

УДК 534.131.1:534.232.082.73

В.М. Шарапов², д-р. техн. наук, **О.Н. Петрищев**¹, д-р. техн. наук, **М.И. Романюк**¹,
Ж.В. Сотула², канд. техн. наук

¹Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,
ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

²Черкасский государственный технологический университет,
бульв. Шевченко, 460, г. Черкассы, 18006, Украина.

Методика расчета передаточных характеристик пьезокерамического преобразователя в режиме излучения ультразвуковых волн. Часть 1. Расчет коэффициента электромеханического преобразования

В работе дано определение передаточной характеристики ультра-звукового пьезоэлектрического преобразователя и выполнен расчет коэффициента электромеханического преобразования с электрического входа на механическую сторону пьезоэлектрического преобразователя. Впервые рассмотрен вопрос о влиянии слоя согласующей жидкости на частотно зависимое изменение коэффициента электромеханического преобразования. Если площадка механического кон-такта с акустической нагрузкой имеет конечные размеры, то слой согласующей жидкости является резонатором радиальных колебаний и оказывает существенное влияние на частотную характеристику пьезоэлектрического излучателя. Библ. 13, рис. 7.

Ключевые слова: передаточные характеристики электроакустического преобразователя, толщинные колебания, пьезокерамический диск, гармонические колебания слоя жидкости.

Введение

Ультразвуковой неразрушающий контроль различных по форме объектов (сосуды высокого давления, трубы большого диаметра, корпуса подводных и надводных судов и т. д.) в диапазоне частот обнаружения отражателей субмиллиметровых размеров по своему физическому содержанию и аппаратурному обеспечению ничем не отличается от дефектологических исследований листового металлопроката. Это объясняется тем, что на частотах мегагерцового диапазона длина упругой волны на несколько порядков меньше радиусов кривизны срединной поверхности исследуемых объектов. По этой причине кривизна поверхности контролируемого объекта не оказывает никакого влияния на ха-

рактеристики волновых полей, которые возбуждаются ультразвуковыми преобразователями. Таким образом, при математическом моделировании ультразвуковых трактов устройств дефектоскопии довольно большого перечня объектов можно пользоваться расчетной схемой, в которой в качестве упругого волновода рассматривается изотропная пластина конечной толщины.

Известно, что энергия, которая доставляется ультразвуковым преобразователем, уносится из зоны действия преобразователя в периферийные области пластины двумя типами горизонтально-сдвиговых волн и двумя типами волн Лэмба [1]. При контактном способе возбуждения упругих волн подводимая к пластине энергия уносится исключительно симметричными и антисимметричными относительно срединной плоскости металлического листа волнами Лэмба. Особенностью математического описания напряженно-деформированного состояния пластины является то обстоятельство, что аппроксимации типа гипотез Кирхгофа [7] применимы лишь в узком, начинающимся с нуля, диапазоне частот. На частотах мегагерцового диапазона, т. е. в рабочем диапазоне частот устройств неразрушающего контроля, аппроксимации Кирхгофа категорически неприменимы, потому что вектор смещений материальных частиц поперечных сечений даже тонких металлических листов обладает тремя равновеликими проекциями. Ситуация усложняется в еще большей степени из-за того, что на частотах мегагерцового диапазона даже в сравнительно тонких металлических листах существуют десятки распространяющихся волн Лэмба. Так, на частоте $f = 3,5$ МГц (типичное значение центральной частоты рабочего диапазона частот дефектоскопа, который предназначен для обнаружения

отражателей миллиметровых размеров) в металлической пластине существуют 16÷17 распространяющихся симметричных и столько же антисимметричных волн Лэмба.

