

Акустические приборы и системы

УДК 534.131.1:534.232.082.73

М.И. Болтычев, О.Н. Петрищев, д-р техн. наук

Расчет частотной характеристики пьезокерамического преобразователя в режиме возбуждения волн Лэмба.

Часть 1. Постановка и общее решение комплексной граничной задачи

Выполнена постановка и решение комплексной граничной задачи о возбуждении ультразвуковых волн Лэмба дисковым пьезоэлектрическим преобразователем в режиме одностороннего доступа к поверхности пластины. Получены выражения для расчета амплитуд смещений материальных частиц пластины, которые формируются радиально распространяющимися волнами Лэмба за пределами площадки механического контакта. Впервые в практике математического моделирования передаточных характеристик пьезоэлектрических преобразователей учтены конечные размеры активного элемента (диска) и особенности волноводного распространения упругих возмущений.

In this paper were provided statement and solution of the complex boundary problem of the Lamb wave excitations by means of the disk piezoelectric converter operating in single surface size access mode. Received expressions can be used for the calculation of the plate displacement that induced with radial Lamb waves spread within the mechanical contact area. The mathematical modeling of the piezoelectric converter transfer function were provided considering active element (disk) finite value and peculiarities of the elastic disturbance guided propagation.

Ключевые слова: пьезокерамический преобразователь, толщинные колебания, частотная характеристика, радиально распространяющиеся волны Лэмба.

Введение

Ультразвуковой неразрушающий контроль различных по форме объектов (сосуды высокого давления, трубы большого диаметра, корпуса подводных и надводных судов и т. д.) в диапазоне частот обнаружения отражателей субмиллиметровых размеров по своему физическому содержанию и аппаратному обеспечению ничем не отличается от дефектологических исследований листового металлопроката. Это объясняется тем, что на частотах мегагерцового диапазона длина упругой волны на несколько порядков меньше ра-

диусов кривизны срединной поверхности исследуемых объектов. По этой причине кривизна поверхности контролируемого объекта не оказывает никакого влияния на характеристики волновых полей, которые возбуждаются ультразвуковыми преобразователями. Таким образом, при математическом моделировании ультразвуковых трактов большого перечня устройств дефектоскопии можно пользоваться расчетной схемой, в которой в качестве упругого волновода рассматривается изотропная пластина конечной толщины.

Известно, что энергия, которая доставляется ультразвуковым преобразователем, уносится из зоны действия преобразователя в периферийные области пластины двумя типами горизонтально-сдвиговых волн и двумя типами волн Лэмба [1]. При контактном способе возбуждения упругих волн подводимая к пластине энергия уносится исключительно симметричными и антисимметричными относительно срединной плоскости металлического листа волнами Лэмба. Особенностью математического описания напряженно-деформированного состояния пластины является то обстоятельство, что аппроксимации типа гипотез Кирхгофа [2] применимы лишь в узком, начинающемся с нуля, диапазоне частот. На частотах мегагерцового диапазона, т. е. в рабочем диапазоне частот устройств неразрушающего контроля, аппроксимации Кирхгофа категорически неприменимы, потому что вектор смещений материальных частиц поперечных сечений даже тонких металлических листов обладает тремя равновеликими проекциями. Ситуация усложняется в еще большей степени из-за того, что на частотах мегагерцового диапазона даже в сравнительно тонких металлических листах существуют десятки распространяющихся волн Лэмба. Так, на частоте $f = 3,5$ МГц (типичное значение центральной частоты рабочего диапазона частот дефектоскопа, который предназначен для обнаружения отражателей миллиметровых размеров) в металлической пластине существуют 16–17 распространяющихся симметричных и столько же антисимметричных волн Лэмба.

Расчету характеристик пьезоэлектрического преобразователя в режиме возбуждения ульт-

развуковых волн в твердых телах посвящено множество статей в различных журналах акустического (ультразвукового) направления. В журнале «Дефектоскопия» Российской Академии наук (г. Екатеринбург, Россия) эту проблему практически монополюно разрабатывает главный научный сотрудник ЗАО НПО «ЦНИИТМАШ» (г. Москва) Данилов В.Н., который, начиная, со середины 80-х по настоящее время, опубликовал только в этом журнале не менее двух десятков статей. Общий подход к моделированию основывается на представлении поля смещений материальных частиц в форме градиентов скалярного потенциала [3, 4]. Это и другие ошибки Данилова В.Н. критиковал Чабанов В.Е. еще в 1998 г. [5]. Тем не менее, это не оказало какого-либо воздействия на содержание дальнейших работ. На основании фактически ложной модели поля смещений материальных частиц контролируемого объекта в последующих работах были построены модели ультразвукового тракта дефектоскопа и АРД-диаграмма (см., например, работы [6–8]). В твердом теле, которое обладает хотя бы одной ограничивающей его объем поверхностью (упругое полупространство), поле смещений материальных частиц описывается линейной комбинацией градиентов скалярного и компонентов векторного потенциалов Гельмгольца. Поскольку указанные работы Данилова В.Н. (см. также библиографию в работе [5]) в своей основе содержат интегральное преобразование, отдаленно напоминающее преобразование Ханкеля [9], скалярного потенциала, постольку можно утверждать, что эти работы не имеют никакого отношения к описанию реального процесса возбуждения ультразвуковых волн в упругом полупространстве и, тем более, в упругой пластине.

Таким образом, вопрос о математическом моделировании контактного способа возбуждения нормальных волн Лэмба остается открытым и по настоящее время. Это обстоятельство определило цель и содержание данной работы, в которой излагаются принципы построения математической модели преобразователя в режиме излучения ультразвуковых волн Лэмба и некоторые, наиболее существенные, по мнению авторов, результаты исследования этой модели.

