено желаемым видом анализа: численным, символьным или численно-символьным.

4.Топологическое правило нахождения знака

Для нахождения знака слагаемых формулы (12) и ее обобщений может быть использовано, как в формулах (7) и (9), алгебраическое правило, предусматривающее порядковую нумерацию общих узлов подсхем. Однако схема в отличие от матрицы является топологическим объектом, в котором номера или буквенные обозначения узлов должны служить лишь для указания соединений элементов. Топологическое правило нахождения знака не требует сложения номеров узлов и их перенумерации.

В первую очередь следует объяснить, почему слагаемые формулы (7) при n>1 имеют как положительные, так и отрицательные знаки. Дело в том, что результатом удаления строк и столбцов в матрицах A и B, а также последующего сложения этих матриц (рис. 1), может быть матрица A+B, не являющаяся квазидиагональной матрицей. Для того чтобы представить определитель матрицы A+B в виде произведения двух сомножителей, каждый из которых содержит элементы только одной из матриц, необходимо выполнить перестановку некоторых строк и столбцов.

Нетрудно убедиться, что число перестановок строк и столбцов, требуемое для такого преобразования матрицы C после удаления i-й строки и j-го столбца в матрице A или B, находится по формулам соответственно $p'=n-i$ и $p''=n-j$. Отсюда следует, что сумма $i+j$ оказывает на знак соответствующего слагаемого формулы (5) такое же влияние как сумма $p'+p''$, поскольку число $2n$ всегда четное. Преобразования матрицы A (согласно ДВ) или B (согласно дополнению ДВ) требуют суммирования $p'+p''$ для каждой пары номеров строк и столбцов. В силу одинаковой четности номеров строк и столбцов взаимно дополнительных миноров [1] количества перестановок в одной из матриц A или B достаточно для приведения матрицы A+B к квазидиагональному виду. Это доказывает алгебраическое правило нахождения знака, которое используется в формуле (5). Очевидно, именно так рассуждали авторы, претендующие на результат (5), лежащий в основе «теоремы Лапласа».

С другой стороны, знак слагаемого при классическом разложении определителя матрицы обусловлен четностью числа инверсий в подстановке, образованной номерами строк и столбцов, на пересечении которых находятся выбранные элементы [1]. Следует подчеркнуть, что четность числа инверсий соответствует четности числа перестановок строк и столбцов, необходимого для приведения матрицы этого слагаемого, которая содержит только выбранные элементы, к диагональной форме.

Таким образом, вместо установления четности числа перестановок строк и столбцов в матрице A+B, полученной путем удаления строк и столбцов в матрицах A и B, достаточно установить четность числа инверсий в подстановке, первая (вторая) строка которой образована номерами удаленных строк (столбцов). Условимся считать, что формирование подстановки начинается с номеров строк и столбцов, соответствующих матрице B второй подсхемы. Доказанное топологическое правило нахождения знака не требует использования алгебраических операций, поскольку знак подстановки не зависит от порядка следования ее элементов – существенно только их взаимное положение.

Эти рассуждения обобщают известное правило нахождения знака слагаемых определителя матрицы по ее графу [ ]. В этом случае рассматриваются не две матрицы, а одна, например *А*. «Прием диагонализации» позволяет обнаружить связь теоремы Сигорского с классическим результатом Лейбница, положившим начало теории определителей и уже упоминавшимся в пояснениях к формуле (9). Знак слагаемого определителя матрицы можно связать с четностью-нечетностью числа перестановок строк и столбцов, необходимых для расположения выбранных элементов в виде главной диагонали. Например, если выбраны элементы a_{21} и a_{12}, расположенные на побочной диагонали матрицы второго порядка, то требуется одна перестановка строк или столбцов, чтобы поместить эти элементы на главную диагональ, то есть слагаемое $a_{21}a_{12}$ имеет отрицательный знак.

5. Топологическая формула бисекции

Схемно-алгебраическая диакоптическая формула (12) содержит шесть слагаемых, сомножителями в них являются определители матриц проводимостей, которые образованы из матриц проводимостей подсхем путем удаления строк и столбцов, относящихся к общим узлам этих подсхем. Использование матричного метода обусловливает (за счет повторного учета одинаковых параметров в различных ячейках матрицы) появление в выражении определителя взаимно уничтожающихся слагаемых – дубликаций, что, в частности, затрудняет формирование упрощенных выражений ССФ [23].

В отличие от формул (7) и (9) все сомножители в формуле (12) являются определителями схем, а не матриц. Подобно определителям миноры схемы и матрицы эквивалентны. Однако выражения определителя и миноров матрицы схемы, представленные в развернутом виде, избыточны [13]. Применение схемно-топологического метода выделения параметров [22] позволяет не только избежать построения матриц, но и исключить появление взаимно уничтожающихся слагаемых в выражениях определителя и миноров подсхемы, являющихся сомножителями диакоптических формул. В обобщениях формулы (12) также возможно образование дубликаций только на уровне слагаемых, но не внутри сомножителей.