Расчету характеристик пьезоэлектрического преобразователя в режиме возбуждения ультразвуковых волн в твердых телах посвящено множество статей в различных журналах акустического (ультразвукового) направления. В журнале «Дефектоскопия» Российской Академии наук (г. Екатеринбург, Россия) эту проблему практически монополюно разрабатывает главный научный сотрудник ЗАО НПО «ЦНИИТМАШ» (г. Москва) Данилов В.Н., который, начиная, со середины 80 – х по настоящее время, опубликовал только в этом журнале не менее двух десятков статей. Общий подход к моделированию опирается на представление поля смещений материальных частиц в форме градиентов скалярного потенциала [2, 4]. Это и другие ошибки Данилова В.Н. критиковал Чабанов В.Е. еще в 1998 г. [12]. Тем не менее, это не оказало какого либо воздействия на содержание дальнейших работ. На основании фактически ложной модели поля смещений материальных частиц контролируемого объекта в последующих работах были построены модели ультразвукового тракта дефектоскопа и АРД – диаграмма (см., например, работы [6 – 9]). В твердом теле, которое обладает хотя бы одной ограничивающей его объем поверхностью (упругое полупространство) поле смещений материальных частиц описывается линейной комбинацией градиентов скалярного и компонентов векторного потенциалов Гельмгольца. Поскольку указанные работы Данилова В.Н. (см. также библиографию в [12]) в своей основе содержат интегральное преобразование, отдаленно напоминающее преобразование Ханкеля [8], скалярного потенциала, постольку можно утверждать, что эти работы не имеют никакого отношения к описанию реального процесса возбуждения ультразвуковых волн в упругом полупространстве и, тем более, в упругой пластине.

Таким образом, вопрос о математическом моделировании контактного способа возбуждения нормальных волн Лэмба остается открытым и по настоящее время. Это обстоятельство определило цель и содержание настоящей работы, в которой излагаются принципы построения математической модели преобразователя в режиме излучения ультразвуковых волн Лэмба и некоторые, наиболее существенные, по мнению авторов, результаты исследования этой модели.

1. Расчетная схема типового преобразователя и определение его передаточных характеристик

Расчетная схема типового преобразователя с дисковым пьезоэлектрическим элементом показана на рис. 1. Позицией 1 на рис. 1 показана тыловая акустическая нагрузка, которая, как будет показано ниже, выполняет роль элемента регулировки и стабилизации частотной характеристики преобразователя. Позицией 2 обозначен собственно пьезоэлектрический элемент – диск радиуса R и толщиной α из поляризованной по толщине пьезоэлектрической керамики. Позицией 3 обозначен слой согласующей жидкости, влияние которого на рабочие характеристики излучателя не принимается во внимание во всех без исключения известных в настоящее время методиках расчета преобразователей. Вместе с тем в тонком слое согласующей жидкости, который имеет ограниченный размер в радиальном направлении, возникают радиальные колебания материальных частиц жидкости. На некоторых частотах возникают резонансные ситуации, и слой согласующей жидкости потребляет значительные порции энергии, которая подводится к нему колеблющимся пьезокерамическим диском. Следует подчеркнуть, что в одномерных постановках задач об излучении звука колеблющейся пьезоэлектрической пластинкой, исключается сама возможность радиальных колебаний материальных частиц согласующей жидкости. По этой причине, в рамках одномерных моделей пьезоэлектрических излучателей, слой согласующей жидкости исключается из рассмотрения.

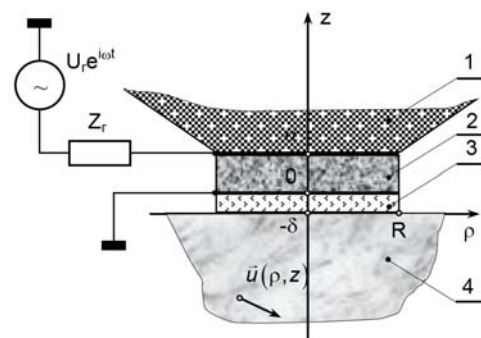


Рис. 1. Расчетная схема типового преобразователя в режиме возбуждения ультразвуковых волн