Принципы моделирования передаточных характеристик пьезоэлектрических преобразователей в режиме возбуждения волн Лэмба

Пьезоэлектрические преобразователи являются преобразователями контактного типа и их практическое использование возможно лишь

при наличии механического контакта с объектом, в котором возбуждаются упругие волны. Излучающий пьезоэлектрический преобразователь создает на поверхности металлической пластины механические напряжения (нагрузки). Предположим, что в пределах круговой области радиуса $\rho < A$ поверхности изотропной пластины (рис. 1), преобразователем сформированы нагрузки, которые изменяются во времени по закону $e^{i\omega t}$ (где $i = \sqrt{-1}$; ω – круговая частота; t – время). Амплитуды гармонически изменяющихся внешних сил на поверхности $x_3 = h$ пластины определим через компоненты тензора поверхностной плотности $\sigma_{3k}^*(x_1, x_2, h)$ ($k = 1, 2, 3$). Задача о возбуждении гармонических волн в изотропной пластине, поверхности $x_3 = \pm h$ которой за пределами круга $\rho = A$ свободны от механических контактов с другими материальными объектами, формулируется следующим образом.

Найти амплитуды гармонически изменяющихся во времени компонентов вектора $\mathbf{u}(x_k, \omega)$ смещений материальных частиц изотропной пластины, которые в объеме V пластины удовлетворяют второму закону Ньютона в дифференциальной форме (уравнению установившихся гармонических колебаний)

$$(\lambda + 2G) \text{grad div} \mathbf{u}(x_k, \omega) - G \text{rot rot} \mathbf{u}(x_k, \omega) + \rho_0 \omega^2 \mathbf{u}(x_k, \omega) = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (1)$$

а на поверхностях $x_3 = \pm h$ пластины – третьему закону Ньютона

$$\sigma_{3k}(x_1, x_2, \pm h) = \begin{cases} \sigma_{3k}^*(x_1, x_2, h) & \forall (x_1, x_2) \in S_A, \\ 0 & \forall (x_1, x_2) \notin S_A, \end{cases} \quad k = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где λ , G и ρ_0 – модули упругости и плотность материала пластины; $\sigma_{3k}(x_1, x_2, \pm h)$ – амплитуды гармонически изменяющихся во времени упругих напряжений на поверхностях $x_3 = \pm h$ пластины; S_A – площадь круга, в пределах которого существуют внешние нагрузки.

Решение стационарной граничной задачи (1)–(2) наиболее просто осуществляется в цилиндрической системе координат (ρ, ϑ, z) , ось z которой совмещена с вертикальной осью Ox_3 правовинтовой (физической) системой координат (x_1, x_2, x_3) (рис. 1). Поскольку внешние нагрузки за пределами области S_A обращаются в нуль, постольку решение граничной задачи (1)–(2) можно осуществить с помощью интегрального

преобразования Ханкеля [9] по радиальной координате ρ . Решение граничной задачи (1)–(2) для случая осесимметричной, т. е. не зависящей от значений полярного угла ϑ , нагрузки было получено по изложенной в работе [10] методике. Результат общего решения граничной задачи (1) – (2) в дальней зоне $\rho > A$ представляется в виде неортогонального разложения по распространяющимся симметричным (индекс s) и антисимметричным (индекс a) относительно срединной плоскости $z=0$ пластины нормальным волнам Лэмба и записывается в следующем виде:

$$\mathbf{u}(\rho, z) e^{i\omega t} = \left[\sum_{n=1}^N \mathbf{u}^s(\rho, z, \gamma_n) + \sum_{m=1}^M \mathbf{u}^a(\rho, z, \gamma_m) \right] e^{i\omega t}, \quad (3)$$

где N и M – количество распространяющихся на данной частоте ω симметричных и антисимметричных волн Лэмба с амплитудами векторов смещений материальных частиц $\mathbf{u}^s(\rho, z, \gamma_n)$ и $\mathbf{u}^a(\rho, z, \gamma_m)$ соответственно; γ_n и γ_m – корни дисперсионных уравнений $\Delta_s(\gamma_n) = 0$ и $\Delta_a(\gamma_m) = 0$, которые имеют смысл условий существования распространяющихся симметричных (индекс s) и антисимметричных (индекс a) волн Лэмба. Условия существования или дисперсионные уравнения имеют следующий вид:

$$\Delta_s(\gamma_n) = (\gamma_n^2 - \beta_n^2)^2 \cos(\alpha_n h) \sin(\beta_n h) + 4\gamma_n^2 \alpha_n \beta_n \sin(\alpha_n h) \cos(\beta_n h) = 0, \quad (4)$$

$$\Delta_a(\gamma_m) = (\gamma_m^2 - \beta_m^2)^2 \sin(\alpha_m h) \cos(\beta_m h) + 4\gamma_m^2 \alpha_m \beta_m \cos(\alpha_m h) \sin(\beta_m h) = 0, \quad (5)$$

где γ_q , α_q и β_q ($q = n, m$) – проекции волновых векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_t не взаимодействующих продольных волн (индекс l) и волн сдвига (индекс t) на координатные оси ρ и z . Модули этих векторов k_l и k_t определяются частотой смены знака напряженно-деформированного состояния пластины по следующим формулам: $k_l = \omega / \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho_0}$, $k_t = \omega / \sqrt{G/\rho_0}$. При этом $\gamma_q^2 + \alpha_q^2 = k_l^2$ и $\gamma_q^2 + \beta_q^2 = k_t^2$. Фрагменты частотного спектра действительных ($\text{Im} \gamma_q = 0$) корней трансцендентных уравнений (4) и (5), рассчитанных для пластины из материала с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,3$, показаны на рис. 2 сплошными (γ_n) и штриховыми (γ_m) кривыми.

