УДК 681.3.058

О.Б. Хруставка

Экспериментальное исследование модифицированного эволюционного алгоритма

Исследуется влияние различных комбинаций генетических операторов на качество решения оптимизационных задач с помощью гибридного эволюционного алгоритма. Приведены результаты исследования, полученного на множестве тестовых задач, включающем в себя многоэкстремальные и многокритериальные задачи оптимизации.

The influence of different combinations of genetic operators on a quality of solution of optimization problems using a hybrid evolutionary algorithm is analyzed. The results of the research over a set of test problems including multiextremal and multiobjective optimization problems are presented.

Ключевые слова: *эволюционный алгоритм, гибридизация эволюционного алгоритма, задача оптимизации, генетические операторы (отбор, кроссовер, мутация), оптимальная комбинация генетических операторов, фронт Парето, база правил.*

Введение

В работе [1] был представлен аналитический обзор существующих модификаций генетических операторов, разработанных и использованных в ряде эффективных эволюционных алгоритмов за последние полтора десятилетия. В результате исследования различных оптимизационных задач на большом количестве тестовых примеров было доказано, что они требуют применения различных типов генетических операторов, и, следовательно, повышение эффективности любого эволюционного алгоритма при решении задач оптимизации невозможно без тщательного анализа решаемой задачи и подбора соответствующих модификаций генетических операторов под данную задачу. Однако дальнейшие исследования в этой области [2, 3] показали, что на качество решения конкретной оптимизационной задачи влияют не только сами применяемые генетические операторы, но и их комбинации. Под комбинацией генетических операторов понимают процедуру последовательного применения трех основных операторов – отбора, кроссовера и мутации. Были выявлены случаи, когда комбинация генетических операторов, кажущихся оптимальными для решения данной задачи, приводила к получению худшего решения, хотя каждый из них по отдельности был признан наилучшим для данного типа задач. В данной работе этот феномен подвергается детальному изучению на широком наборе тестовых оптимизационных задач. Целью работы является детальное исследование влияния различных комбинаций генетических операторов на качество решения оптимизационных задач (т. е. на качество найденных с помощью эволюционного алгоритма оптимальных решений за заданное число поколений). В основу алгоритма положена гибридная эволюционная архитектура, предложенная в работе [2].

Анализ влияния выбранной комбинации генетических операторов на качество решения задачи

Для работы любого эволюционного алгоритма необходимо сочетание трех основных генетических операторов: отбора, кроссовера и мутации. Выбор методов, реализующих данные генетические операторы, имеет важнейшее значение, так как от этого зависит способность алгоритма решить поставленную задачу. Как уже было отмечено выше, не меньшее значение, чем подбор методов, реализующих генетические операторы, имеет подбор их оптимальной комбинации, максимально увеличивающей эффективность алгоритма.

Для исследования определен набор тестовых задач оптимизации (табл. 1–3), включающий в себя однокритериальные многоэкстремальные задачи без ограничений, двухкритериальные задачи без ограничений и задачи с ограничениями. Эти задачи отобраны как наиболее характерные из более чем 50 тестовых задач, приведенных в статьях, посвященных описанию различных вариантов генетических алгоритмов [4–8], в том числе и в работе [9].

Рассматриваемые генетические операторы реализуется одним из нескольких основных методов, применяемых при решении сложных оптимизационных задач [10, 11]:

– оператор отбора: метод рулетки и турнирный метод отбора (на основе рангового принципа селекции);
– оператор кроссовера: двухточечный и равномерный кроссовер;
– оператор мутации: гауссова и адаптивная мутация (виды управляемой мутации).

В результате получаем восемь комбинаций генетических операторов (табл. 4).