Позицией 4 на рис. 1 показана акустическая нагрузка излучателя. Для определенности будем полагать, что это металлический слой толщиной $2h$

Боковые поверхности $z = 0, \alpha$ (ρ, ϕ, z - координатные оси криволинейной цилиндрической системы координат (рис. 1)) пьезокерамического диска покрыты слоем металла. Металлизируемая поверхность $z = 0$ всегда имеет нулевой электрический потенциал, т. е. заземлена. На электрод, расположенный на поверхности $z = \alpha$ подается электрический потенциал $U(t)$ (t - время) от генератора с внутренним сопротивлением Z_{Γ} . Будем полагать, что мгновенные значения этого потенциала невелики и при этом в объеме пьезокерамического диска не возникают нелинейные процессы.

Полагая, что вся, показанная на рис. 1, физическая система является линейной, будем рассматривать электрическое воздействие, которое изменяет во времени по гармоническому закону, т. е. $U(t) = U_{\Gamma} e^{i\omega t}$ (U_{Γ} - амплитуда электрического потенциала на выходе генератора; $i = \sqrt{-1}$; ω - заданная круговая частота). Под действием электрического потенциала в пьезокерамическом диске возникают механические деформации, которые возбуждают гармонические колебания в слое согласующей жидкости. За счет инерции материальных частиц согласующей жидкости в ней возникают избыточные давления $\Delta P(\rho, z) e^{i\omega t}$. Эти давления на площадке $z = -\delta$ механического контакта с акустической нагрузкой являются источником ультразвуковых волн.

Обозначим амплитудные значения вектора смещения материальных частиц акустической нагрузки в точке наблюдения с координатами ρ, z символом $\bar{u}(\rho, z)$. Вся цепочку преобразования сигналов в процессе возбуждения ультразвуковых волн можно описать следующим образом

$$U_{\Gamma} \rightarrow \Delta P(\rho, -\delta) \rightarrow \bar{u}(\rho, z). \quad (1)$$

В соответствии с предложенной в работе [13] терминологией, преобразование $U_{\Gamma} \rightarrow \Delta P(\rho, -\delta)$ можно охарактеризовать электромеханическим коэффициентом передачи $W_{\text{эм}}(\omega, \rho, -\delta)$, а преобразование $\Delta P(\rho, -\delta) \rightarrow \bar{u}(\rho, z)$ - механоакустическим коэффициентом передачи $\bar{W}^{\text{ма}}(\omega, \rho, z)$. При этом

$$\Delta P(\rho, -\delta) = U_{\Gamma} W_{\text{эм}}(\omega, \rho, -\delta);$$

$$\bar{u}(\rho, z) = \Delta P(\rho, -\delta) \bar{W}^{\text{ма}}(\omega, \rho, z) = U_{\Gamma} \bar{W}^{\text{эАП}}(\omega, \rho, z),$$

где $\bar{W}^{\text{эАП}}(\omega, \rho, z) = W_{\text{эм}}(\omega, \rho, -\delta) \bar{W}^{\text{ма}}(\omega, \rho, z)$ - векторный коэффициент передачи электроакустического преобразователя с электрического входа на механический выход. Естественно, что под механическим выходом понимается произвольная точка в объеме акустической нагрузки, т. е. в объеме металлического листа.

2. Расчет коэффициента электромеханического преобразования типового пьезоэлектрического преобразователя

Приступая к определению передаточной характеристики $W_{\text{эм}}(\omega, \rho, -\delta)$, отметим, что матрицы материальных констант поляризованной вдоль оси Oz (рис. 1) пьезокерамики типа ЦТС или PZT записываются следующим образом:

