

Акустические приборы и системы

УДК 681.586

И.О. Моргун, канд. техн. наук

Математическое моделирование работы цилиндрического пьезокерамического трансформатора

Выполнено математическое моделирование задачи об установившихся электроупругих колебаниях цилиндрического пьезоэлектрического трансформатора с секцией генераторных электродов. Задача поставлена и решена с привлечением линейной теории тонких электроупругих оболочек при смешанных электрических граничных условиях: электрического напряжения на одной из ее частей и тока смещения – на другой. Приведены выражения, позволяющие вычислять все основные электромеханические характеристики динамического процесса – перемещений, электрической напряженности пьезокерамики, электрических напряжений на генераторных электродах.

Mathematical modeling of a problem about the steady electro elastic oscillations of the cylindrical piezoelectric transformer with generative electrodes section is carried out. The problem is set and solved with attraction of the linear theory of thin electro elastic shells under the mixed electric boundary conditions: electric voltage on one of its parts and a bias current – on another. The expressions, allowing calculating all basic electromechanical characteristics of dynamic process, namely displacements, piezoelectric strength, electric voltages on generative electrodes, are presented.

Введение

Пьезоэлектрическими трансформаторами в технической литературе принято называть преобразователи с несколькими (больше трех) электрически не связанными электродами. У такого преобразователя часть электродов подключена к источнику электрического напряжения. Такую часть преобразователя называют возбудителем. Другая часть электродов преобразователя, которую называют генератором, подключена к электрической нагрузке [1]. Пьезотрансформаторы в своем большинстве являются трансформаторами напряжения, также созданы пьезоэлектрические трансформаторы тока [2]. Пьезоэлектрические трансформаторы напряжения в основном выполняют в виде од-

нослойных или многослойных стержней, прямоугольных пластин, дисков, колец. Основные типы пьезоэлектрических трансформаторов, отличающихся по внешнему виду, расположению и размерам электродов возбудителя и генератора, различным схемам их коммутации, приведены в работах [1-3].

Анализ существующих научных публикаций по этой тематике показывает, что математические модели разработаны в основном для пьезотрансформаторов в виде стержня, пластины прямоугольной либо круглой формы [4-6]. Что касается преобразователей, выполненных в виде пьезокерамических оболочек с секционированными электродами [7], то для таких объектов математические модели отсутствуют.

Целью настоящей работы является разработка математической модели, позволяющей рассчитывать электроупругие колебания цилиндрической пьезокерамической оболочки содержащей секцию генераторных электродов.

Математическая постановка задачи

Исходные уравнения включают в себя:

1) уравнения движения пьезокерамической цилиндрической радиально поляризованной оболочки (плоский случай) [8]

$$\begin{aligned} & \left[1 + \frac{h^2}{12R^2} \left(1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - \\ & - \frac{h^2}{12R^2} \left(1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \frac{e_{13} R}{C_{11}^E} \frac{\partial E_r^{(0)}}{\partial \theta} = \frac{R^2 \gamma}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ & - \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{h^2}{12R^2} \left(1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} - w - \\ & - \frac{h^2}{12R^2} \left(1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{e_{13} R}{C_{11}^E} E_r^{(0)} = \frac{R^2 \gamma}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1)$$

2) выражение индукции D_r для цилиндрической оболочки, записанное с использованием соотношений Коши [4]

$$D_r = e_{13} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) + \epsilon_{33}^S E_r^{(0)}, \quad (2)$$

где h – толщина оболочки; R – радиус средней поверхности оболочки; e_{13} , C_{11}^E , ϵ_{33}^S , γ – пьезомодуль, модуль упругости, диэлектриче-

