Гипотезы

УДК 548, 510

А.В. Борисов, канд. техн. наук, Л.Н. Королевич

Альтернативный метод решения квадратных уравнений

Рассмотрен альтернативный метод решения алгебраических квадратных уравнений. Указана применимость данного и классического методов к решению задач на сравнение между собой двух и более парабол. Установлена фундаментальная связь между алгебраическими и трансцендентными функциями. Решена задача о сравнении относительных параметров плоских сеток на границе раздела двух веществ. Также приведены новые соотношения между некоторыми обратными тригонометрическими функциями и соотношения связующие их с функцией квадратного корня.

In paper represented a new (alternate) method of solve algebraic quadratic equations or, by other words, a new method of compare two or more plane grids in interface between two crystals. Also entered and resolved a few mathematical problems with its main goal: compare two or more parabolas. A mathematical fundamental relation between algebraic and transcendental functions is obtained. Some new relations between some inverse trigonometric functions is obtained. Some new relations between some inverse trigonometric functions and function of square root are obtained too.

Ключевые слова: *алгебраические квадратные уравнения, парабола, сравнение двух плоских сеток.*

Введение

Проектирование и изготовление МДП-приборов тесно связано с физическими явлениями протекающими на границе раздела двух веществ: диэлектрик–полупроводник. Одним из основных физических показателей, влияющим на большинство эксплуатационных параметров МДП-прибора, служит качество границы раздела диэлектрик–полупроводник, которое, в первую очередь, влияет на величину поверхностного потенциала [1]. Последний напрямую зависит от заряда поверхностных состояний, который, в свою очередь, пропорционален плотности поверхностных состояний (N_{SS}). Величина N_{SS} пропорциональна разности параметров кристаллических решеток диэлектрика и полупроводника на границе их раздела. Последнее обстоятельство возможно лишь в том случае, когда кристаллические решетки диэлектрика и полупроводника относятся к одному и тому же кристаллографическому классу симметрии. Случай различной симметрии требует не только сравнения площадей плоских сеток на границе раздела диэлектрик–полупроводник, но и сравнения относительных параметров этих сеток, т. е. аффинных величин. Иначе говоря, последнее обстоятельство требует определения не абсолютных значений параметров, а относительных. Отметим тот факт, что основное уравнение, определяющее кристаллографические параметры плоской сетки поверхности вещества, в конечном итоге, приводится к квадратному уравнению. Существующий метод решения квадратных уравнений не позволяет находить относительные параметры плоской сетки без предварительного вычисления корней уравнения, что значительно затрудняет анализ в случае, когда традиционно считающиеся постоянными коэффициенты b и c являются функциями некоторых внешних факторов. Предлагаемый метод решения квадратных уравнений позволяет обойти указанную трудность.

Предварительные замечания

Как известно, каноническая форма представления квадратного уравнения описывается двумя формами:

– первая:

$$Ax^2 + Bx + C = 0\,, \qquad (1)$$

– и вторая (получается из первой после деления на A):

$$x^2 + bx + c = 0\,, \qquad (2)$$

где $b = \dfrac{B}{A}$; $c = \dfrac{C}{A}$.

Как правило, во всех учебниках и справочниках, приводятся лишь два метода решения уравнений данного типа, а именно:

– первый состоит в разложении левой части на множители (всегда с примечанием «*если удастся*») [2];
– второй – в применении классической формулы (основан на нахождении, так называемого, дискриминанта).

Перед тем как перейти к рассмотрению альтернативного метода решения квадратных уравнений введём ряд обозначений и докажем необходимые леммы о прямоугольном треугольнике.

Обозначения

a_{tr}, b_{tr} – длины катетов прямоугольного треугольника (далее просто катеты);

c_{tr} – длина гипотенузы прямоугольного треугольника (далее просто гипотенуза);

α_{tr}, β_{tr} – острые углы против катетов a_{tr} и b_{tr} соответственно;

φ_{tr} – один из острых углов прямоугольного треугольника (α_{tr} или β_{tr});

m_{tr} – длина медианы, опущенной на гипотенузу (далее просто медиана);

h_{tr} – длина высоты, опущенной на гипотенузу (далее просто высота);

θ_{tr} – угол между медианой и высотой;

χ_{tr} – угол между медианой и гипотенузой.

Вспомогательные леммы

Лемма 1. Длина медианы прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы:

$$m_{tr} = \frac{c_{tr}}{2}. \quad (3)$$

Доказательство. Поскольку любой прямоугольный треугольник может быть дополнен до прямоугольника со сторонами a_{tr}, b_{tr} и диагоналями c_{tr}, то из того, что диагонали прямоугольника пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, сразу следует утверждение (3), *что и требовалось доказать*.