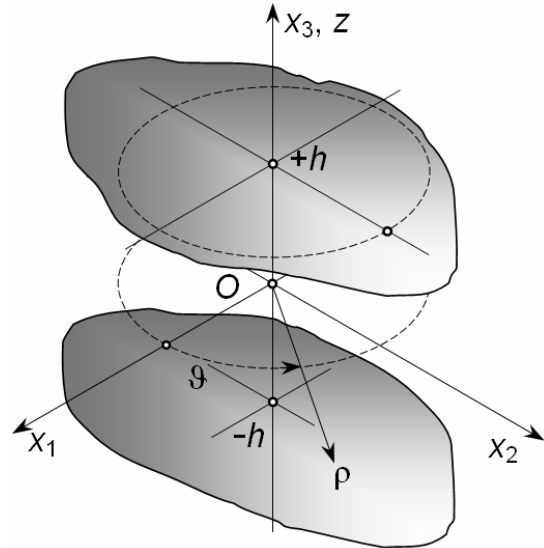


Рис. 1. Декартова и цилиндрическая системы координат, используемые при описании напряжений и деформаций в изотропной пластине
По оси абсцисс на рис. 2 отсчитывается безразмерное волновое число $\zeta = 2\gamma_q h / \pi$, по оси ординат – безразмерная частота $\Omega = 2k_t h / \pi$.

Символом Ω^* на рис. 2 обозначена фиксированная частота смены знака внешних нагрузок. Точки пересечения сплошных и штриховых кривых с прямой $\Omega = \Omega^*$ соответствуют числовым значениям величин γ_n и γ_m в соотношении (3). Цифры, проставленные возле кривых на поле рис. 2, соответствуют номерам мод распространяющихся нормальных волн.

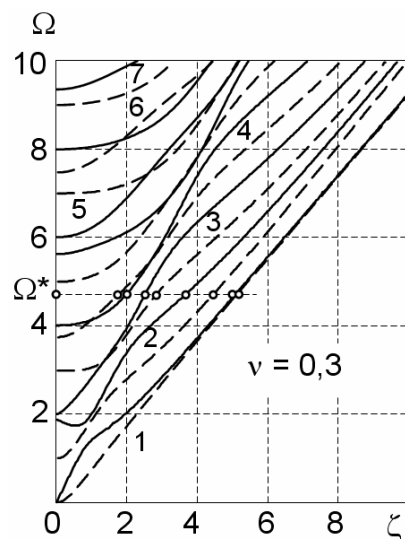


Рис. 2. Фрагмент частотного спектра волновых чисел распространяющихся волн Лэмба

Компоненты вектора $\mathbf{u}^s(\rho, z, \gamma_n)$ смещения материальных частиц в цилиндрическом фронте

те симметричной волны Лэмба определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_p^s(\rho, z, \gamma_n) &= U_p^s(z, \gamma_n) H_1^{(2)}(\gamma_n \rho), \\ u_z^s(\rho, z, \gamma_n) &= U_z^s(z, \gamma_n) H_0^{(2)}(\gamma_n \rho), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$U_q^s(z, \gamma_n) = \frac{i\pi A_n(\gamma_n)}{4G\Delta'_s(\chi_n)} u_q^s(z, \gamma_n) \quad (q = p, z); \quad (7)$$

$H_v^{(2)}(\gamma_n \rho)$ ($v = 0, 1$) – функция Ханкеля второго рода порядка v ; $A_n(\gamma_n)$ – амплитудный множитель n -й распространяющейся моды симметричных волн Лэмба, причем

$$\begin{aligned} A_n(\gamma_n) &= 2\beta_n \gamma_n \sigma_{zp}^*(\gamma_n, h) \cos(\beta_n h) + \\ &+ (\gamma_n^2 - \beta_n^2) \sigma_{zz}^*(\gamma_n, h) \sin(\beta_n h); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{zp}^*(\gamma_n, h) \\ \sigma_{zz}^*(\gamma_n, h) \end{aligned} \right\} = \int_0^\infty \rho \left\{ \begin{aligned} \sigma_{zp}^*(\rho, h) J_1(\gamma_n \rho) \\ \sigma_{zz}^*(\rho, h) J_0(\gamma_n \rho) \end{aligned} \right\} d\rho; \quad (9)$$

$J_v(\gamma_n \rho)$ ($v = 0, 1$) – функция Бесселя порядка v ; $\Delta'_s(\chi_n) = d\Delta_s(\chi_n)/d\chi_n$; $\chi_n \equiv \gamma_n^2$; $u_q^s(z, \gamma_n)$ ($q = p, z$) – собственные функции (компоненты вектора $\mathbf{u}^s(z, \gamma_n)$) однородной граничной задачи (1)–(2). Они определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u_p^s(z, \gamma_n) &= -\frac{\gamma_n \beta_n}{h(\gamma_n^2 - \beta_n^2) \sin(\beta_n h)} \times \\ &\times \left[a_p^s \cos(\alpha_n z) + b_p^s \cos(\beta_n z) \right], \\ u_z^s(z, \gamma_n) &= -\frac{\gamma_n \beta_n}{h(\gamma_n^2 - \beta_n^2) \sin(\beta_n h)} \times \\ &\times \left[a_z^s \sin(\alpha_n z) + b_z^s \sin(\beta_n z) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a_p^s &= \left[(\gamma_n h)^2 - (\beta_n h)^2 \right] \frac{\sin(\beta_n h)}{(\beta_n h)}; \\ b_p^s &= 2(\alpha_n h) \sin(\alpha_n h); \\ a_z^s &= \left[(\gamma_n h)^2 - (\beta_n h)^2 \right] \frac{(\alpha_n h) \sin(\beta_n h)}{(\gamma_n h)(\beta_n h)}; \\ b_z^s &= -2 \frac{(\gamma_n h)(\alpha_n h) \sin(\alpha_n h)}{(\beta_n h)}. \end{aligned}$$

Компоненты вектора $\mathbf{u}^a(\rho, z, \gamma_m)$ определяются следующими расчетными соотношениями:

$$\begin{aligned} u_p^a(\rho, z, \gamma_m) &= U_p^a(z, \gamma_m) H_1^{(2)}(\gamma_m \rho), \\ u_z^a(\rho, z, \gamma_m) &= U_z^a(z, \gamma_m) H_0^{(2)}(\gamma_m \rho), \end{aligned} \quad (11)$$

где $U_q^a(z, \gamma_m) = \frac{i\pi B_m(\gamma_m)}{4G\Delta'_a(\chi_m)} u_q^a(z, \gamma_m)$, ($q = p, z$);