ская проницаемость и плотность пьезокерамики, соответственно; w , u – нормальная и тангенциальная составляющие перемещений срединной поверхности оболочки; θ – угловая координата; $E_r^{(0)}$, D_r – радиальные компоненты напряженности срединной поверхности оболочки и индукции электрического поля (в последующем индексы « r » и « (0) » опускаем); t – время. Запишем исходные уравнения (1), (2) в безразмерном виде, разделив w , u , R , h на R ; t на $\frac{R}{c_k}$; E на $\frac{1}{d_{33}}$; D на e_{13} , тогда будем иметь:

$$(1+\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - \delta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - v \frac{\partial E}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} - \delta \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} + w + \delta \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - v E = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$D = \frac{\partial U}{\partial \theta} + w + \frac{1}{\varepsilon} E, \quad (4)$$

где c_k – скорость звука в пьезокерамике; d_{33} – ее пьезомодуль.

Постоянные коэффициенты, входящие в уравнения (3) и (4), определяются по формулам

$$\delta = \frac{h^2}{12R^2} \left(1 + \frac{e_{13}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S} \right); v = \frac{e_{13}}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S}; \varepsilon = \frac{e_{13} d_{33}}{\varepsilon_{33}^S}.$$

На наружную и внутреннюю поверхности оболочки нанесены металлизированные электроды. Внутренний электрод сплошной и заземлен, а наружный – разделен в осевом направлении разрезами на две электрически не связанные части. Шириной разрезов и толщиной электродированных покрытий в дальнейшем будем пренебрегать.

На секцию электродов возбuditеля, занимающих область $[-\theta_0; \theta_0]$, $(\pm\theta_0$ – угловые координаты разрезов электрода), подводится заданное электрическое напряжение $Q(t)$ (рис.1).

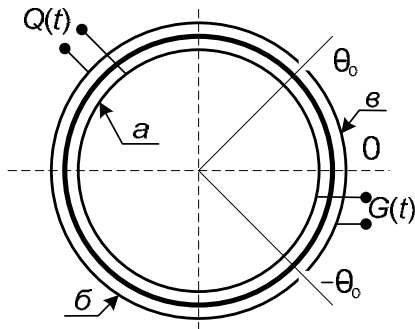


Рис.1. Расположение электродов на цилиндрическом пьезоэлектрическом трансформаторе (вид сверху): a – внутренний электрод заземления; b – возбуждающий электрод; v – генераторный электрод

Подводимый электрический сигнал возбуждает в этой части преобразователя электрическое поле с напряженностью на срединной поверхности [4]

$$E(t) = -\frac{Q(t)}{h}. \quad (5)$$

В свою очередь будем считать, что незадействованный электрод $(\theta_0; -\theta_0)$ подключен к электронному устройству с бесконечно большим (несколько десятков мегом) входным сопротивлением (режим “холостого хода”). Тогда для этой области преобразователя, когда $|\theta| < \theta_0$, выполняется условие по электрическому полю для разомкнутых электродов, обеспечивающее равенство нулю тока смещения через эти поверхности цилиндрической оболочки,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_S D dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \int_0^L D d\theta dz = 0, \quad (6)$$

где S – поверхность оболочки; L – безразмерная высота цилиндрической оболочки отнесенная к R .

Следует отметить, что выражения (6) являются электрическими граничными условиями на генераторном электроде, а задаваемое напряжение Q – электрическим граничным условием на электроде возбuditеля [4].

Решение задачи

Будем рассматривать динамический процесс установившийся во времени, т.е. зависимость от времени интересующих физических величин задается в виде $e^{i\omega t}$.

Представим неизвестные перемещения w , u и электрическую напряженность E в виде рядов, разложив их по собственным формам колебаний оболочки (ряды Фурье):

$$w(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos n\theta e^{i\omega t};$$

$$u(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \sin n\theta e^{i\omega t};$$

$$E(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \cos n\theta e^{i\omega t}, \quad (7)$$

где w_n , u_n , E_n – неизвестные коэффициенты разложений, подлежащие отысканию.