а) матрица адиабатических модулей упругости $c_{\beta\lambda}^E$ ($\beta, \lambda = 1, 2, \dots, 6$ - индексы Фойгта) в режиме постоянства напряженности электрического поля

$$\|c_{\beta\lambda}^E\| = \begin{vmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{23}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & \\ & & & & & c_{66}^E \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где $c_{11}^E = c_{22}^E \neq c_{33}^E$; $c_{12}^E = c_{23}^E$; $c_{44}^E = c_{55}^E \neq c_{66}^E$; $c_{66}^E = (c_{11}^E - c_{12}^E)/2$; поскольку $c_{12}^E \approx c_{13}^E$, постольку в дальнейшем будем считать, что $c_{12}^E = c_{13}^E$. При этом матрица (2) соответствует матрице модулей упругости трансверсально изотропной упругой среды с поворотной осью симметрии бесконечного порядка, которая ориентирована вдоль координатной оси Oz (рис. 1);

б) матрица адиабатических пьезоэлектрических модулей $e_{k\beta}$ ($k = 1, 2, 3$; $\beta = 1, 2, \dots, 6$)

$$\|e_{k\beta}\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где $e_{31} = e_{32} \neq e_{33}$; $e_{24} = e_{15} = (e_{33} - e_{31})/2$;

в) матрица адиабатических диэлектрических проницаемостей χ_{ij}^E ($i, j = 1, 2, 3$), измеряемых в режиме постоянства деформации

$$\left\| \chi_{ij}^{\varepsilon} \right\| = \left\| \begin{matrix} \chi_{11}^{\varepsilon} & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^{\varepsilon} & 0 \\ & & \chi_{33}^{\varepsilon} \end{matrix} \right\|, \quad (4)$$

где $\chi_{11}^{\varepsilon} = \chi_{22}^{\varepsilon} \neq \chi_{33}^{\varepsilon}$.

Под действием разности электрических потенциалов в объеме диска возникает электрическое поле, вектор напряженности которого $\vec{E}(x_k, t)$ (x_k - координаты точки в объеме диска; t - время) изменяется во времени по гармоническому закону $e^{i\omega t}$, с круговой частотой ω смены знака разности электрических потенциалов, которая создается внешним генератором на электродированных поверхностях диска. Переменное электрическое поле воздействует силами Кулона на ионы свинца, циркония, титана и кислорода, которые образуют кристаллические ячейки кристаллитов цирконата титаната свинца, т.е. пьезокерамики ЦТС, и они начинают перемещаться в различных направлениях от положения равновесия. Говоря иными словами, под действием разности электрических потенциалов в объеме диска развивается обратный пьезоэлектрический эффект, в результате чего его материальные частицы смещаются на некоторую величину $\vec{u}(x_k)e^{i\omega t}$ из положения равновесия. Амплитуда $\vec{u}(x_k)$ гармонически изменяющегося во времени вектора смещения материальных частиц удовлетворяет второму закону Ньютона в дифференциальной форме, математическая формулировка которого имеет следующий вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}(x_k)}{\partial x_j} + \rho_0 \omega^2 u_i = 0; \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где $\sigma_{ij}(x_k)$ - амплитудные значения компонентов тензора результирующих механических напряжений в объеме деформируемого диска; ρ_0 - плотность пьезокерамики; $u_i(x_k)$ - i -ый компонент вектора $\vec{u}(x_k)$. При записи выражения (5) предполагается суммирование по дважды повторяющемуся индексу j .

Компоненты $\sigma_{ij}(x_k)$ определяются обобщенным законом Гука для упругих тел с пьезоэлектрическими свойствами, который записывается следующим образом [10]

$$\sigma_{ij}(x_k) = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl}(x_k) - e_{kij} E_k(x_k), \quad (6)$$

где, как и при записи выражения (5) предполагается суммирование по дважды повторяющимся индексам k и l (в дальнейших записях это соглашение о форме записи сумм будет использоваться по умолчанию); $c_{ijkl}^E = c_{\alpha\beta}^E$ ($\alpha \Leftrightarrow i, j; \beta \Leftrightarrow k, l$) - модули упругости; $\varepsilon_{kl}(x_k)$ - амплитудные значения компонентов тензора деформаций малых объемов пьезоэлектрика; $e_{kij} = e_{k\alpha}$ - пьезомодули; $E_k(x_k)$ - k -ый компонент амплитудного значения вектора $\vec{E}(x_k)$ напряженности электрического поля в объеме деформируемого пьезоэлектрика.