Таблица 1. Однокритериальные тестовые задачи без ограничений

Тестовая задача	Кол-во перем.	Область допустимых значений	Целевая функция *f*(*x*)	Оптимум
Простые однокритериальные задачи				x
TF1	2	[–5, 5]	$f(x)=20+x_1^2+x_2^2-10(\cos 2\pi x_1+\cos 2\pi x_2)$	$x_1=x_2=0$ $f_{\min}=0$
TF2	2	[–3, 3]	$f(x)=2(1-x_1)^2\exp(-x_1^2-(x_2+1)^2)-$ $-7(x_1/3-x_1^3-x_2^2)\exp(-x_1^2-x_2^2)-$ $-0,2\exp(-(x_1+1)^2-x_2^2)$	$x_1=-1,4$ $x_2=0,15$ $f_{\min}=-1,91$
Многоэкстремальные однокритериальные задачи				$f(x)$
F1	30	[–500, 500]	$f(x)=\sum_{i=1}^{n}-x_i\sin\left(\sqrt{\lvert x_i\rvert}\right)$	-12569,500
Rastrigin's function (F2)	30	[–5,12, 5,12]	$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-10\cos(2\pi x_i)+10\right)$	0
Ackley's function (F3)	30	[–32, 32]	$f(x)=-20\exp\left(-0,2\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right)-$ $-\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\cos(2\pi x_i)\right)+20+\exp(1)$	0
Griewank's function (F4)	30	[–600, 600]	$f(x)=\frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\prod_{i=1}^{n}\cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)+1$	0
F7	100	[0, π]	$f(x)=-\sum_{i=1}^{n}\sin(x_i)\sin^{20}\left(\frac{ix_i^2}{\pi}\right)$	-99,278
F9	100	[–5, 5]	$f(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^4-16x_i^2+5x_i\right)$	-78,332
Rosenbrock's function (F10)	30	[–5, 10]	$f(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\left[100\left(x_i^2-x_{i+1}\right)^2+(x_i-1)^2\right]$	0
Sphere function (F11)	30	[–100, 100]	$f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$	0
F13	30	[–100, 100]	$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert+\prod_{i=1}^{n}\lvert x_i\rvert$	0
F14	30	[–100, 100]	$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}x_j\right)^2$	0
F16	2	[–5, 5]	$f(x)=4x_1^2-2,1x_1^4+\frac{1}{3}x_1^6+$ $+x_1x_2-4x_2^2+4x_2^4$	-1,032

Продолжение табл. 1

Тестовая задача	Кол-во перем.	Область допустимых значений	Целевая функция $f(x)$	Оптимум
F17	2	$x_1 \in [-5, 10]$ $x_2 \in [0, 15]$	$f(x) = \left(x_2 - \frac{5{,}1}{4\pi^2}x_1^2 + \frac{5}{\pi}x_1 - 6\right)^2 + 10\left(1 - \frac{1}{8\pi}\right)\cos x_1 + 10$	0,398
F18	2	[–2, 2]	$f(x) = [1 + (x_1 + x_2 + 1)^2(19 - 14x_1 + 3x_1^2 - 14x_2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2)][30 + (2x_1 - 3x_2)^2(18 - 32x_1 + 12x_1^2 + 48x_2 - 36x_1x_2 + 27x_2^2)]$	3
Schwefel’s function (F20)	10	[–500, 500]	$f(x) = 418{,}9829n - \sum_{i=1}^{n} x_i \sin\left(\lvert x_i\rvert^{0{,}5}\right)$	0
Weierstrass function (F21)	10	[–0,5, 0,5]	$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left[a^k \cos\left(2\pi b^k (x_i + 0{,}5)\right)\right]\right) - n\sum_{k=0}^{k_{\max}}\left[a^k \cos\left(\pi b^k\right)\right]$, $a = 0{,}5,\ b = 3,\ k_{\max} = 20$	0

Таблица 2. Двухкритериальные тестовые задачи без ограничений

Тестовая задача	Кол-во перем.	Область допустимых значений	Целевая функция $f(x)$	Оптимум
SCH	1	$[-10^3, 10^3]$	$f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = (x-2)^2$	$x \in [0, 2]$
FON	3	[–4, 4]	$f_1(x) = 1 - \exp\left[-\sum_{i=1}^{3}\left(x_i - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$; $f_2(x) = 1 - \exp\left[-\sum_{i=1}^{3}\left(x_i + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]$	$x_1 = x_2 = x_3$
KUR	3	[–5, 5]	$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\left[-10\exp\left(-0{,}2\sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2}\right)\right]$; $f_2(x) = \sum_{i=1}^{n}\left[\lvert x_i\rvert^{0{,}8} + 5\sin\left(x_i^3\right)\right]$	[4]
POL	2	$[-\pi, \pi]$	$f_1(x) = 1 + (A_1 - B_1)^2 + (A_2 - B_2)^2$; $f_2(x) = (x_1 + 3)^2 + (x_2 + 1)^2$, $A_1 = 0{,}5\sin 1 - 2\cos 1 + \sin 2 - 1{,}5\cos 2$ $A_2 = 1{,}5\sin 1 - \cos 1 + 2\sin 2 - 0{,}5\cos 2$ $B_1 = 0{,}5\sin x_1 - 2\cos x_1 + \sin x_2 - 1{,}5\cos x_2$ $B_2 = 1{,}5\sin x_1 - \cos x_1 + 2\sin x_2 - 0{,}5\cos x_2$	[4]