Подставив выбранные разложения (7), с заменой в них индекса суммирования n на m , в электрические граничные условия (6), получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2u_m \sin m\theta_0 + \sum_{m=0}^{\infty} 2 \frac{w_m}{m} \sin m\theta_0 + \frac{2\theta_0}{\varepsilon} E = 0. \quad (8)$$

Запишем второе слагаемое выражения (8) в виде

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2 \frac{w_m}{m} \sin m\theta_0 = 2w_0\theta_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_m}{m} \sin m\theta_0.$$

Тогда выражение (8) примет вид

$$2 \sum_{m=1}^{\infty} u_m \sin m\theta_0 + 2w_0\theta_0 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{w_m}{m} \sin m\theta_0 + \frac{2\theta_0}{\varepsilon} E = 0.$$

Разрешим это выражение относительно E :

$$E = -\varepsilon \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} (w_m + mu_m) \right]. \quad (9)$$

Электрическую напряженность (9) для этой части преобразователя (генератора) можно записать в виде

$$E = -\varepsilon \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} (w_m + mu_m) \right] H(\theta_0 - |\theta|), \quad (10)$$

где $H(\theta_0 - |\theta|)$ – функция Хевисайда, которая принимает значение единицы для области, где электроды разомкнуты ($-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$), и нулевые значения для оставшейся части оболочки.

Электрическую напряженность поля для той части преобразователя (возбудителя), к которой подводится электрическое напряжение $Q(t)$, с привлечением функции Хевисайда, представим в виде

$$E(t) = -\frac{Q(t)}{h} H(|\theta| - \theta_0). \quad (11)$$

Тогда напряженность электрического поля в произвольной точке срединной поверхности преобразователя с учетом выражений (4), (5), (10), (11) можно записать следующим образом:

$$E = -\varepsilon \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} (w_m + mu_m) \right] \times H(\theta_0 - |\theta|) - \frac{Q(t)}{h} H(|\theta| - \theta_0). \quad (12)$$

Раскладывая выражение (12) по четным функциям в ряд Фурье с учетом разложения (7), получим:

$$E_n = -\varepsilon \eta_n \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} (w_m + mu_m) \right] - \xi_n \frac{Q}{h}, \quad (13)$$

где постоянные коэффициенты, входящие в уравнение (13) определяются выражениями:

$$\eta_0 = \frac{\theta_0}{\pi}, \quad (n=0); \quad \eta_n = \frac{2 \sin n\theta_0}{n\pi}, \quad (n>0);$$

$$\xi_0 = 1 - \frac{\theta_0}{\pi}, \quad (n=0); \quad \xi_n = -\frac{2 \sin n\theta_0}{n\pi}, \quad (n>0);$$

Запишем выражение (13) в несколько ином виде:

$$E_n = -\eta_n \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m (w_m + mu_m) - \xi_n \frac{Q}{h}, \quad (n=0,1,2,...), \quad (14)$$

где $\lambda_0 = \varepsilon$ при $m=0$; $\lambda_m = \varepsilon \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0}$ при $m=1,2,...$

Подставляя разложение (7) в уравнения движения оболочки (3) будем иметь:

$$\begin{cases} (1+\delta)n^2u_n + nw_n + \delta n^3w_n - v_n E_n = \omega^2 u_n; \\ nu_n + \delta n^3u_n + w_n + \delta n^4w_n - v_n E_n = \omega^2 w_n. \end{cases} \quad (15)$$

Домножив второе уравнение системы (15) на n и вычтя из него первое, получим:

$$n[\delta n^2(n^2-1)-\omega^2]w_n + [\delta n^2(n^2-1)+\omega^2]u_n = 0.$$

Разрешая полученное уравнение относительно u_n , будем иметь

$$u_n = \frac{n(\omega^2 - \chi_{n3})}{\omega^2 - \chi_{n3}} w_n, \quad (16)$$

где $\chi_{n3} = \delta n^2(n^2-1)$.