$B_m(\gamma_m)$ – амплитудный множитель m -й распространяющейся моды антисимметричных волн Лэмба, причем

$$\begin{aligned} B_m(\gamma_m) &= -2\beta_m \gamma_m \sigma_{zp}^*(\gamma_m, h) \sin(\beta_m h) + \\ &+ (\gamma_m^2 - \beta_m^2) \sigma_{zz}^*(\gamma_m, h) \cos(\beta_m h); \end{aligned} \quad (12)$$

интегральные образы $\sigma_{zq}^*(\gamma_m, h)$ ($q = p, z$) поверхностных нагрузок определяются по формулам (9), в которых необходимо заменить волновые числа γ_n на γ_m . Компоненты вектора $\mathbf{u}^a(z, \gamma_m)$ определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u_p^a(z, \gamma_m) &= -\frac{\gamma_m}{\alpha_m h} \left[a_p^a \sin(\alpha_m z) + b_p^a \sin(\beta_m z) \right], \\ u_z^a(z, \gamma_m) &= \frac{\gamma_m}{\alpha_m h} \left[a_z^a \cos(\alpha_m z) + b_z^a \cos(\beta_m z) \right], \end{aligned} \quad (13)$$

где $a_p^a = \alpha_m h$; $a_z^a = \frac{(\alpha_m h)^2}{\gamma_m h}$;

$$\begin{aligned} b_p^a &= -\left[(\gamma_m h)^2 - (\beta_m h)^2 \right] \frac{(\alpha_m h) \sin(\alpha_m h)}{2(\gamma_m h)^2 \sin(\beta_m h)}; \\ b_z^a &= \left[(\gamma_m h)^2 - (\beta_m h)^2 \right] \frac{(\alpha_m h) \sin(\alpha_m h)}{2(\gamma_m h)(\beta_m h) \sin(\beta_m h)}. \end{aligned}$$

Будем полагать, что ультразвуковой преобразователь состоит из круглой, радиуса R , пьезокерамической пластинки, т. е. диска, толщиной α . Верхняя и нижняя поверхности диска покрыты тонким слоем металла (электродированы). Пьезокерамика в процессе изготовления диска поляризована по толщине, т. е. её материальные константы определяются стандартными матрицами (см., например [11]). Пьезокерамический диск и тыловая акустическая нагрузка (два обязательных элемента любого пьезоэлектрического преобразователя) образуют простейший преобразователь контактного типа. Его расчетная схема приведена на рис. 3. При подаче на электродированные поверхности (они выделены на рис. 3 жирными линиями) пьезо-

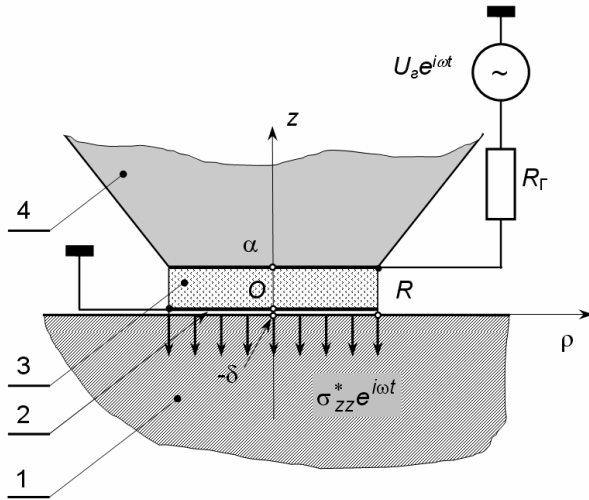


Рис. 3. Расчетная схема преобразователя контактного типа

крамического диска 3 разности электрических потенциалов в нем возникают гармонически изменяющиеся во времени осесимметричные радиально-толщинные колебания материальных частиц. Через слой контактной жидкости 2, толщина которого $\delta \ll \alpha$, упругие колебания материальных частиц диска передаются в акустическую нагрузку, т. е. в пластину 1. На этом этапе преобразования сигналов слой контактной жидкости играет роль своеобразного фильтра, который отсекает радиальные смещения материальных частиц пьезокерамического диска от поверхности акустической нагрузки. Это происходит из-за того, что касательные напряжения в ньютоновской (вязкой) жидкости пропорциональны произведению скорости изменения давления на коэффициент динамической вязкости [12]. Коэффициент динамической вязкости контактных жидкостей в большинстве случаев имеет порядок единиц мПа·с (динамическая вязкость воды при температуре 20 °С составляет величину $\eta = 1,005$ мПа·с). Несложно показать, что отношение касательного напряжения σ_{zp}^* к

нормальному напряжению σ_{zz}^* на нижней границе слоя контактной жидкости будет иметь порядок $\eta/(\rho_{ж} c_{ж})$, где $\rho_{ж}$ и $c_{ж}$ – плотность жидкости и скорость распространения в ней звуковых волн. Даже для такой вязкой жидкости, как глицерин ($\eta = 778$ мПа·с при $T = 21$ °С) отношение $\eta/(\rho_{ж} c_{ж}) = 3,26 \cdot 10^{-7}$ ($\rho_{ж} = 1260$ кг/м³; $c_{ж} = 1895$ м/с). Для воды и похожих на неё по вязкости жидкостей это отношение примерно в 750 раз меньше.