Продолжение табл. 2

Тестовая задача	Кол-во перем.	Область допустимых значений	Целевая функция $f(x)$	Оптимум
ZDT1	30	[0, 1]	$f_1(x) = x_1;$ $f_2(x) = g(x)\left[1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)}}\right],$ $g(x) = 1 + \frac{9\sum_{i=2}^{n} x_i}{n-1}$	$x_1 \in [0, 1]$ $x_i = 0$ $i = 2,\ldots,n$
ZDT2	30	[0, 1]	$f_1(x) = x_1;$ $f_2(x) = g(x)\left[1 - \left(\frac{x_1}{g(x)}\right)^2\right],\ g(x) = 1 + \frac{9\sum_{i=2}^{n} x_i}{n-1}$	$x_1 \in [0, 1]$ $x_i = 0$ $i = 2,\ldots,n$
ZDT4	10	$x_1 \in [0, 1]$ $x_i \in [-5, 5]$ $i = 2,\ldots,n$	$f_1(x) = x_1;$ $f_2(x) = g(x)\left[1 - \sqrt{\frac{x_1}{g(x)}}\right],$ $g(x) = 1 + 10(n-1) + \sum_{i=2}^{n}\left[x_i^2 - 10\cos(4\pi x_i)\right]$	$x_1 \in [0, 1]$ $x_i = 0$ $i = 2,\ldots,n$
ZDT6	10	[0, 1]	$f_1(x) = 1 - \exp(-4x_1)\sin^6(6\pi x_1);$ $f_2(x) = g(x)\left[1 - \left(\frac{f_1(x)}{g(x)}\right)^2\right],$ $g(x) = 1 + 9\left[\frac{\sum_{i=2}^{n} x_i}{n-1}\right]^{0,25}$	$x_1 \in [0, 1]$ $x_i = 0$ $i = 2,\ldots,n$

Таблица 3. Тестовые задачи с ограничениями

Тестовая задача	Кол-во перем.	Область допустимых значений	Целевая функция $f(x)$	Ограничения	Оптимум
CONSTR	2	$x_1 \in [0{,}1, 1{,}0]$ $x_2 \in [0, 5]$	$f_1(x) = x_1;\ f_2(x) = \frac{1 + x_2}{x_1}$	$9x_1 + x_2 \ge 6;$ $9x_1 - x_2 \ge 1$	[4]
CF1	2	$x_1 \in [0, 2]$ $x_2 \in [0, 3]$	$f(x) = 8x_1^2 + 2x_2^2$	$x_1x_2 \ge 1;$ $x_1^2 + x_2^2 \le 9$	$x_1 = 0{,}5$ $x_2 = 2$ $f_{\min} = 8$
CF2	2	$x_1, x_2 \in [-3, 3]$	$f(x) = 2x_1 + 3x_2 +$ $+4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$	$x_1 - x_2 \ge 0;$ $x_1 + x_2 \le 4$	$x_1 = 0{,}167$ $x_2 = -1{,}667$ $f_{\min} = -2{,}333$
CF3	2	$x_1, x_2 \in [0, 10]$	$f(x) = 4(x_1 - 6)^2 +$ $+6(x_2 - 2)^2$	$0{,}5x_1 + x_2 \le 4;$ $3x_1 + x_2 \le 15;$ $x_1 + x_2 \ge 1$	$x_1 = 6$ $x_2 = 2$ $f_{\min} = 0$

Таблица 4. Исследуемые комбинации генетических операторов

Номер комбинации	Состав комбинации генетических операторов		
	Оператор отбора	Оператор кроссовера	Оператор мутации
I	метод рулетки	двухтотечный кроссовер	гауссова мутация
II	метод рулетки	двухтотечный кроссовер	адаптивная мутация
III	метод рулетки	равномерный кроссовер	гауссова мутация
IV	метод рулетки	равномерный кроссовер	адаптивная мутация
V	турнирный отбор	двухтотечный кроссовер	гауссова мутация
VI	турнирный отбор	двухтотечный кроссовер	адаптивная мутация
VII	турнирный отбор	равномерный кроссовер	гауссова мутация
VIII	турнирный отбор	равномерный кроссовер	адаптивная мутация

Целью исследования является определение наилучшей комбинации генетических операторов для каждой группы тестовых задач. Под наилучшей комбинацией понимают такое сочетание генетических операторов, которое приводит к нахождению наилучшего решения. Как было отмечено выше, наилучшей комбинацией не обязательно будет такая комбинация, которая состоит из наилучших (для данной задачи) генетических операторов. Но для начала рассмотрим влияние отдельных генетических операторов на ход решения задачи.