Лемма 2. Любой непрямой угол прямоугольного треугольника является либо полусуммой, либо полуразностью прямого угла (т. е. углом в $\pi/2$ радиан) и угла, образованного его высотой и медианой:

$$\alpha_{tr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{tr}\right), \quad (4)$$

$$\beta_{tr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{tr}\right). \quad (5)$$

Выражения (4) и (5) можно объединить в одно:

$$\varphi_{tr,\,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta_{tr}\right) \ (i = 1, 2). \quad (6)$$

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник с острым углом при стороне α_{tr}, т. е. угол β_{tr} – острый, а угол α_{tr}, соответственно – тупой. Тогда при рассмотрении треугольника составленного из медианы, катета b_{tr} и половины гипотенузы, сразу следует, что в силу утверждения (3), данный треугольник – равнобедренный и, следовательно, угол между медианой и гипотенузой исходного треугольника будет равен:

$$\chi_{tr} = \pi - 2\alpha_{tr}. \quad (7)$$

Очевидно, что угол χ_{tr} является одним из углов прямоугольного треугольника, построенного на высоте и медиане исходного прямоугольного треугольника, т. е.

$$\chi_{tr} + \frac{\pi}{2} + \theta_{tr} = \pi. \quad (8)$$

Подставляя выражение (7) в формулу (8), получим уравнение

$$\theta_{tr} = 2\alpha_{tr} - \frac{\pi}{2}, \quad (9)$$

решая которое найдем:

$$\alpha_{tr} = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_{tr}}{2}. \quad (10)$$

Выражая угол α_{tr} через угол β_{tr}, получим

$$\frac{\pi}{2} - \beta_{tr} = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_{tr}}{2}. \quad (11)$$

Выразим из уравнения (11) угол β_{tr}:

$$\beta_{tr} = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta_{tr}}{2}. \quad (12)$$

Очевидно, что выражения (10) и (12) тождественны соответственным исходным выражениям (4) и (5), *что и требовалось доказать*.

Альтернативный метод решения квадратных уравнений

Рассмотрим новый метод решения квадратных уравнений, который применим к квадратным уравнениям во второй канонической форме (2). Для этого необходимо:

1. определить величину угла θ (соответствует углу θ_{tr}), как

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{\frac{b^2}{2c} - 1}\right); \quad (13)$$

2. определить величину угла φ (соответствует углу φ_{tr}), как

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}; \quad (14)$$

или как

$$\varphi=\varphi_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}; \qquad (15)$$

3. определить первый корень:

$$x_1=\frac{-b}{1+\mathrm{tg}\varphi}; \qquad (16)$$

4. определить второй корень:

$$x_2=\frac{c}{x_1} \text{ или } x_2=-b-x_1. \qquad (17)$$

Прямое доказательство

Решим геометрическую задачу: определить длины катетов прямоугольного треугольника, если известна величина их суммы (l_{tr}) и площадь треугольника (s_{tr}), т. е.

$$a_{tr}+b_{tr}=l_{tr}, \qquad (18)$$

$$a_{tr}b_{tr}/2=s_{tr}. \qquad (19)$$

Исходные данные (18) позволяют сразу записать, что

$$a_{tr}\left(1+\frac{b_{tr}}{a_{tr}}\right)=a_{tr}\left(1+\mathrm{tg}\varphi_{tr}\right). \qquad (20)$$

Комбинируя выражения (18) и (20), получим длину первого катета:

$$a_{tr}=\frac{l_{tr}}{1+\mathrm{tg}\varphi_{tr}}, \qquad (21)$$

тогда длина второго катета определяется из выражения (19):

$$b=\frac{2s_{tr}}{a_{tr}}. \qquad (22)$$

Величина угла φ_{tr} определяется выражением (6), т. е. углом θ_{tr}. Косинус же угла θ_{tr} определяется соотношением

$$\cos\theta_{tr}=\frac{h_{tr}}{m_{tr}}. \qquad (23)$$

Учитывая, что $s_{tr}=1/2h_{tr}c_{tr}$, запишем выражение (23) в виде

$$\cos\theta_{tr}=\frac{2s_{tr}}{c_{tr}m_{tr}}, \qquad (24)$$

и, наконец, используя свойство (3) получим, что

$$\cos\theta_{tr}=\frac{4s_{tr}}{c_{tr}^2}. \qquad (25)$$

Длину гипотенузы определим из уравнения (18) путем возведения его в квадрат:

$$\begin{aligned} l_{tr}^2&=\left(a_{tr}+b_{tr}\right)^2= \\ &=a_{tr}^2+b_{tr}^2+2a_{tr}b_{tr}=c_{tr}^2+2a_{tr}b_{tr}. \end{aligned} \qquad (26)$$

Преобразуем выражение (26) с учетом равенства (19):

$$l_{tr}^2=c_{tr}^2+4s_{tr}. \qquad (27)$$

Выделив в выражении (27) длину гипотенузы и подставив ее в формулу (25), получим

$$\cos\theta_{tr}=\frac{4s_{tr}^{-1}}{\left(l_{tr}^2-4s_{tr}\right)}=\frac{1}{\frac{\left(\frac{l_{tr}}{2}\right)^2}{s_{tr}}-1}. \qquad (28)$$

Задача решена.