Электрическое состояние деформируемого пьезоэлектрика определяется гармонически изменяющимся во времени вектором электрической индукции $\vec{D}(x_k)e^{i\omega t}$. Компоненты $D_m(x_k)$ амплитудного значения этого вектора определяется законом электрической поляризации диэлектриков с пьезоэлектрическими свойствами, математическая формулировка которого имеет следующий вид [10]

$$D_m(x_k) = \chi_{mn}^{\varepsilon} E_n(x_k) + e_{mij} \varepsilon_{ij}(x_k), \quad (7)$$

Векторы $\vec{D}(x_k)$ и $\vec{E}(x_k)$ должны, вообще говоря, удовлетворять уравнениям Максвелла. В монографии [10] показано, что в квазистатическом приближении уравнение Максвелла для диэлектриков сводятся к условию отсутствия свободных носителей электричества в объеме диэлектрика. Это условие записывается следующим образом

$$\text{div} \vec{D}(x_k) = \frac{\partial D_m(x_k)}{\partial x_m} = 0. \quad (8)$$

Очевидно, что все физические поля в объеме пьезокерамического диска обладают осевой симметрией, т.е. не зависят от значений полярного угла ϕ . При этом уравнения (5) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_{pp}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{pz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} (\sigma_{pp} - \sigma_{\phi\phi}) + \rho_0 \omega^2 u_p = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_{pz}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \sigma_{pz} + \rho_0 \omega^2 u_z = 0, \quad (10)$$

При записи выражений (9), (10) было принято, что $u_\phi = 0$ и $\sigma_{r\phi} = \sigma_{z\phi} = 0$. Компоненты тензора результирующих механических напряжений определяются соотношениями (6), которые с учетом конструкций матриц материальных констант могут быть представлены в следующем виде

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E (\varepsilon_{\phi\phi} + \varepsilon_{zz}) - e_{31} E_z, \quad (11)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{11}^E \varepsilon_{\phi\phi} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z, \quad (12)$$

$$\sigma_{zz} = c_{12}^E (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\phi\phi}) + c_{11}^E \varepsilon_{zz} - e_{33} E_z, \quad (13)$$

$$\sigma_{\rho z} = 2c_{55}^E \varepsilon_{\rho z} - e_{15} E_\rho, \quad (14)$$

Деформации ε_{mn} определяются следующими соотношениями [9]:

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u_\rho}{\rho}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z};$$

$$\varepsilon_{\rho z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right), \quad (15)$$

где u_ρ и u_z - радиальный и аксиальный компонент вектора смещения материальных частиц пьезоэлектрического диска.

Выражения (7) определяют компоненты D_ρ и D_z следующим образом:

$$D_\rho = \chi_{11}^\varepsilon E_\rho + 2e_{15} \varepsilon_{\rho z}, \quad (16)$$

$$D_z = \chi_{33}^\varepsilon E_z + e_{31} (\varepsilon_{\rho\rho} + \varepsilon_{\phi\phi}) + e_{33} \varepsilon_{zz}, \quad (17)$$

Условие отсутствия свободных носителей электричества (8) для электрического поля с осевой симметрией в цилиндрической системе координат записывается следующим образом