Отбор по методу рулетки в случае одноэкстремальных задач с небольшим количеством переменных приводит к быстрой сходимости алгоритма за счет поддержки особей с высоким значением функции приспособленности, но на более сложных задачах приводит к вырождению и преждевременной сходимости. По этой причине данный оператор отбора практически никогда не применяется при решении многокритериальных оптимизационных задач. Турнирный отбор является более сложным (с точки зрения вычислительной сложности) методом, что в случае решения простых задач дает большее время сходимости по сравнению с отбором по методу рулетки, но при решении сложных многоэкстремальных или многокритериальных задач он является наиболее подходящим методом.

Оператор кроссовера сам по себе практически не влияет на форму кривой сходимости, но, будучи применен с теми или иными методами мутации и отбора, способен компенсировать или, наоборот, подчеркивать недостатки этих методов.

Гауссова (равномерная) мутация всегда дает гораздо большее разнообразие решений, чем адаптивная, но, тем самым, замедляет скорость сходимости алгоритма. Адаптивная мутация на простых задачах приводит к очень быстрой сходимости (20–30 поколений), но в случае более сложных задач может привести к вырождению популяции, и тем самым – к преждевременной сходимости, в результате чего глобальных оптимум не будет найден.

Следует отметить одну важную особенность рассматриваемых комбинаций генетических операторов. Исследуемые генетические операторы, входящие в состав каждой из восьми комбинаций, являются наиболее типичными и широко применяемыми. Однако во многих работах, посвященных модификациям генетических алгоритмов [5–7, 11–13], эти операторы были также модифицированы, чтобы наилучшим образом соответствовать целям и задачам конкретного алгоритма. При этом суть оператора, и, следовательно, его свойства, остаются неизменными. Это означает, что внутри комбинации любой генетический оператор может быть заменен какой-либо из своих модификаций, и это не повлияет на эффективность комбинации в целом. Таким образом, данное исследование на самом деле охватывает более широкий спектр различных сочетаний генетических операторов, чем восемь базовых комбинаций. Возможность замены генетического оператора в классической форме любой его модификацией может объясняться с помощью принципа максимума взаимной информации [14] между генетическими операторами внутри комбинации, что представляет собой предмет дальнейших исследований.

Для однокритериальных задач будем исследовать все восемь комбинаций генетических операторов, а для двухкритериальных задач – только четыре комбинации (V–VIII), поскольку для многокритериальных задач оптимизации отбор по методу рулетки не используется. Для всех тестовых задач, кроме TF1 и TF2, гауссова мутация заменяется на равномерную мутацию (подвид гауссовой мутации, которая определена на области допустимых значений тестовой функции), чтобы исключить нахождение недопустимых решений.

Данное исследование проводится с помощью эволюционного алгоритма, предложенного в работе [2], в среде MATLAB 7.7. Параметры алгоритма следующие:

- размер популяции 100, популяция разбита на две подпопуляции по 50 особей каждая, между ними осуществляется двусторонняя миграция;
- вероятность кроссовера равна 0,8, вероятность мутации – 0,01;
- критерий останова алгоритма – 2000 поколений;
- алгоритм является гибридным, гибридизация осуществляется с помощью метода градиентного спуска;
- в фронт Парето (в двухкритериальных задачах) включаются все найденные недоминируемые решения;
- экспериментальные результаты по каждой комбинации генетических операторов представляют собой усредненное значение по 20 независимым запускам алгоритма.

Характеристики тестовых задач

Тестовые задачи TF1 и TF2 являются простыми однокритериальными задачами оптимизации и характеризуются наличием единственного глобального минимума.

Тестовые задачи F1–F14 представляют собой задачи большой размерности (т. е. содержат большое количество переменных). Тестовые задачи F1–F9 являются многоэкстремальными задачами, причем количество локальных минимумов экспоненциально возрастает в зависимости от размерности задачи, например, задача F7 имеет $n!$ локальных минимумов, а задача F9 – 2^n локальных минимумов, где n – количество переменных. Тестовая задача F2 представляет собой сложную многоэкстремальную функцию с большим количеством локальных минимумов, при решении которой главной задачей алгоритма является обеспечение разнообразия решений в каждой популяции. Тестовая задача F3 содержит узкую область, в которой находится глобальный оптимум, и много локальных минимумов. В тестовой задаче F4 наблюдается взаимосвязь между переменными, что затрудняет процесс приближения к глобальному оптимуму. Тестовые задачи F10 и F11 являются унимодальными. Тестовые задачи F16–F18 представляют собой задачи малой размерности (т. е. содержат малое количество переменных) и имеют несколько локальных минимумов. Главной трудностью тестовой задачи F20 является наличие множества глубоких локальных минимумов, расположенных далеко от глобального оптимума в пространстве поиска. Тестовая задача F21 содержит непрерывную область определения, но является дифференцируемой лишь на небольшой подобласти области определения.