Рассмотрим выражения (18) и (19) с алгебраической точки зрения, для чего перепишем выражение (19) в виде:

$$a_{tr}b_{tr}=2s_{tr}. \qquad (29)$$

Видно, что система уравнений (18) и (19) определяет свойства корней квадратного уравнения, которое в используемых обозначениях имеет следующий вид:

$$x^2-l_{tr}x+2s_{tr}=0, \qquad (30)$$

и, следовательно, разработанный метод применим к решению алгебраических квадратных уравнений, что и требовалось доказать.

Пример

Рассмотрим решение уравнения $x^2-10x+24=0$. Так применение классического метода $\left(x_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\right)$ приводит к таким корням:

$$x_1=-\frac{-10}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2-4\cdot 24}=5+1=6,$$

$$x_2=-\frac{-10}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(-10)^2-4\cdot 24}=5-1=4.$$

Для сравнения приведем решение того же уравнения по разработанному методу. Промежуточные величины определятся по формулам:

$$\theta=\arccos\left(\frac{1}{\frac{b^2}{2c}-1}\right)=\arccos\left(\frac{1}{\left(\frac{(-10)^2}{2\cdot 24}-1\right)}\right)=$$

$$=\arccos(0{,}9230769231...)\approx 0{,}39479112,$$

$$\varphi_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\approx\frac{3{,}14159265}{4}+\frac{0{,}39473112}{2}\approx 0{,}98279372,$$

$$\varphi_2=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\approx\frac{3{,}14159265}{4}-\frac{0{,}39473112}{2}\approx 0{,}58800260.$$

Тогда, корни x_1, x_2, вычисленные по значениям φ_1 и φ_2, соответственно равны:

$$x_1\Big|_{\varphi_1} = \frac{-b}{1+\mathrm{tg}\varphi_1} = \frac{-(-10)}{1+\mathrm{tg}(0{,}98279372)} = \frac{10}{2{,}5} = 4,$$

$$x_2\Big|_{\varphi_2} = \frac{-b}{1+\mathrm{tg}\varphi_2} = \frac{-(-10)}{1+\mathrm{tg}(0{,}58800260)} = \frac{10}{1{,}66666666} = 6.$$

Приведем, для сравнения, значения корней x_1, x_2, вычисленных по значениям φ_2 и φ_1 соответственно:

$$x_1\Big|_{\varphi_2} = x_2\Big|_{\varphi_2} = 6\,,$$

$$x_2\Big|_{\varphi_1} = x_1\Big|_{\varphi_1} = 4\,.$$

Таким образом, результаты решения приведенного уравнения как классическим, так и разработанным методом совпадают.

Обратное доказательство

Выполняя последовательные подстановки выражений по очередности (13)→(14 или 15)→(16)→(17), непосредственно получаем обобщённую формулу нахождения корней квадратного уравнения второй канонической формы:

$$x_{1,2} = \frac{-b}{1+\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\frac{b^2}{2c}-1}\right)\right)}. \qquad (31)$$

Очевидно, что формулу (31) можно видоизменить путём тригонометрических преобразований, что приводит к *генерации новых методов и алгоритмов решения квадратных уравнений*(!). Следует отметить одно значимое преобразование формулы (31), а именно:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{b}{2}\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\frac{b^2}{2c}-1}\right)\right). \qquad (32)$$

Очевидно, что выражение (32) по своей структуре очень похоже на классическую формулу решения квадратных уравнений, т. е. на формулу $x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}$. Следовательно, чтобы доказать справедливость разработанного метода необходимо доказать, что:

$$App = \frac{b}{2}\mathrm{tg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\frac{b^2}{2c}-1}\right)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\,, \qquad (33)$$

где App – сокращённое обозначение (от *лат.* approbatio – доказательство) средней части выражения (26).

Применяя простые тригонометрические преобразования к средней части выражения (33), получим:

$$App = \frac{b}{2}\,\frac{1-\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{\frac{b^2}{2c}-1}\right)\right)}{2\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{\frac{b^2}{2c}-1}\right)\right)}, \qquad (34)$$

или

$$App = \frac{b}{2}\,\frac{b^2-4c}{\left(b^2-2c\right)\sqrt{\frac{b^2\left(b^2-4c\right)}{\left(b^2-2c\right)^2}}}. \qquad (35)$$

Выполнив необходимые сокращения в выражении (35), окончательно получим:

$$App = \frac{1}{2}\sqrt{b^2-4c}\,. \qquad (36)$$

Очевидно, что результат тригонометрических преобразований (36) полностью совпадает с правой частью выражения (33), что и требовалось доказать.