Таким образом, слой контактной жидкости не передает касательные напряжения σ_{zp}^* , и нор-

мальные волны Лэмба возбуждаются исключительно напряжениями σ_{zz}^* . Если поверхности $z=0$ и $z=\alpha$ полностью электродированы, то можно полагать, что $\sigma_{zz}^*(\rho, 0) = \sigma_0 \quad \forall \rho \in [0, R]$, где σ_0 – амплитудное значение осесимметричного нормального напряжения. Следовательно, на поверхности изотропной пластины действуют локализованные в круге $\rho \leq R$ внешние нагрузки с поверхностными плотностями $\sigma_{zp}^*(\rho, h) = 0$ и $\sigma_{zz}^*(\rho, h) = \sigma_0 \quad \forall \rho \in [0, R]$. Подставляя значения напряжений в соотношения (9), а полученные результаты – в выражения для расчета амплитудных множителей симметричных и антисимметричных волн Лэмба (выражения (8) и (12) соответственно), получаем следующие расчетные формулы:

$$u_p^s(\rho, z, \gamma_n) = iU_0 F_s(\gamma_n, R) \left[a_p^s \cos(\alpha_n z) + b_p^s \cos(\beta_n z) \right] H_1^{(2)}(\gamma_n \rho), \quad (14)$$

$$u_z^s(\rho, z, \gamma_n) = iU_0 F_s(\gamma_n, R) \left[a_z^s \sin(\alpha_n z) + b_z^s \sin(\beta_n z) \right] H_0^{(2)}(\gamma_n \rho),$$

$$u_p^a(\rho, z, \gamma_m) = iU_0 F_a(\gamma_m, R) \left[a_p^a \sin(\alpha_m z) + b_p^a \sin(\beta_m z) \right] H_1^{(2)}(\gamma_m \rho), \quad (15)$$

$$u_z^a(\rho, z, \gamma_m) = -iU_0 F_a(\gamma_m, R) \left[a_z^a \cos(\alpha_m z) + b_z^a \cos(\beta_m z) \right] H_0^{(2)}(\gamma_m \rho),$$

$$\text{где } U_0 = \frac{\pi \sigma_0 R^2}{8Gh};$$

$$F_s(\gamma_n, R) = \frac{2J_1(\gamma_n R)}{\gamma_n R} \frac{(\gamma_n h)(\beta_n h)^2}{(k_s h)^4 \Delta_0};$$

$$F_a(\gamma_m, R) = \frac{2J_1(\gamma_m R)}{\gamma_m R} \frac{(\gamma_m h) \left[(\gamma_m h)^2 - (\beta_m h)^2 \right] \cos(\beta_m h)}{(k_s h)^4 \Lambda_0};$$

Δ_0 и Λ_0 – алгебраические конструкции, которые образуются после вычисления производных $\Delta'_s(a)(\chi_{n(m)})$ и приведения результата вычислений к безразмерному виду; $a_{p(z)}^{s(a)}$ и $b_{p(z)}^{s(a)}$ определены в комментариях к выражениям (10) и (13).

Таким образом, пьезоэлектрический преобразователь, который в круговой области $\rho \leq R$ механического контакта создает нормальные напряжения $\sigma_{zz}^* = \sigma_0 e^{i\omega t}$, возбуждает в изо-

тропной упругой пластине совокупность осесимметричных, радиально распространяющихся волн Лэмба, симметричных и антисимметричных относительно срединной плоскости пластины. Смещения материальных частиц пластины в точке наблюдения с координатами (ρ, ϑ, z) ($R \leq \rho < \infty$; $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$; $-h \leq z \leq h$) в любой момент времени t определяются действительной частью комплексных функций $u_{\rho(z)}^{s(a)}(\rho, z, \gamma_{n(m)})e^{i\omega t}$, где пространственно развитые амплитуды $u_{\rho(z)}^{s(a)}(\rho, z, \gamma_{n(m)})$ заданы соотношениями (14) и (15).

Этим завершается первый этап построения математической модели ультразвукового преобразователя контактного типа в режиме возбуждения нормальных волн Лэмба.

Очевидно, что амплитудное значение σ_0 напряжения σ_{zz}^* на поверхности $z = h$ изотропной пластины зависит от частоты ω смены знака питающего преобразователь электрического напряжения $U(t) = U_{\Gamma}e^{i\omega t}$ на выходе генератора электрических сигналов и набора геометрических и физико-механических параметров элементов конструкции преобразователя. В общем виде это утверждение можно записать следующим образом

$$\sigma_0 = U_{\Gamma}W^{\sigma}(\omega, P), \quad (16)$$

где U_{Γ} – амплитуда разности электрических потенциалов на выходе генератора электрических сигналов (рис. 3); $W^{\sigma}(\omega, P)$ – комплексная частотная (передаточная) характеристика по механическому напряжению (верхний индекс σ) с электрического входа на механический выход – плоскость механического контакта при $\delta \rightarrow 0$ преобразователя и акустической нагрузки, т. е. изотропной пластины толщиной $2h$; символом P обозначен набор параметров элементов преобразователя, в число которых входит и внутреннее сопротивление генератора R_{Γ} .

Определение функции $W^{\sigma}(\omega, P)$ является целью и содержанием второго этапа построения математической модели ультразвукового преобразователя.

Центральным моментом второго этапа является определение параметров и характеристик напряженно-деформированного состояния пьезокерамического диска.

Амплитудные значения компонентов $w_{\rho}(\rho, z)$ и $w_z(\rho, z)$ гармонически изменяющегося во времени вектора $\mathbf{w}(\rho, z)$ смещения материальных частиц пьезокерамического диска удовлетворяют уравнениям установившихся колебаний

$$\sigma_{\rho\rho}^d + \sigma_{\rho z, z}^d + (\sigma_{\rho\rho}^d - \sigma_{\vartheta\vartheta}^d)/\rho + \rho_d \omega^2 w_{\rho}(\rho, z) = 0$$

$$\forall (\rho, z) \in V_d,$$

$$\sigma_{\rho z, \rho}^d + \sigma_{zz, z}^d + \sigma_{\rho z}^d/\rho + \rho_d \omega^2 w_z(\rho, z) = 0 \quad (17)$$

$$\forall (\rho, z) \in V_d,$$

где $\sigma_{\beta\lambda}^d$ ($\beta, \lambda = \rho, \vartheta, z$) – компоненты амплитудных значений гармонически изменяющихся во времени тензоров результирующих напряжений в объеме V_d деформируемого пьезоэлектрического диска; запятая между индексами обозначает дифференцирование выражения, записанного до запятой, по координате, индекс которой проставлен после запятой; ρ_d – плотность пьезокерамики. Результирующие напряжения $\sigma_{\beta\lambda}^d$ представляют собой алгебраическую сумму упругих напряжений и напряжений, которые формируются силами Кулона. Эта алгебраическая сумма имеет смысл обобщенного закона Гука для пьезоэлектриков [13] и, применительно к рассматриваемой задаче, записывается следующим образом:

$$\sigma_{\rho\rho}^d = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + c_{13}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z,$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta}^d = c_{21}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{22}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + c_{23}^E \varepsilon_{zz} - e_{32} E_z,$$

$$\sigma_{zz}^d = c_{31}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{32}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + c_{33}^E \varepsilon_{zz} - e_{33} E_z,$$

$$\sigma_{\rho z}^d = 2c_{55}^E \varepsilon_{\rho z} - e_{15} E_{\rho}, \quad (18)$$