Тестовые задачи CF1–CF3 представляют собой однокритериальные тестовые задачи с ограничениями. Задача CF2 имеет единственный глобальный минимум в допустимой области, задача CF3 – единственный глобальный и несколько локальных минимумов. Тестовая задача CF1 содержит нелинейные ограничения.

Тестовая задача SCH имеет выпуклый равномерный фронт Парето, а задача FON – невыпуклый фронт Парето. В тестовой задаче KUR имеется три дискретные области в оптимальном фронте Парето. Тестовая задача POL имеет разрывный фронт Парето.

Тестовая задача ZDT1 имеет выпуклый неразрывный оптимальный фронт Парето, а тестовая задача ZDT2 – невыпуклый неразрывный оптимальный фронт Парето. В тестовых задачах ZDT1, ZDT2 первая целевая функция всегда является функцией одной переменной: $f_1(x) = x_1$. Это означает, что если гены, кодирующие переменную x_1, представляют собой равномерно распределенные случайные числа, то уже начальное приближение фронта Парето распространяется по всей области определения первой целевой функции $f_1(x)$. Следовательно, оптимизация будет заключаться только в минимизации второй целевой функции $f_2(x)$, что значительно легче, чем минимизировать обе целевые функции одновременно. Тестовая задача ZDT4 представляет собой более сложный вариант: она имеет 21^9 различных локальных оптимальных фронта Парето в пространстве поиска, из которых только один является глобальным. Тестовая задача ZDT6 является наиболее трудной для решения с помощью эволюционных алгоритмов и часто требует предварительного специального подбора параметров. Хотя в фронте Парето задачи ZDT6 нет разрывов, актуальна проблема недостаточного разнообразия решений в результирующей популяции, что может привести к преждевременной сходимости.

В тестовой задаче CONSTR часть неограниченной оптимальной области Парето является недопустимой. Первое линейное ограничение отрезает некоторую подобласть оптимальной области Парето, в результате чего первая часть фронта Парето располагается вдоль первого ограничения в пространстве целей, а вторая лежит на части истинного фронта Парето.

Экспериментальные результаты

Однокритериальные задачи

Для однокритериальных тестовых задач критерием эффективности алгоритма является точность найденного значения целевой функции $f(x)$.

Тестовые задачи TF1 и TF2 являются самыми простыми из всего набора тестовых задач, поэтому критерий останова алгоритма снижен до 500 поколений. Данные тестовые задачи эффективно решаются с помощью любой из рассматриваемых комбинаций генетических операторов, однако легко заметить, что комбинации, содержащие адаптивную мутацию, приводят к наиболее быстрой сходимости алгоритма (20–30 поколений), тогда как комбинации, содержащие гауссову мутацию – к медленной сходимости (около 500 поколений) из-за огромного разнообразия решений, порождаемого этим типом мутации. Также влияние на скорость сходимости оказывает оператор отбора – в данном случае отбор по методу рулетки является более эффективным, чем турнирный отбор. Равномерный кроссовер в сочетании с адаптивной мутацией (комбинации IV и VIII) наиболее эффективен, даже при турнирном отборе.

Тестовые задачи F1–F4, F7, F9 содержат огромное количество локальных минимумов и один глобальный минимум, найти который можно только алгоритмом с комбинацией, содержащей равномерную мутацию, поскольку адаптивная мутация приводит к очень быстрому вырождению и, как следствие, преждевременной сходимости, когда алгоритм застревает в одном из множества локальных минимумов. При этом сочетание равномерной мутации и равномерного кроссовера (комбинация III) является наиболее эффективным при отборе по методу рулетки. При этом для всех задач группы комбинация II (двухточечный кроссовер + равномерная мутация) также неизменно приводит к застреванию в локальном оптимуме. Тестовая задача F4 является наиболее сложной, поскольку содержит параметрическую взаимосвязь генов (проблема эпистазиса), вследствие чего наилучшей комбинацией, наряду с комбинацией III, становится комбинация II (двухточечный кроссовер + адаптивная мутация).

Функция Розенброка (F10) является наиболее сложной для оптимизации во всем рассматриваемом наборе тестовых задач, она содержит сразу две особенности – эпистазис генов и зависимость количества локальных оптимумов от размерности задачи, в результате чего уже при 30 переменных поиск глобального оптимума становится крайне трудной задачей, решить которую может только гибридный алгоритм. Как и для тестовой задачи F4, эпистазис приводит к преимуществу комбинации II.