Перейдём к рассмотрению особенностей разработанного метода.

Приложение разработанного метода к исследованию парабол

Как правило, в разделе «Исследование и построение кривых» курса «Математический анализ» отсутствуют задачи на сравнение двух кривых (!), что связано с неразработанностью данного раздела, поэтому мы попытаемся частично восполнить данное упущение на примере сравнения двух парабол (по крайней мере, авторам неизвестно о существовании задач такого типа).

Как известно, *общее уравнение параболы с вертикальной осью* имеет вид:

$$Y = Ax^2 + Bx + C\,, \qquad (37)$$

где A, B, C – коэффициенты, $A \neq 0$. Уравнение (37), полученное путем деления левой и правой части на коэффициент A, мы будем называть *идеальным уравнением параболы с вертикальной осью* или *уравнением параболы во второй канонической форме*:

$$y = x^2 + bx + c\,. \qquad (38)$$

Вторая каноническая форма характеризуется следующей особенностью: любая парабола, описываемая второй канонической формой, может быть получена из простейшей параболы ($y = x^2$) путём последовательных сдвигов (первый вдоль оси Y, второй вдоль оси X). Верно и обратное утверждение: любая парабола, описываемая второй канонической формой, может быть сведена к простейшей параболе ($y = x^2$, далее, *идеальная парабола*) путём некоторых последовательных сдвигов. Иначе говоря, любая парабола, выраженная уравнением во второй канонической форме, может быть получена из идеальной параболы тривиальным параллельным переносом её вершины. На основе этого можно провести классификацию произвольных парабол, путём введения тех или иных признаков подобия двух и более парабол и отнесения их, соответственно, к тому или иному семейству, а именно:

1. *Семейство расстояний* (рис. 1). Инвариантом построения каждой из парабол этого семейства является расстояние между точками пересечения с осью X (удвоенная величина классического дискриминанта). Рассматривая ось X как ось времени, получим, что данные параболы описывают одни и те же процессы, отличающиеся только точкой начала отсчёта времени. Семейство расстояний образуется путём непрерывного движения вершины исходной параболы общего положения по горизонтальной прямой, т. е. направляющей построения является прямая параллельная оси X (на рис. 1 отмечена точками):

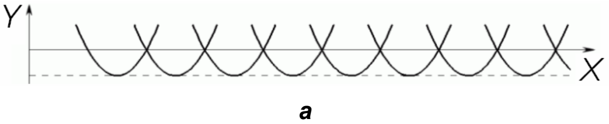
$$y = S , \tag{39}$$

где $S = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ – значение исходной параболы в точке экстремума (от *лат.* spatium – расстояние).

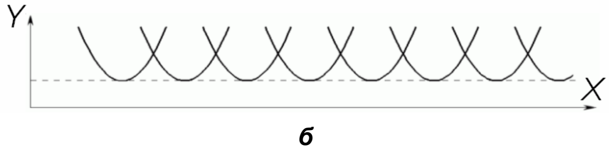
Чтобы сравнить параболы между собой необходимо определить критерий принадлежности к семейству сдвига (*D-критерий*)

$$D = b^2 - 4c \tag{40}$$

для каждой из парабол и исследовать полученные значения на равенство (от *лат.* discriminator – различающий, разделяющий).



а



б

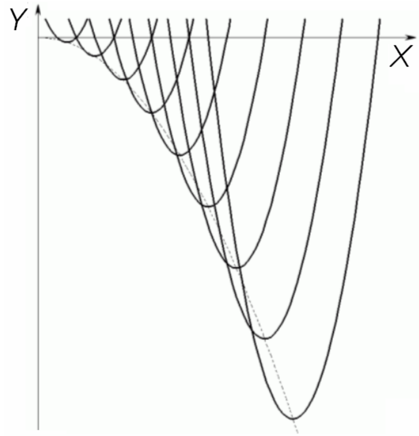
Рис. 1. Семейство парабол расстояний: *а* – для $D > 0$; *б* – для $D < 0$

Пример. Сравнить параболы, описываемые уравнениями $y = x^2 - 6x + 8$ и $y = x^2 - 10x + 24$.