где c_{mn}^E ($m, n = 1, 2, \dots, 6$ – индексы Фойгта) – компоненты тензора модулей упругости, которые экспериментально определяются в режиме постоянства (равенства нулю) напряженности электрического поля (символ E) внутри деформируемого пьезоэлектрика; $\varepsilon_{\beta\lambda}$ ($\beta, \lambda = \rho, \vartheta, z$) – компоненты тензора бесконечно малых деформаций; e_{km} ($k = 1, 2, 3; m = 1, 2, \dots, 6$ – индекс Фойгта) – компоненты тензора пьезомодулей; E_{β} ($\beta = \rho, z$) – амплитуды компонентов вектора напряженности результирующего электрического поля, которое возникает в объеме деформируемого пьезоэлектрика и представляет собой

алгебраическую сумму внешнего электрического поля, сформированного генератором (внешним источником) и внутреннего электрического поля, созданного поляризационными зарядами (внутренними источниками), неизбежно возникающими при деформировании пьезоэлектриков. Электрическая поляризация определяется вектором электрической индукции \mathbf{D} , который представляется алгебраической суммой электрической (кулоновской) и электроупругой составляющих [13]. Применительно к обсуждаемой задаче, закон электрической поляризации диэлектрика (пьезокерамики) с усложненными (пьезоэлектрическими) свойствами записывается следующим образом:

$$D_\rho = \epsilon_{15}\epsilon_{\rho z} + \chi_1^\epsilon E_\rho; \quad D_\vartheta = 0;$$

$$D_z = \epsilon_{31}\epsilon_{\rho\rho} + \epsilon_{32}\epsilon_{\vartheta\vartheta} + \epsilon_{33}\epsilon_{zz} + \chi_3^\epsilon E_z, \quad (19)$$

где $(\beta = \rho, \vartheta, z)$ – амплитуды компонентов вектора электрической индукции; χ_1^ϵ и χ_3^ϵ (1 и 3 – индексы Фойгта) – компоненты тензора диэлектрической проницаемости в поперечном (индекс 1) и продольном (индекс 3) направлениях относительно ориентации электрической поляризации пьезокерамического диска. Компоненты вектора электрической индукции должны удовлетворять условию отсутствия свободных носителей электричества в объеме диэлектрика [14]. Это условие имеет следующий вид

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \quad \forall (\rho, \vartheta, z) \in V_\vartheta, \quad (20)$$

где компоненты вектора \mathbf{D} определены соотношениями (19).

На боковой поверхности $\rho = R$ диска радиальный компонент $D_\rho = 0$ [15]. Так как электрическое состояние деформируемого пьезоэлектрического диска рассматривается в квазистатической постановке [15], то справедливы определения: $E_\rho = -\partial\phi(\rho, z)/\partial\rho$ и $E_z = -\partial\phi(\rho, z)/\partial z$, где $\phi(\rho, z)$ – электрический потенциал результирующего электрического поля в объеме деформируемого диска. Для электрического потенциала $\phi(\rho, z)$ справедливы следующие граничные условия:

$$\phi(\rho, 0) = 0 \quad \forall \rho \in [0, R],$$

$$\phi(\rho, \alpha) - U_T - i2\pi\omega R_T \int_0^R \rho D_z d\rho = 0 \quad \forall \rho \in [0, R],$$

$$\left[2\epsilon_{15}\epsilon_{\rho z} - \chi_1^\epsilon \frac{\partial\phi(\rho, z)}{\partial\rho} \right]_{\rho=R} = 0 \quad \forall z \in [-h, h]. \quad (21)$$

Два первых соотношения системы граничных условий (21) записаны в предположении, что толщина слоя контактной жидкости $\delta \rightarrow 0$.

Для механических напряжений и компонентов вектора смещений материальных частиц граничными условиями являются третий закон Ньютона и условия сплошности (неразрывности смещений) в плоскостях механического контакта пьезокерамического диска с тыловой акустической нагрузкой и с металлической пластиной. При этом толщина δ слоя контактной жидкости предполагается пренебрежимо малой по сравнению с толщиной α пьезокерамического диска и не принимается в расчет. При выполнении сопряжения напряженно-деформированного состояния диска с акустическими нагрузками будем считать, что бесконечно тонкий слой материальных частиц акустической нагрузки, образующий плоскость механического контакта, совершает поршневое (одномерное) движение. При этом амплитуды гармонически изменяющихся во времени компонентов векторов смещения материальных частиц тыловой и фронтальной акустических нагрузок определяется следующим образом:

$$w_z^{\text{TH}}(\rho, z) = W_z^{\text{TH}}(\rho) e^{-ik_{\text{TH}}z} \quad \forall (\rho \in [0, R], z = \alpha), \quad (22)$$

$$w_z^{\text{AH}}(\rho, z) = \frac{\sigma_0 e^{ik_{\text{AH}}z}}{ik_{\text{AH}}Y^{\text{AH}}} \quad \forall (\rho \in [0, R], z = 0), \quad (23)$$

где $W_z^{\text{TH}}(\rho)$ – уровни аксиальных смещений бесконечно тонкого слоя материальных частиц тыловой акустической нагрузки в пределах плоскости $\rho \leq R$ механического контакта;