Тестовые задачи F11, F13, F14 обладают только одной негативной чертой – зависимостью количества локальных оптимумов от размерности задачи, и их особенности сходимости практически аналогичны тестовым задачам группы F1 – F9, но при 30 переменных к наилучшей комбинации III приближаются комбинации II, VI (двухточечный кроссовер + адаптивная мутация), причем в задаче F14 комбинация II становится лидирующей.

Особенностью задач F16, F17 является наличие двух глобальных минимумов, причем предложенный алгоритм при разных запусках способен найти различные минимумы. Поскольку число переменных равно 2, то для обеих рассматриваемых задач наилучшими являются комбинации, содержащие адаптивную мутацию (как для задач TF1, TF2), которая приводит к очень быстрой сходимости алгоритма к одному из двух глобальных минимумов, но в данном случае метод отбора на результат не влияет.

Тестовая задача F18, несмотря на сложное аналитическое выражение, является упрощенным вариантом задач F16, F17, т. е. обладает единственным оптимумом и теми же особенностями, что и указанные тестовые задачи.

Тестовая задача F20 обладает множеством локальных минимумов, которые к тому же находятся далеко от глобального оптимума в пространстве поиска. Основной задачей здесь является обеспечение разнообразия решений, но при этом алгоритм должен успеть сойтись за 2000 поколений, поэтому комбинация III (равномерный кроссовер + равномерная мутация при отборе по методу рулетки) является наилучшей.

Тестовая задача F21 обладает вычислительной проблемой – она является дифференцируемой только в узкой области экстремума, а это означает, что основная вычислительная нагрузка ложится на генетическую часть алгоритма. По своим особенностям данная задача похожа на задачи группы F1–F9, при этом наилучшей является комбинация III.

Тестовые задачи CF1, CF2 имеют единственный глобальный минимум в допустимой области, поэтому наилучшей комбинацией будет комбинация III. Тестовая задача CF3 имеет также локальные минимумы в области допустимых решений, наилучшими комбинациями являются комбинации III, V.

Результаты исследования некоторых однокритериальных тестовых задач приведены в табл. 5. Здесь указаны численные значения целевой функции (ЦФ) для наилучшей комбинации генетических операторов. Эти данные будут использоваться для построения базы правил выбора наилучшей комбинации генетических операторов для эволюционного алгоритма.

Таблица 5. Результаты исследования некоторых однокритериальных тестовых задач

Тестовая задача	TF1	F1	F2	F3	F4	F7	F10	F13
Лучшие комбинации	IV	III	III	III	II	III	II	II, III, IV
Значение ЦФ (наилучшая комбинация)	0	-12569,49	$1{,}31 \cdot 10^{-8}$	$5{,}74 \cdot 10^{-6}$	$7{,}90 \cdot 10^{-10}$	-97,998	$4{,}75 \cdot 10^{-8}$	$2{,}42 \cdot 10^{-5}$
Тестовая задача	F14	F16	F17	F18	F20	F21	CF2	CF3
Лучшие комбинации	II, III, IV	IV, VIII	IV, VIII	IV	III	III	III	III, V
Значение ЦФ (наилучшая комбинация)	$1{,}76 \cdot 10^{-7}$	-1,032	0,398	3	$1{,}27 \cdot 10^{-4}$	$7{,}09 \cdot 10^{-6}$	-2,333	0

Двухкритериальные задачи

При решении многокритериальных задач целью является построение фронта Парето; следовательно, основной проблемой является обеспечение разнообразия решений. С этой целью отбор по методу рулетки не применяется, так как он в любом случае приводит к уменьшению разнообразия в популяции. Таким образом рассматриваются только четыре комбинации генетических операторов (V–VIII). Вводится специальный критерий эффективности – критерий Δ, который характеризует разброс решений, полученных с помощью алгоритма [4]. Неравномерность распределения решений в фронте Парето вычисляется по формуле:

$$\Delta = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{N-1} \left| d_i - \bar{d} \right|}{d_f + d_l + (N-1)\bar{d}},$$

где d_f, d_l – Эвклидовы расстояния между экстремальными решениями найденного фронта и истинного фронта Парето; d_i – расстояние между соседними решениями в фронте Парето; $\bar{d}$ – среднее значение между всеми расстояниями d_i, i = 1, 2,…, N-1; N – количество недоминируемых решений в фронте Парето.