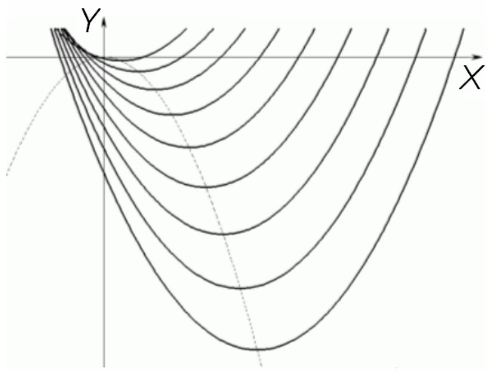
Приравняем правые части этих уравнений к нулю и вычислим дискриминанты полученных квадратных уравнений: для первого $D_1 = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 4$, для второго $D_2 = (-10)^2 - 4 \cdot 24 = 4$. Поскольку $D_1 = D_2$, то данные параболы относятся к семейству расстояний (инвариант – расстояние между корнями равно $\sqrt{D} = 2$). Найдём величину S: $S = 8 - \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = -1$, тогда уравнение направляющей (горизонтальной прямой) примет вид $y = -1$.

Прямая проверка решения. Найдём корни рассматриваемых уравнений: для первого – $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; для второго – $x_1 = 4$, $x_2 = 6$. Расстояние между корнями для первого уравнения составляет $\sqrt{D_1} = |x_2 - x_1| = 4 - 2 = 2$, для второго – $\sqrt{D_2} = |x_2 - x_1| = 6 - 4 = 2$. Поскольку $\sqrt{D_1} = \sqrt{D_2} = \sqrt{D}$, то решение задачи – верно.

2. *Семейство отношений* (рис. 2). Инвариантом построения каждой из парабол этого семейства является величина отношения абсцисс точек пересечения параболы с осью X, или, что тоже самое, величина отношения корней квадратного уравнения, полученных из исходных уравнений парабол путём приравнивания нулю правой части, т. е. уравнения вида $0 = x^2 + bx + c$.



а



б

Рис. 2. Семейство парабол отношений для случая действительных корней: *а* – для $r > 0$; *б* – для $r < 0$

Последнее тождество равносильно равенству углов θ или φ. Отношение указанных корней обозначим через r (от *лат.* ratio – отношение, пропорция). Рассматривая ось X как ось времени, получим, что данные параболы описывают подобные (пропорциональные) процессы, которые хоть и разнятся моментом начала, но имеют пропорциональные соотношения. Семейство отношений образуется путём непрерывного движения вершины идеальной параболы по параболе:

$$y = \rho x^2, \tag{41}$$

где ρ – коэффициент сжатия ($|\rho| < 1$) или растяжения ($|\rho| > 1$) идеальной параболы вдоль оси Y, который во второй канонической форме, для случая действительных корней, всегда меньше нуля и связан с параметром r соотношением:

$$\rho = \operatorname{sgn}(-D)\frac{(1-r)^2}{(1+r)^2}. \tag{42}$$

С другой стороны, если известен параметр ρ, то параметр r определяется по формуле:

$$r = \frac{1+\rho}{1-\rho} \pm \frac{2\sqrt{|\rho|}}{1-\rho}. \tag{43}$$

Генерация двух значений параметра r обусловлена тем фактом, что не известно какой корень квадратного уравнения принят за знаменатель отношения (меньший по модулю или больший), т. е. если семейство отношений характеризуется параметром r, то оно характеризуется также и параметром $\tilde{r} = 1/r$. В связи с отмеченной особенностью проявляется следующая зависимость между вычисляемыми по выражению (43) значениями r:

$$\left(\frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{2\sqrt{|\rho|}}{1-\rho}\right)\left(\frac{1+\rho}{1-\rho} - \frac{2\sqrt{|\rho|}}{1-\rho}\right) = \pm 1. \tag{44}$$

Семейство отношений образуется путём непрерывного движения вершины идеальной параболы по изначально сжатой или растянутой идеальной параболе, т. е. направляющей построения является сжатая или растянутая парабола (на рис. 2 – точечная кривая). Чтобы сравнить параболы между собой необходимо определить величину критерия принадлежности к семейству отношений (*r-критерий*):

$$r = \frac{b^2}{c}\frac{1}{\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\frac{b^2}{2c}-1}\right)\right)\right)^2} = \frac{b^2}{c}\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\frac{b^2}{2c}-1}\right)\right)\right)^{-2}; \tag{45}$$

для каждой из парабол и исследовать полученные значения на равенство. Приведенная формула (45) достаточно сложна в силу необходимости применения как довольно сложных математических расчётов, так и двузначности получаемых значений. Тем не менее, формула (45) может стать однозначной в силу однозначности определения её основной величины – арккосинуса, поэтому для сравнения тех или иных парабол достаточно вычислить величину *R-критерия*:

$$R = \frac{b^2}{2c}, \tag{46}$$

который связан с r-критерием посредством формулы

$$r = \frac{2R}{\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{R-1}\right)\right)\right)^2} = 2R\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{R-1}\right)\right)\right)^{-2}; \tag{47}$$

Пример. Сравнить параболы, описываемые уравнениями $y = x^2 - 3x + 2$ и $y = x^2 - 9x + 18$.