$k_{\text{TH}} = \omega/v_{\text{CT}}^{\text{TH}}$ – волновое число колебаний сжатия-растяжения материала тыловой акустической нагрузки; $v_{\text{CT}}^{\text{TH}} = \sqrt{Y^{\text{TH}}/\rho_{\text{TH}}}$ – стержневая скорость распространения упругих возмущений в материале тыловой акустической нагрузки, который характеризуется модулем Юнга Y^{TH} и плотностью ρ_{TH} ; σ_0 – искомое значение амплитуды нормального напряжения на поверхности металлической пластины; $k_{\text{AH}} = \omega/v_{\text{CT}}^{\text{AH}}$ – волновое число одномерных колебаний материальных частиц акустической нагрузки (металлической пластины), образующих плоскость механического контакта $\rho \leq R$; $v_{\text{CT}}^{\text{AH}} = \sqrt{Y^{\text{AH}}/\rho_0}$ – стержневая скорость; Y^{AH} – модуль Юнга металлической пластины.

Если коэффициент динамической вязкости клеевого состава, с помощью которого пьезоке-

раммический диск (позиция 3 на рис. 3) соединяется с тыловой акустической нагрузкой (позиция 4 на рис. 3), не превышает одного мегапаскаля умноженного на секунду, то это соединение можно рассматривать как механический контакт с проскальзыванием. В этом случае граничные условия для упругой составляющей физического состояния деформируемого пьезо-керамического диска записываются следующим образом:

$$\sigma_{zz}^d(\rho, \alpha) + i\omega Z_{TH} W_z^{TH}(\rho) e^{-ik_{TH}\alpha} = 0 \quad \forall \rho \in [0, R], \quad (24)$$

$$w_z(\rho, \alpha) - W_z^{TH}(\rho) e^{-ik_{TH}\alpha} = 0 \quad \forall \rho \in [0, R], \quad (25)$$

$$\sigma_{zz}^d(\rho, 0) - \sigma_0 = 0 \quad \forall \rho \in [0, R], \quad (26)$$

$$w_z(\rho, 0) - \frac{\sigma_0}{i\omega Z_{AH}} = 0 \quad \forall \rho \in [0, R], \quad (27)$$

$$\sigma_{zp}^d(\rho, 0) = \sigma_{zp}^d(\rho, \alpha) = 0 \quad \forall \rho \in [0, R], \quad (28)$$

$$\sigma_{pz}^d(R, z) = 0 \quad \forall z \in [0, \alpha],$$

$$\sigma_{pp}^d(R, z) = 0 \quad \forall z \in [0, \alpha], \quad (29)$$

где $Z_{TH} = \rho_{TH} v_{CT}^{TH}$ и $Z_{AH} = \rho_0 v_{CT}^{AH}$ – акустические импедансы тыловой и фронтальной акустических нагрузок. При записи соотношений (26), (27) и условия для касательного напряжения $\sigma_{zp}^d(\rho, 0)$, было учтено, что $\delta = 0$.

Дифференциальные уравнения (17) и (20) в сочетании с граничными условиями (21) и (24) – (29) образуют граничную задачу, решение которой позволит определить связь между входным воздействием на преобразователь, т. е. разности электрических потенциалов U_r , и его откликом на механическом выходе, т. е. амплитудой σ_0 нормальных напряжений в плоскости механического контакта с металлической пластиной. В общем случае это довольно сложная и нетривиальная в методике решения задача математической физики. Первое приближение к точному решению этой задачи было получено в предположении, что $w_p(\rho, z) = W_p(\rho)$, $w_z(\rho, z) = W_z(z)$ и $\phi(\rho, z) = \Phi(z)$. При этом, естественно, $\delta = 0$. При таких предположениях коэффициент передачи $W^\sigma(\omega, P)$ определяется следующим образом:

$$W^\sigma(\omega, P) = \frac{e_{33}}{\alpha} W(\omega, \alpha, R, \xi_{TH}),$$

где

$$W(\omega, \alpha, R, \xi_{TH}) = - \frac{i \xi_{TH} (a_{22} - a_{12}) \Phi(\gamma_p R)}{\left[1 + i\omega C_0^E R_\Gamma \Psi(\gamma_p, \gamma) \right] [a_{21} a_{12} - a_{11} a_{22}]}, \quad (30)$$

$\xi_{TH} = \omega Z_{TH} / (\gamma c_{33}^D)$ – относительный акустический импеданс тыловой акустической нагрузки; γ – волновое число колебаний сжатия – растяжения пьезокерамического диска, причем $\gamma = \omega / v^D$; $v^D = \sqrt{c_{33}^D / \rho_d}$ – скорость распространения упругих волн сжатия растяжения; $c_{33}^D = c_{33}^E + e_{33}^2 / \chi_3^E$ – модуль упругости для режима постоянства (равенства нулю) электрической индукции;

$$a_{11} = \sin(\gamma\alpha) + M \frac{(\cos(\gamma\alpha) - 1)}{(\gamma\alpha)} - i \xi_{TH} \cos(\gamma\alpha);$$

$$M = \frac{K_3^2}{1 + K_3^2} + \frac{k c_{12}^E}{c_{33}^D F(\gamma_p R)} \frac{2J_1(\gamma_p R)}{(\gamma_p R)};$$

$$a_{12} = \cos(\gamma\alpha) - M \frac{\sin(\gamma\alpha)}{(\gamma\alpha)} + i \xi_{TH} \sin(\gamma\alpha);$$

$$a_{21} = M \frac{(\cos(\gamma\alpha) - 1)}{(\gamma\alpha)} + i \xi_{AH}; \quad a_{22} = 1 - M \frac{\sin(\gamma\alpha)}{(\gamma\alpha)};$$

$\xi_{AH} = \omega Z_{AH} / (\gamma c_{33}^D)$ – относительный акустический импеданс фронтальной акустической нагрузки, т. е. металлической пластины. Функции $\Phi(\gamma_p R)$ и $\Psi(\gamma_p, \gamma)$ задаются следующими выражениями:

$$\Phi(\gamma_p R) = 1 - \frac{k e_{31}}{e_{33}} \frac{2J_1(\gamma_p R)}{(\gamma_p R)},$$