Нахождение числа инверсий σ_i в подстановке и вычисление знака *i*-го слагаемого как $(-1)^{\sigma i}$ было предложено [12] заменить разложением определителя нуллорной схемы, которая образована в результате объединения нораторов и нуллаторов, соответствующих ДВ сомножителей этого слагаемого. Для образования нуллорной схемы нумерация нуллоров, соответствующих первой подсхеме, должна продолжать нумерацию нуллоров второй подсхемы так, что норатор *i* и нуллатор *i* нуллора с номером *i* занимают *i*-ю пару из незаполненных очередных позиций в подстановке, образованной нораторами и нуллаторами. Такое требование вытекает из определения минора подсхемы, для получения которого используется порядковая нумерация подсоединяемых нуллоров.

Имеет место изоморфное соответствие между номерами строк (столбцов) и узлами подсоединения нораторов (нуллаторов) в нуллорной схеме. Как следствие, число инверсий в подстановке, образованной из номеров узлов, равно числу инверсий в подстановке из номеров нораторов и нуллаторов. Это доказывает топологическое правило, согласно которому определитель нуллорной схемы, равный 1 или –1 в зависимости от четности или нечетности числа инверсий в подстановке, будет соответствовать положительному или отрицательному слагаемому в формуле (9).

Используя понятие минора подсхемы, схемный определитель можно найти по топологической формуле, обобщающей формулу (12)

$$\Delta = \sum \delta_i \Delta 1(d_i)\Delta 2(\overline{d_i}) \qquad (13)$$

где δ_i – определитель нуллорной схемы, которая образована в результате объединения нуллоров, соответствующих ДВ d_i и его дополнению $\overline{d_i}$; $\Delta 1(d_i)$ – минор первой подсхемы, соответствующий d_i; $\Delta 2(\overline{d_i})$ – минор второй подсхемы, соответствующий $\overline{d_i}$.

Например, нуллорная схема, соответствующая первому отрицательному слагаемому в выражении (12) имеет вид двух подключенных к одному узлу и параллельных соединений разноименных норатора и нуллатора. Чтобы нуллорная схема преобразовалась в узел, требуется одна взаимная замена номеров у нораторов (или у нуллаторов), то есть определитель нуллорной схемы и знак соответствующего слагаемого в формуле (12) равны –1.

На основе отображения произвольной квадратной матрицы *y*-схемой с источниками тока, управляемыми напряжением [25–27] в [28] было установлено, что «схемные миноры», используемые в диакоптических выражениях (12) и (13), соответствуют не минорам, а алгебраическим дополнениям матрицы. Корректность метода двоичных векторов (схемных миноров) при замене миноров на алгебраические дополнения не нарушается, поскольку сомножители (перемножаемые алгебраические дополнения) имеют одинаковый знак и не влияют на знак соответствующего слагаемого в формуле бисекции.

Метод двоичных векторов (схемных миноров или схемно-алгебраических дополнений) реализован автором в программе cirsymw, которая используется в качестве символьного блока системы анализа, диагностики и структурного синтеза SCADS, обеспечивает символьное моделирование линейных схем в десятки–сотни узлов и элементов, включающих все типы управляемых источников. Отображение матриц произвольной физической природы *y*-схемами позволят использовать программу cirsymw для символьного решения различных задач матричной алгебры.

Выводы

1. Теорема Сигорского (7) является не только эффективным инструментом символьно-численного моделирования электронных схем, описываемых матрицами, но и математической основой для многих важных результатов в теории электрических цепей, в том числе доказательства методов схемно-алгебраической диакоптики, не требующей использования матричного аппарата.

2. Теорема (7) об определителе суммы матриц гармонично дополняет теорему Бине-Коши об определителе произведения матриц. Теорема Сигорского формирует системное мышление, удобна для численно-аналитического решения сложных задач матричной алгебры по частям. Представляется оправданным включение теоремы (7) в учебные курсы по линейной алгебре.