Вычислим значение R-критерия: для первой параболы $R_1 = (-3)^2/(2 \cdot 2) = 2{,}25$, для второй – $R_2 = (-9)^2/(2 \cdot 18) = 2{,}25$. Поскольку $R_1 = R_2$, то данные параболы относятся к семейству отношений. Для определения величины r-критерия предварительно вычислим промежуточную величину $\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{R-1}\right) = 0{,}32175... \approx 0{,}32175$.

Тогда $r_1 = 2 \cdot 2{,}25\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+0{,}32175\right)\right)^{-2} = \frac{1}{2}$ или $r_2 = 2 \cdot 2{,}25\left(1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-0{,}32175\right)\right)^{-2} = 2$, а значит инвариант данного семейства (отношение между корнями) $r = 1/2$ или $r = 2$. Определим величину ρ: $\rho=\operatorname{sgn}\left[-\left((-3)^2-4\cdot 2\right)\right]\frac{(1-2)^2}{(1+2)^2}=-\frac{1}{9}$, следовательно, уравнение направляющей (параболы) имеет вид $y=-\frac{1}{9}x^2$.

Прямая проверка решения. Определим корни данных уравнений: для первого $x_1=2$, $x_2=4$, для второго $x_1=3$, $x_2=6$. Отношение корней равно: для первого уравнения $r_1^{(1)}=x_1/x_2=2/4=1/2$ или $r_2^{(1)}=x_2/x_1=4/2=2$ и для второго – $r_1^{(2)}=x_1/x_2=3/6=1/2$ или $r_2^{(2)}=x_2/x_1=6/3=2$. Поскольку $r_1^{(1)}=r_1^{(2)}$, или, что то же самое: $r_2^{(1)}=r_2^{(2)}$, то решение задачи – *верно*.

Кристаллофизические или кристаллографические задачи на подобие тех или иных плоских сеток на границе раздела двух веществ сводятся к решению задач данного типа. Очевидно, что сравнение двух сеток по формуле (46) даёт значительные преимущества, как по точности, так и по количеству выполняемых действий чем сравнение по выражению (45), или по классической методике решения квадратных уравнений. Более того, в случае, рассмотрения задач, где коэффициенты b и c являются функциями некоторых других величин, применение классической методики приводит к значительному усложнению не только поиска решения, но и к значительному усложнению анализа полученного результата(!). Отметим главное, а именно, *решена задача о сравнении относительных параметров плоских сеток на границе раздела двух веществ*.

3. Семейство наклона (рис. 3). Инвариантом построения каждой из парабол этого семейства является отношение абсциссы минимума к ординате минимума или, иначе говоря, *угол наклона* прямой, проходящей через вершину параболы и начало координат. Рассматривая ось X как ось времени, получим, что эти параболы описывают процессы, которые характеризуются тем, что экстремум достигается в точке, когда величина отношения экстремума процесса к началу процесса одна и та же для всех парабол семейства. Семейство парабол наклона образуется путём непрерывного движения вершины идеальной параболы по наклонной прямой, проходящей через начало координат, т. е. направляющей построения является прямая, проходящая через начало координат (на рис. 3 отмечена точками):

$$y=tx, \tag{48}$$

где $t=\frac{b}{2}-\frac{2c}{b}$ – значение исходной параболы в точке экстремума отнесённое к абсциссе экстремума (от *англ.* tilt – наклон).

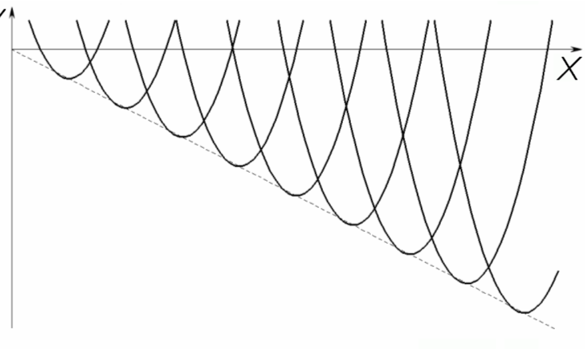


Рис. 3. Семейство парабол наклона

Чтобы сравнить параболы между собой необходимо определить величину критерия принадлежности к семейству наклона (*t -критерий*):

$$t=\frac{b}{2}-\frac{2c}{b}; \tag{49}$$

для каждой из данных парабол и исследовать полученные значения на равенство.

Пример. Сравнить параболы, описываемые уравнениями $y=x^2-4x+3$ и $y=x^2-36x+315$. Вычислим значение t-критерия: для первой параболы $t_1=\frac{-4}{2}-2\frac{3}{-4}=-0{,}5$, для второй $t_2=\frac{-36}{2}-2\frac{315}{-36}=-0{,}5$. Поскольку $t_1=t_2$, то данные параболы относятся к семейству наклона (инвариант – тангенс угла наклона равный минус $0{,}5$). Уравнение направляющей (наклонной прямой) имеет вид $y=\frac{1}{2}x^2$.