Подставляя выражение (16) в первое уравнение системы (15), с учетом выражения для составляющих напряженности E_n (14) получим:

$$\frac{\omega^4 - \chi_{n2}\omega^2 + \chi_{n4}}{\omega^2 + \chi_{n3}} w_n - v_n \eta_n \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \frac{\chi_{m1}\omega^2 - \chi_{m4}}{\omega^2 + \chi_{m3}} w_m = v_n \xi_n \frac{Q}{h},$$

где $\chi_{n1} = (1+n^2)$; $\chi_{n2} = (1+\delta n^2)\chi_{n1}$;

$$\chi_{n4} = (n^2-1)\chi_{n3}.$$

$$\text{Обозначив } \Omega_n(\omega) = \frac{\omega^4 - \chi_{n2}\omega^2 + \chi_{n4}}{\omega^2 + \chi_{n3}};$$

$\Psi_m(\omega) = \frac{\chi_{m1}\omega^2 - \chi_{m4}}{\omega^2 + \chi_{m3}}$, выражение для отыскания w_n можно записать в виде:

$$\Omega_n(\omega) w_n - v_n \eta_n \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m \Psi_m(\omega) w_m = v_n \xi_n \frac{Q}{h}, \quad (17) \quad (n=0,1,2,...)$$

Далее, по вычисленным значениям w_n , u_n (для этого привлекаются выражения (16), (17)), находится амплитуда электрического напряжения $G(t)$ на разомкнутых электродах пьезотрансформатора. Для этого необходимо воспользоваться правой частью выражения (11):

$$G(t) = \varepsilon h \left[w_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta_0}{m\theta_0} (w_m + mu_m) \right].$$

Нахождением амплитуды напряжения $G(t)$ на генераторных электродах пьезоэлектрического цилиндрического трансформатора заканчивается решение поставленной задачи.

Выводы

1. Разработана математическая модель, включающая в себя постановку и решение задачи об установившихся электроупругих колебаниях цилиндрического пьезоэлектрического трансформатора с секцией генераторных электродов. При постановке задачи учтена неоднородность электрических граничных условий на его поверхности: на одной части поверхности задано электрическое напряжение, а на другой – ток смещения.

2. Для решения задачи привлекается линейная теория электроупругих оболочек, базирующаяся на гипотезах Кирхгофа-Лява, разложение искомых величин по собственным формам колебаний оболочки, разложение кусочно-непрерывных функций в ряды Фурье.

3. Получены выражения, позволяющие рассчитать прогибы и тангенциальные смещения оболочки, электрическую напряженность керамики, а также электрическое напряжение, возникающее на генераторных электродах преобразователя.

Литература

1. *Шарапов В.М.* Пьезокерамические преобразователи физических величин / В.М. Шарапов, М.П. Мусиенко, Е.В. Шарапова – Черкассы: ЧГТУ, 2005. – 631 с.
2. *Лавриненко В.В.* Пьезокерамические трансформаторы / В.В. Лавриненко – М.: «Энергия», 1975. – 112 с.
3. *Трофимов А.И.* Пьезокерамические преобразователи статических нагрузок / А.И. Трофимов – М.: Машиностроение, 1979. – 95 с.
4. *Гринченко В.Т.* Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – Киев : Наук. думка, 1989. – Т. 5: Электроупругость. – 1989. – 280 с.
5. *Шульга Н.А.* Колебания пьезоэлектрических тел / Н.А. Шульга, А.М. Болкисев – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
6. *Шульга Н.А.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин / Н.А. Шульга, В.Л. Карлаш – Киев: Наук. думка. – 2008. – 270 с.
7. *Патент* України №69885А, G01L, 1/16, G01P 15/09, опубл. 15.09.04. Бюл. №9.
8. *Дідковський В.С.* Електроакустичні п'єзокерамічні перетворювачі (розрахунок, проектування, конструювання) / В.С. Дідковський, О.Г. Лейко, В.Г. Савін – Кіровоград: «Імекс-ЛТД» . – 2006. – 448 с.