В идеальном случае все значения расстояний d_i равны среднему значению $\bar{d}$, при этом $d_f = d_l = 0$, это соответствует наиболее широкому равномерному разбросу недоминируемых решений в фронте Парето. Во всех остальных случаях значение критерия Δ будет больше нуля. Максимальное значение критерия Δ может быть больше единицы, если существует большой разброс значений d_i.

Как следует из экспериментально полученных результатов, комбинация V (двухточечный кроссовер + равномерная мутация) имеет очень большое значение критерия Δ в случае решения наиболее простых задач, к которым относится тестовая задача SCH. При решении более сложных задач (ZDT1–ZDT6), комбинация V позволяет получить наиболее равномерный фронт Парето, но найденный фронт может не лежать близко к истинному фронту Парето.

Комбинация VI (двухточечный кроссовер + адаптивная мутация) может привести к неравномерности фронта Парето при решении сложных задач с относительно большим числом переменных (ZDT6), но найденный фронт лежит наиболее близко к истинному фронту Парето.

Комбинации VII, VIII (равномерный кроссовер) в случае решения сложных задач приводят к нахождению крайних точек фронта, которые лежат далеко от истинного фронта Парето, что отражается в значительном увеличении критерия Δ, но при этом сам фронт является наиболее равномерным и близким к истинному фронту Парето, по сравнению с комбинациями V и VI.

Комбинации V, VII, содержащие равномерную мутацию, не могут применяться для решения задач с линейными или нелинейными ограничениями, поскольку могут находить недопустимые решения.

Таким образом, для тестовой задачи SCH наилучшей является комбинация VI; для тестовых задач KUR, FON – комбинация VII; для тестовой задачи ZDT1 наилучшими являются комбинации V, VI; для более сложных тестовых задач POL, ZDT2 и ZDT4 наилучшей является комбинация V; для наиболее сложной тестовой задачи ZDT6 – комбинация VII. Для тестовой задачи CONSTR наилучшей является комбинация VIII.

Результаты исследования некоторых двухкритериальных тестовых задач приведены в табл. 6.

Таблица 6. Результаты исследования некоторых двухкритериальных тестовых задач

Тестовая задача	SCH	FON	KUR	POL	ZDT1	ZDT2	ZDT4	ZDT6	CONSTR
Лучшие комбинации	VI	VII	VII	V	V, VI	V	V	VII	VIII
Значение Δ (наилучшая комбинация)	0,1676	0,1234	0,1911	0,2667	0,0910	0,1248	0,2063	0,2063	0,1762

Здесь указаны численные значения критерия Δ для наилучшей комбинации генетических операторов.

Выводы

В результате проведенных исследований можно сделать следующий вывод: для любого класса тестовых оптимизационных задач существует комбинация (комбинации) генетических операторов, которая является наилучшей для любой задачи, принадлежащей этому классу. Каждый класс задач характеризуется определенным набором свойств (параметров). Следовательно, можно поставить в соответствие некоторому набору характеристик тестовых задач наилучшую комбинацию генетических операторов. В результате получаем базу правил, с помощью которой для каждой оптимизационной задачи, обладающей определенными свойствами, можно найти наилучшую (наиболее эффективную) комбинацию генетических операторов. В данном случае, каждый компонент базы правил характеризуется следующими параметрами: размерность задачи, область определения, наличие эпистазиса, количество и тип экстремумов, наличие линейных и нелинейных ограничений, для многокритериальных задач – вид фронта Парето. Следует отметить, что построенная база правил не является полной, но охватывает все рассмотренные классы типовых тестовых задач.

Правила выбора комбинации генетических операторов для однокритериальных тестовых задач:

Если количество переменных задачи невелико *и* область определения $[-5, 5]$ *и* параметрическая взаимосвязь генов отсутствует *и* существует единственный экстремум, который является глобальным оптимумом, *то* наилучшей комбинацией является комбинация IV.

Если количество переменных задачи невелико *и* область определения $[-5, 15]$ *и* параметрическая взаимосвязь генов отсутствует *и* существует несколько экстремумов, каждый из которых является глобальным оптимумом, *то* наилучшими комбинациями являются комбинации IV, VIII.

Если количество переменных задачи велико и область определения $[-100, 100]$ *и* параметрическая взаимосвязь генов отсутствует *и* существует единственный глобальный оптимум, *то* наилучшими комбинациями являются комбинации II, III, IV.

Если количество переменных задачи велико *и* область определения $[-600, 600]$ *и* задача содержит параметрическую взаимосвязь генов (проблема эпистазиса) *и* существует один или множество оптимумов, *то* наилучшей комбинацией является комбинация II.