Прямая проверка решения. Определим корни данных уравнений: для первого $x_1=1$, $x_2=3$, для второго $x_1=15$, $x_2=21$. Определим координаты точки экстремума, так для первой параболы $v_1=\left(-\frac{(-4)}{2};3-\left(\frac{-4}{2}\right)^2\right)=(2;-1)$, а для второй – $v_2=\left(-\frac{(-36)}{2};315-\left(\frac{-36}{2}\right)^2\right)=(18;-9)$. Поскольку $\frac{v_{1(y)}}{v_{1(x)}}=-\frac{1}{2}=\frac{v_{2(y)}}{v_{2(x)}}=-\frac{9}{18}=-\frac{1}{2}$, то решение задачи – верно.

4. Семейство симметрии (рис. 4). Инвариантом построения каждой из парабол этого семейства является симметрия каждой из них относительно оси Y. Семейство симметрии образуется путём непрерывного движения вершины идеальной параболы по оси *Y*, т.е. направляющей построения является ось *Y*

$$y = 0\,. \tag{50}$$

Для отнесения параболы к семейству симметрии необходимо выполнение условия: $b = 0$, т. е. уравнение параболы должно иметь вид

$$y = x^2 + c\,. \tag{51}$$

Т. е. параболы образуют семейство симметрии, если в их уравнениях линейный член равен нулю (!).

5. Семейство изначальности (рис. 5). Инвариантом построения каждой из парабол этого семейства является то, что каждая из них проходит через точку (0, 0). Семейство изначальности образуется путём непрерывного движения вершины идеальной параболы по отражённой, относительно оси *X*, идеальной параболе:

$$y = -x^2. \tag{52}$$

Для отнесения параболы к семейству симметрии необходимо выполнение условия: $c = 0$, т. е. уравнение параболы должно иметь вид:

$$y = x^2 + bx + 0 = x\left(x + b\right). \tag{53}$$

Т.е. параболы образуют семейство изначальности, если в их уравнениях свободный член равен нулю (!).

6. Семейство взаимности (рис. 6). Инвариантом построения каждой из парабол этого семейства является тот факт, что произведение абсцисс точек пересечения данных парабол с осью *X* есть величина постоянная и равная по модулю единице. Иначе говоря, инвариантом построения каждой из данных парабол является то, что каждая из них проходит либо через точку $\left(0, -1\right)$, либо через точку $\left(0, +1\right)$. Семейство взаимности образуется путём непрерывного движения вершины идеальной параболы по идеальной параболе, смещенной на единичный отрезок по отношению к началу координат вверх (для $c = +1$) или вниз (для $c = -1$), в соответствии с этим, если $c = +1$, то $x_1 = \dfrac{+1}{x_2}$, если $c = -1$, то $x_1 = \dfrac{-1}{x_2}$. Признаком отнесения параболы к семейству взаимности является выполнение условия: $\left| c \right| = 1$, т. е. уравнение параболы должно иметь вид:

$$y = x^2 + bx \pm 1. \tag{54}$$

Сравнение двух и более парабол на отнесение к семейству взаимности должно приводиться с учётом знака свободного члена (!).