где $k = c_{12}^E / c_{11}^E$; $J_1(\gamma_p R)$ – функция Бесселя первого порядка; $\gamma_p = \omega / \sqrt{c_{11}^E / \rho_d}$ – волновое число радиальных колебаний материальных частиц пьезокерамического диска;

$$\Psi(\gamma_p, \gamma) = \frac{K_3^2}{(1 + K_3^2)} \left\{ \frac{2J_1(\gamma_p R)}{(\gamma_p R) F(\gamma_p R)} \times \left[\frac{k e_{31}}{e_{33}} \Xi(\gamma_p, \gamma) + \frac{c_{33}^D}{c_{11}^E} \left(\frac{e_{31}}{e_{33}} \right)^2 \right] - \Xi(\gamma_p, \gamma) \right\} + 1;$$

$K_3^2 = e_{33}^2 / (c_{33}^E \chi_3^E)$ – квадрат коэффициента электромеханической связи пьезокерамики;

$F(\gamma_p R) = J_0(\gamma_p R) - (1-k)J_1(\gamma_p R)/(\gamma_p R)$ – уравнение резонансных частот радиальных колебаний пьезокерамического диска;

$$\Xi(\lambda, \gamma) = \frac{\Phi(\lambda R)}{(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22})} \times \left[(a_{11} - a_{21}) \frac{\sin(\gamma\alpha)}{(\gamma\alpha)} + (a_{22} - a_{12}) \frac{(1 - \cos(\gamma\alpha))}{(\gamma\alpha)} \right];$$

$C_0^\varepsilon = \pi R^2 \chi_3^\varepsilon / \alpha$ – статическая электрическая емкость пьезокерамического диска; R_f – выходное (внутреннее) сопротивление генератора электрических сигналов.

Подставляя соотношение (30) в определение передаточной характеристики $W^\sigma(\omega, P)$, а полученный результат – в формулы для расчета смещений материальных частиц металлической пластины, получаем, в конечном счете, аналитические соотношения, которые имеют смысл математической модели (частотной характеристики) дискового пьезоэлектрического преобразователя в режиме возбуждения радиально распространяющихся нормальных волн Лэмба.

Принципиальным моментом в деле построения математических моделей преобразователей контактного типа в режиме возбуждения гармонических волн в пластинах и стержнях является последовательность выполнения вычислительных процедур. Эта последовательность естественным образом разбивается на два, четко очерченных, этапа. На первом этапе решается граничная задача (1)–(2), и этим определяется структура волнового поля, кинематические характеристики и амплитудные множители нормальных волн. На втором этапе определяются амплитуды поверхностных нагрузок, которые создаются той или иной конструкцией преобразователя. Для этого формируется соответствующая реальной ситуации расчетная схема преобразователя, формулируются уравнения движения материальных частиц в объеме активного (пьезоэлектрического) элемента преобразователя и формулируются гипотезы о движении материальных частиц в бесконечно тонких слоях акустических нагрузок, которые контактируют с поверхностями активного элемента ультразвукового преобразователя. На основании всего этого формируется граничная задача, подобная по физическому содержанию граничной задаче (17), (20), (21), (24)–(29), которая была рассмотрена в настоящей работе.

Последовательное решение указанных задач позволит определить качественные и количественные характеристики возбуждаемых ультразвуковых волн.

Выводы

Впервые сформулирована и полностью решена сквозная задача о возбуждении ультразвуковых волн Лэмба пьезоэлектрическим преобразователем с дисковым активным элементом. Получены аналитические соотношения, которые позволяют определить амплитуды смещений материальных частиц изотропной пластины, которые формируются за пределами области механического контакта симметричными и антисимметричными радиально распространяющимися волнами Лэмба. Впервые в практике математического моделирования передаточных характеристик пьезоэлектрических преобразователей учтены конечные размеры активного элемента (диска) и особенности волнового распространения упругих возмущений.

Литература

1. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – К.: Наукова думка, 1981. – 283 с.
2. Доннел Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 567 с.
3. Данилов В.Н. Расчет акустического тракта дефектоскопа с прямыми круглыми преобразователями // Дефектоскопия. – 1996. – № 10. – С. 11–17.
4. Данилов В.Н. К вопросу о расчете акустического поля прямого преобразователя с пьезопластинами различных форм // Дефектоскопия. – 2004. – № 2. – С. 3–15.
5. Чабанов В.Е. О публикациях, посвященных исследованию работы пьезопреобразователей // Дефектоскопия. – 1998. – № 12. – С. 58–67.
6. Данилов В.Н., Ермолов И.Н. Расчет АРД – диаграммы по максимуму эхосигналов // Дефектоскопия. – 2000. – № 12. – С. 35–42.
7. Данилов В.Н. Расчет акустического тракта для прямых преобразователей и отражателя типа плоскодонного отверстия различной формы // Дефектоскопия. – 2009. – № 1. – С. 23–39.
8. Данилов В.Н. К расчету АРД – диаграмм прямых преобразователей для отражателей сферической и цилиндрической форм // Дефектоскопия. – 2009. – № 8. – С. 38–55.
9. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

10. *Петрищев О.Н.* Электромагнитное возбуждение в металлических листах радиально распространяющихся волн Лэмба // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі. – К.: Наукова думка, 2007. С. 259 – 273.
11. *Дидковский В.С., Климов А.Е., Петрищев О.Н., Шаблатович А.Н., Шамарин А.Ю.* Экспресс-метод оценки физико-механических параметров пьезоэлектрических керамик // Электроника и связь. – 2007. – № 6(41). – С. 60–66.
12. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1970. – 904 с.
13. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
14. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
15. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость / Отв. ред. А.Н. Гузь, АН УССР. Ин-тут механіки. – К.: Наукова думка, 1989. – 280 с.

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»

Поступила в редакцию 19 сентября 2008 г.