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho D_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим вначале простейшую ситуацию, когда размеры пьезоэлектрического диска удовлетворяют сильному неравенству $\alpha/R \ll 1$ и частота ω смены знака разности электрических потенциалов выбрана таким образом, что масштаб неоднородности напряженно-деформированного состояния (длина упругой волны) диска соизмерим с его толщиной. В этом случае можно пренебречь эффектами, которые создаются упругими волнами, отраженными от боковой поверхности $\rho = R$, и полагать, что усредненное по объему диска напряженно-деформированное состояние представляет собой одноосное сжатие-растяжение вдоль оси Oz. При этом можно принять, что $u_\rho = 0$ и $\partial u_z / \partial \rho = 0$. Из сделанного допущения следует, что $\varepsilon_{\rho\rho} = \varepsilon_{\phi\phi} = 0$ и $\sigma_{\rho\rho} = \sigma_{\phi\phi} = c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{31} E_z$, $\sigma_{\rho z} = 0$. Уравнение установившихся колебаний

(9) обращается в тождество, а уравнение (10) принимает более простой вид, а именно

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 \omega^2 u_z = 0, \quad (19)$$

где

$$\sigma_{zz} = c_{33}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} - e_{33} E_z. \quad (20)$$

Символом E_z в соотношении (20) обозначен аксиальный компонент вектора напряженности результирующего электрического поля в объеме деформируемого пьезоэлектрика. Результирующее поле является алгебраической суммой электрического поля, которое создается внешним устройством (генератором) с напряженностью $E_z^* = -U_0/\alpha$, где U_0 - амплитуда разности электрических потенциалов на электродированных поверхностях диска $z = 0$ и $z = \alpha$ (рис. 1) (очевидно, что $U_0 \neq U_T$) и внутреннего электрического поля. Аксиальный компонент вектора напряженности внутреннего поля обозначим символом E_z^{in} . Это поле создается в результате смещения ионов из равновесных положений в узлах кристаллической решетки. Таким образом,

$$E_z = E_z^* + E_z^{\text{in}}. \quad (21)$$

Очевидно, что величина E_z^{in} должна быть такой, чтоб результирующее электрическое поле удовлетворяло условию (18). Так как $D_\rho = 0$ на электродированных поверхностях $z = 0$ и $z = \alpha$, а на поверхности $\rho = R$ радиальный компонент также равен нулю, то в первом приближении можно считать, что $D_\rho = 0 \forall (\rho, \phi, z) \in V$, где V - объем пьезокерамического диска. При этом условие (18) приобретает более простой вид, т.е.

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0, \quad (22)$$

где

$$D_z = e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \chi_{33}^\varepsilon E_z. \quad (23)$$

Из условия (22) следует, что аксиальный компонент D_z вектора электрической индукции не зависит от координат z . Этим фактом можно воспользоваться при определении величины E_z . Так как $\vec{E} = -\text{grad}\Phi$, то $E_z = -\partial\Phi/\partial z$, где Φ - электрический потенциал результирующего

электрического поля. Подставим это определение E_z соотношение (23) и проинтегрируем левую и правую части полученного выражения по переменной z в пределах от 0 до α . В результате выполнения этих действий получаем

$$\alpha D_z = e_{33} [u_z(\alpha) - u_z(0)] - \chi_{33}^e U_0. \quad (24)$$

Сравнивая два физически эквивалентных определения (23) и (24) аксиального компонента вектора электрической индукции, находим выражения для расчета напряженности результирующего поля E_z :

$$E_z = -\frac{e_{33}}{\chi_{33}^e} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\alpha \chi_{33}^e} [u_z(\alpha) - u_z(0)] - \frac{U_0}{\alpha}. \quad (25)$$

Сопоставляя определение (21) и выражение (25), можно заметить, что первые два слагаемых в формуле (25) описывают напряженность внутреннего электрического поля E_z^{in} .