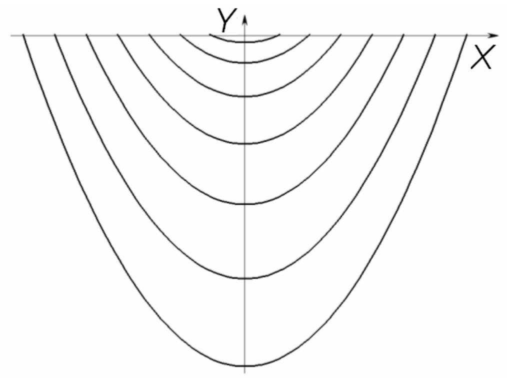


Рис. 4. Семейство парабол симметрии

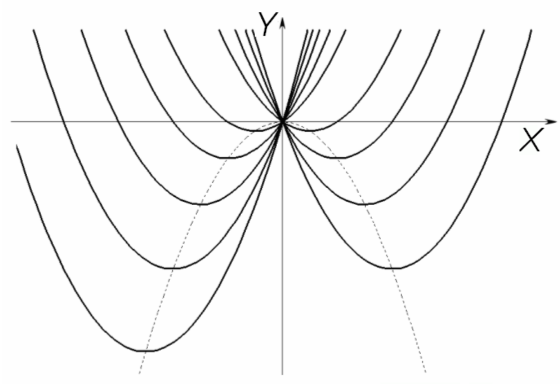
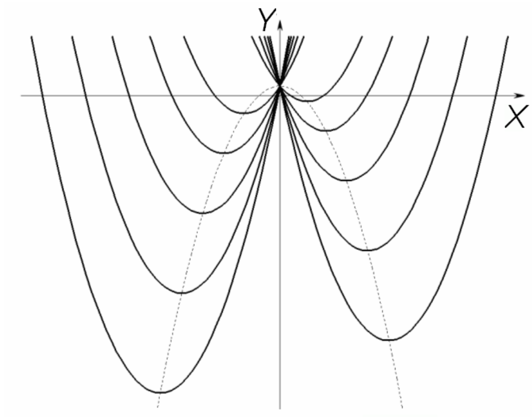
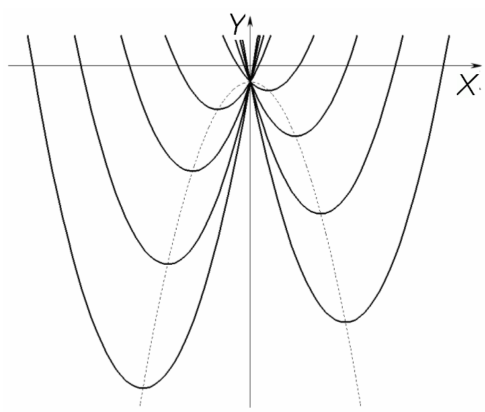


Рис. 5. Семейство парабол изначальности



а



б

Рис. 6. Семейство парабол взаимности: *а* – для $c = +1$; ***б* – для** $c = -1$

Рассмотренные примеры семейств парабол характеризуются лишь простейшими способами их построения, благодаря чему сохраняются наиболее простые (и наиболее важные) свойства парабол семейства. Заметим, что приведенный перечень далеко не полон, поскольку возможны также *сложные* семейства парабол, например семейство, инвариантом которого будет следующее свойство абсцисс точек пересечения параболы с осью X: $x_1 = x_2^2$ или, иначе, $x_1 \cdot x_2 = x_2^3 = c$. Очевидно, что полный перечень всех возможных семейств парабол является бесконечно большим.

Следствия

1. Введя новую переменную $x' = b^2 - 4c$ в равенство (33) и разрешив его относительно указанной переменной, получаем (предварительно заменив x' на x):

$$\sqrt{x} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\arccos\tfrac{1-x}{1+x}\right). \qquad (55)$$

Возведя левую и правую части равенства (55) в квадрат получаем:

$$x = \operatorname{tg}^2\left(\tfrac{1}{2}\arccos\tfrac{1-x}{1+x}\right). \qquad (56)$$

С другой стороны, вводя новую переменную $x' = x^2$ в равенство (55) и произведя необходимые преобразования, получаем (предварительно заменив x' на x):

$$x = \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\arccos\tfrac{1-x^2}{1+x^2}\right). \qquad (57)$$

Анализ выражений (55)–(57) приводит к следующему утверждению: любая алгебраическая функция может быть представлена трансцендентной функцией(!). Следовательно, *любая алгебраическая функция – трансцендентная функция*. Иначе говоря, выражения (56), (57) устанавливают *фундаментальную связь между алгебраическими и трансцендентными функциями*(!), т. е. при их помощи любая алгебраическая функция может быть представлена в трансцендентной форме.

2. Применяя операцию арктангенса к выражению (58) и произведя необходимые преобразования, получаем:

$$2\operatorname{arctg} x = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}. \qquad (58)$$

Таким образом, *получено новое соотношение между обратными тригонометрическими функциями*. Применяя к выражению (58) правила взаимозаменяемости обратных тригонометрических функций, можно получить ряд новых формул для вычисления той или иной обратной тригонометрической функции.

Выводы

1. Предложен и доказан новый (альтернативный) метод решения квадратных уравнений.
2. Разработана методика решения ряда задач, связанных со сравнением между собой двух и более парабол, к одной из который сводится задача о сравнении между собой относительных (аффиных) параметров плоских сеток. Показаны преимущества применения разработанного метода к решению задач указанного типа.
3. Получено новое фундаментальное выражение алгебраических величин через трансцендентные, благодаря которому получены новые соотношения, связывающие между собой некоторые обратные тригонометрические функции. Также получены выражения, связывающие между собой функцию квадратного корня с некоторыми обратными тригонометрическими функциями.

Литература

1. *Литовченко В.Г.,* Горбань А.П. Основы физики микроэлектронных систем металл–диэлектрик–полупроводник. – К.: Наукова думка, 1978. – 316 с.
2. *Бронштейн И.Н.,* Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – 10-е изд. – М.: Наука, 1964. – 608 с.

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Поступила в редакцию 15 июня 2009 г.