Литература

1. *Сигорский В.П.* Математический аппарат инженера.– Киев: Техника, 1977.– 768 с.
2. *Сигорский В.П.* Методы анализа электрических схем с многополюсными элементами.– Киев: Изд-во АН УССР, 1958.– 402с.
3. *Зелях Э.В.* Основы общей теории линейных электрических схем. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 336 с.
4. *Математический* энциклопедический словарь/ Под ред. Ю.В.Прохорова.– М.: Советская энциклопедия, 1988.– 847 с.
5. *Сигорский В.П.* О методике нахождения определителя системы узловых уравнений // Научные записки Львовского политехнического ин-та: Серия радиотехническая.– 1955.– Вып. 27.– № 1.
6. *Сигорский В.П.,* Калниболотский Ю.М. Алгоритмы анализа электронных схем // Изв. вузов. Радиоэлектроника.– 1968.– Т. 11, № 11.– С. 1125–1145.
7. *Сигорский В.П.* Об одном способе вычисления полиномиальных коэффициентов функций электронной схемы // Теорет. электротехника.– Львов, 1969.– Вып. 6.– С. 41–52.
8. *Бандман О.Л.* Синтез электронных RC-схем. – М.: Наука, 1966.– 247 с.
9. *Дмитришин Р.В.,* Шаповалов Ю.И. Диакоптический алгоритм анализа сложных линейных цепей на ЭВМ // Автоматизация проектирования в электронике.– Киев, 1975.– Вып. 12.– С. 42–46.
10. *Шаповалов Ю.И.* Машинный топологический расчет схемных функций электронных схем методом подсхем: Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.12 (Системы автоматизированного проектирования и автоматизация технологической подготовки производства в электронной и радиотехнической промышленности) / Львов. политехн. ин-т.– Львов, 1978.– 164 с.
11. *Филаретов В.В.* Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество. – 2001. – № 8. – С. 33–42.
12. *Филаретов В.В.* Топологический анализ электрических цепей на основе схемного подхода: Дис. … докт. техн. наук 05.09.05 (Теоретическая электротехника) / Ульяновский гос. техн. ун-т, Санкт-Петербургский гос. техн. ун-т. – Ульяновск–Санкт–Петербург, 2002. – 265 с.
13. *Волгин Л.И*, Королев Ф. А., Филаретов В. В. Схемно-алгебраический анализ и топологические преобразования моделей электронных цепей.– Ульяновск: УлГТУ, 2007.– 354 с.
14. *Starzyk J.A.,* Konczykowska A. Flowgraph analysis of large electronic networks // IEEE Transactions on circuits and systems. – 1986. – Vol. CAS-33, N 3. – P. 302–315.
15. *Chang S.M.*, MacKay J.F., Wierzba G.M. Matrix reduction and numerical approximation during computation techniques for symbolic analog circuit analysis // IEEE Proceedings of the international symposium on circuits and systems (ISCAS).– 1992.– P. 1153–1156.
16. *Chang S.M.,* Wierzba G.M. Circuit level decomposition of networks with nullors for symbolic analysis // IEEE Transactions on circuits and systems.– 1994.– Vol. CAS–41.– P. 699–711.
17. *Табарный В.Г.*, Литвиненко А.А. Программа вычисления коэффициентов полиномов функции электронной схемы // Изв. вузов. Радиоэлектроника.– 1969.– Т. 12, № 8.– С. 787–794.
18. *Слипченко В.Г.,* Табарный В.Г. Машинные алгоритмы и программы моделирования электронных схем.– Киев: Техника,1976.–160 с.

19. *Tellegen B. D. H.* La recherche pour una sȇrie complȇte d'ȇlȇments de circuit ideaux nonlinȇaires (23 aprile 1954) // Rendiconti del seminario matematico e fisico di Milano: Sotto gli auspice dell'universitȃ e del politecnico. – Milano, 1955.–Vol. 25 (1953–1954). – P. 134–144.
20. *Braun J*. Topological analysis of networks containing nullators and norators // Electronics letters. – 1966. – Vol. 2, no. 11. – P. 427–428.
21. *Филаретов В.В*. Схемный подход к символьному анализу активных электрических цепей // Электроника и связь: Науч.-техн. сб. – Киев, 1997. – Вып. 2. – Ч. 1. – С. 97–101.
22. *Филаретов В.В.* Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество. – 1998. – № 5.– С. 43–52.
23. *Fernandez F.V*., Wambacq P., Gielen G., Rodriguez-Vazquez A., Sansen W. Symbolic analysis of large analog integrated circuits by approximation during expression generation // IEEE Proceedings of the international symposium on circuits and systems (ISCAS).– 1994.– P. 25–28.
24. *Трохименко Я.К.* Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. – М.: Советское радио, 1972. – 212 с.
25. *Филаретов В.В*. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф. КЛИН–2001. – Ульяновск: УлГТУ, 2001. – Т. 3. – С. 13–15.
26. *Филаретов В.В.* О взаимосвязи схемного и матричного определителей // Системы искусственного интеллекта: алгоритмы обработки и модели: Тр. международ. конф. КЛИН–2002. – Ульяновск: УлГТУ, 2002. – Т. 4. – С. 85–93.
27. *Павлова Е.А.,* Филаретов В.В. Схемно-топологическое разложение матричных определителей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2004.– Ульяновск: УлГТУ, 2004. – Т. 4. – С. 114–119.
28. *Павлова Е.А.,* Серов В.Ф., Филаретов В.В. Выражение K-деревьев через схемные определители и построение безизбыточных формул бисекции электрических цепей // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск: УлГТУ, 2005.– Т.3.– С. 155–173.