Подставляя выражение (25) в обобщенный закон Гука (20), получаем следующий результат

$$\sigma_{zz} = \left(c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\chi_{33}^e} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{33}^2}{\alpha \chi_{33}^e} [u_z(\alpha) - u_z(0)] + \frac{e_{33} U_0}{\alpha}, \quad (26)$$

Определим коэффициент электромеханической связи K_3 в режиме одноосного сжатия-растяжения вдоль оси Oz таким образом, чтобы квадрат этой величины $K_3^2 = e_{33}^2 / (c_{33}^E \chi_{33}^e)$. Тогда выражение (26) можно записать в следующем виде

$$\sigma_{zz} = c_{33}^D \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{K_3^2}{\alpha(1+K_3^2)} [u_z(\alpha) - u_z(0)] + \frac{e_{33} U_0}{\alpha c_{33}^D} \right\}, \quad (27)$$

где $c_{33}^D = c_{33}^E (1 + K_3^2)$ - эффективный модуль упругости деформируемой пьезокерамики, величина которого учитывает согласное (связанное) действие сил упругости и сил Кулона.

Подставляя выражение (27) в уравнение установившихся колебаний (19), получаем

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \gamma^2 u_z = 0, \quad (28)$$

где $\gamma^2 = \rho_0 \omega^2 / c_{33}^D$ - квадрат волнового числа упругих колебаний сжатия-растяжения в направлении оси Oz .

Решение уравнения (28) очевидно:

$$u_z = A \cos \gamma z + B \sin \gamma z, \quad (29)$$

где A и B - подлежащие определению константы.

На границе пьезокерамического диска и тыловой акустической нагрузки, т.е. в плоскости $z = \alpha$ (рис. 1) должен выполняться третий закон Ньютона

$$\sigma_{zz}|_{z=\alpha} = \sigma_{zz}^{TH}|_{z=\alpha}, \quad (30)$$

и условия кинематического сопряжения, т. е.

$$u_z|_{z=\alpha} = u_z^{TH}|_{z=\alpha}, \quad (31)$$

В соотношениях (30) и (31) символами σ_{zz}^{TH} и u_z^{TH} обозначены напряжения и смещения материальных частиц в объеме тыловой акустической нагрузки.

Предположим, что в тыловой акустической нагрузке, по крайней мере, вблизи границы $z = \alpha$, формируется плоская бегущая волна с амплитудой смещения

$$u_z^{TH} = C e^{-ikz}, \quad (32)$$

где C - константа; k - волновое число продольных волн в материале тыловой акустической нагрузки. При таком определении u_z^{TH} напряжение σ_{zz}^{TH} рассчитывается по формуле

$$\sigma_{zz}^{TH} = E \frac{\partial u_z^{TH}}{\partial z} = -ikEC e^{-ikz}, \quad (33)$$

где E - модуль Юнга материала тыловой акустической нагрузки.

Подставляя общее решение (29) в определение (27) нормальных напряжений σ_{zz} , получаем

$$\sigma_{zz} = \gamma c_{33}^D \left\{ A \left[-\sin \gamma z - \frac{K_3^2}{1+K_3^2} \frac{(\cos \gamma \alpha - 1)}{\gamma \alpha} \right] + B \left[\cos \gamma z - \frac{K_3^2}{1+K_3^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} \right] + \frac{e_{33} U_0}{\gamma \alpha c_{33}^D} \right\}, \quad (34)$$

Подставляя выражения (32) – (34) в граничные условия (30) и (31), приходим к выводу, что

$$C e^{-ik\alpha} = A \cos \gamma \alpha + B \sin \gamma \alpha,$$

после чего граничное условие (30) принимает следующий вид

$$A a_{11} + B a_{12} = -\frac{e_{33} U_0}{\gamma \alpha c_{33}^D}, \quad (35)$$

где

$$a_{11} = -\sin \gamma \alpha + \frac{K_3^2}{1 + K_3^2} \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha} + i \xi_T \cos \gamma \alpha ;$$

$$a_{12} = \cos \gamma \alpha - \frac{K_3^2}{1 + K_3^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} + i \xi_T \sin \gamma \alpha ;$$

$$\xi_T = \frac{kE}{\gamma c_{33}^D} - \text{относительный акустический импеданс тыловой акустической нагрузки пьезокерамического диска (рис. 1).}$$

Для определения кинематических характеристик материальных частиц слоя согласующей жидкости введем скалярный потенциал $\Phi(\rho, z)$.