Если количество переменных задачи велико *и* область определения $[-500, 500] \cup [0, \pi]$ *и* параметрическая взаимосвязь генов отсутствует *и* существует глобальный оптимум и множество локальных оптимумов, *то* наилучшей комбинацией является комбинация III.

Если количество переменных задачи невелико *и* область определения $[-3, 3]$ *и* параметрическая взаимосвязь генов отсутствует *и* существует единственный оптимум, который является глобальным, *и* задача содержит линейные или нелинейные ограничения, *то* наилучшей комбинацией является комбинация III.

Если количество переменных задачи невелико *и* область определения $[0, 10]$ *и* параметрическая взаимосвязь генов отсутствует *и* существует глобальный оптимум и несколько глубоких локальных оптимумов *и* задача содержит линейные или нелинейные ограничения, *то* наилучшими комбинациями являются комбинации III, V.

Правила выбора комбинации генетических операторов для многокритериальных тестовых задач:

Если количество переменных задачи невелико *и* фронт Парето выпуклый неразрывный *и* параметрическая взаимосвязь генов отсутствует, *то* наилучшей является комбинация VI.

Если количество переменных задачи невелико *и* фронт Парето невыпуклый неразрывный или состоит из нескольких частей *и* параметрическая

ческая взаимосвязь генов отсутствует, *то* наилучшей является комбинация VII.

Если количество переменных задачи невелико *и* фронт Парето невыпуклый разрывный *и* параметрическая взаимосвязь генов отсутствует, *то* наилучшей является комбинация V.

Если количество переменных задачи велико *и* фронт Парето невыпуклый неразрывный *и* параметрическая взаимосвязь генов присутствует, *то* наилучшей является комбинация V.

Если количество переменных задачи невелико *и* фронт Парето выпуклый или невыпуклый неразрывный *и* имеются линейные или нелинейные ограничения, *то* наилучшей является комбинация VIII.

Литература

1. *Калниболотский Ю.М.*, Хруставка О.Б., Карев А.В. Модификации генетических операторов в эволюционных алгоритмах // Электроника и связь. – 2007. – № 3(38). – С. 69–81.
2. *Калниболотский Ю.М.*, Хруставка О.Б. Модификации генетических алгоритмов // Электроника и связь. – 2008. – № 5(46). – С. 54–61.
3. *Хруставка О.Б.* База правил выбора комбинации генетических операторов для гибридного эволюционного алгоритма // Международная научная конференция «Интеллектуальный анализ информации ИАИ-2009» (19–22 мая 2009 г.): сборник трудов. – Киев, «Просвіта», 2009. – С. 401–408.
4. *Deb K.*, Pratar A., Agarwal S., Meyarivan T. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II // Evolutionary Computation. – 2002. – Vol.6, № 2. – P. 182–197.
5. *Wang Y.*, Dang C. An Evolutionary Algorithm for Global Optimization Based on Level-Set Evolution and Latin Squares // Evolutionary Computation. – 2007. – Vol.11, № 5. – P. 579–595.
6. *Brest J.*, Greiner B., Boskovic B., Mernic M., Zumer V. Self-Adapting Control Parameters in Differential Evolution: A Comparative Study on Numerical Benchmark Problems // Evolutionary Computation. – 2006. – Vol.10, № 6. – P. 646–657.
7. *Francesco di Pierro*, Khu S.-T., Dragan A. An Investigation on Preference Order Ranking Scheme for Multiobjective Evolutionary Optimization // Evolutionary Computation. – 2007. – Vol.11, № 1. – P.17–45.
8. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 506 с.
9. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 536 с.
10. *Рутковская Д.*, Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. – М.: Горячая линия – Телеком, 2004. – 452 с.
11. *Kazarlis S.A.*, Papadakis S.E., Theocharis J.B., Petridis V. Microgenetic Algorithms as Generalized Hill-Climbing Operators for GA Optimization // Evolutionary Computation. – 2001. – Vol.5, № 3. – P. 205–230.
12. *Ishibuchi H.*, Yoshida T., Murata T. Balance Between Genetic Search and Local Search in Memetic Algorithms for Multiobjective Permutation Flowshop Scheduling // Evolutionary Computation. – 2003. – Vol.7, № 2. – P. 204–223.
13. *Tomioka S.*, Nisiyama S., Enoto T. Nonlinear Least Square Regression by Adaptive Domain Method With Multiple Genetic Algorithms // Evolutionary Computation. – 2007. – Vol.11, № 1. – P. 1–16.
14. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс / Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»

Поступила в редакцию 20 марта 2009 г.