При этом движение материальных частиц слоя жидкости будем описывать вектором $\vec{u}^*(\rho, z, t) = \vec{u}^*(\rho, z) e^{i\omega t}$, амплитудное значение которого $\vec{u}^*(\rho, z)$ определяется через амплитудное значение $\Phi(\rho, z)$ скалярного потенциала следующим образом

$$\vec{u}^*(\rho, z) = \text{grad} \Phi(\rho, z), \quad (36)$$

При записи соотношения (36) и всех последующих за ним выражениях временной множитель $e^{i\omega t}$ будет подразумеваться, но не записываться. При этом можно говорить, что выражение (36) и все последующие вслед за ним записи представлены в терминах амплитуд гармонически изменяющихся во времени величин.

Очевидно, что скалярный потенциал $\Phi(\rho, z)$ должен удовлетворять уравнению Гельмгольца, т. е.

$$\nabla^2 \Phi(\rho, z) + k_{ж}^2 \Phi(\rho, z) = 0, \quad (37)$$

где $k_{ж} = \omega/v_{ж}$ - волновое число упругих колебаний слоя жидкости; $v_{ж} = \sqrt{\Lambda/\rho_{ж}}$ - скорость звука в жидкости (Λ и $\rho_{ж}$ - модуль всестороннего сжатия и плотность жидкости).

Общее решение уравнения (37) должно удовлетворять на границе $z = 0$ условиям кинематического и динамического сопряжения, т. е.

$$\left. \frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = u_z(0) = A, \quad (38)$$

$$\Delta P(\rho, z) \Big|_{z=0} = \sigma_{zz}(0), \quad (39)$$

где $\Delta P(\rho, z)$ - избыточное давление в слое согласующей жидкости; $\sigma_{zz}(0) = \sigma_{zz} \Big|_{z=0}$ - результирующее механическое напряжение в пьезокерамическом диске. На боковой поверхности $\rho = R$ слоя жидкости должно выполняться следующее условие

$$\Delta P(\rho, z) \Big|_{\rho=R} = 0. \quad (40)$$

На границе $z = -\delta$, т. е. на поверхности металла, которую в первом приближении можно считать абсолютно жесткой, граничное условие записывается в следующем виде

$$\left. \frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial z} \right|_{z=-\delta} = 0. \quad (41)$$

Предваряя последующие вычисления, заметим, что

$$\begin{aligned} \Delta P(\rho, z) &= \Lambda \text{div} \vec{u}^*(\rho, z) = \\ &= \Lambda \nabla^2 \Phi(\rho, z) = -\Lambda k_{ж}^2 \Phi(\rho, z) = \\ &= -\omega^2 \rho_{ж} \Phi(\rho, z) \end{aligned}$$

Поскольку рассматриваемая задача по сути постановки является осесимметричной, постольку уравнение (37) в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Phi(\rho, z)}{\partial z^2} + k_{ж}^2 \Phi(\rho, z) = 0. \quad (42)$$

Предположим, что скалярный потенциал $\Phi(\rho, z)$ можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от радиальной координаты, а вторая - только от координаты z , т. е.

$$\Phi(\rho, z) = R(\rho) Z(z). \quad (43)$$

Подставляя представление скалярного потенциала (43) в уравнение (42), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) Z(z) + \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} R(\rho) + \\ + k_{ж}^2 R(\rho) Z(z) = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

Разделим уравнение (44) на произведение $R(\rho) Z(z)$ и запишем полученный результат в следующем виде

$$\frac{1}{R(\rho)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) \right] + k_{ж}^2 = -\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}. \quad (45)$$

Отчетливо видно, что левая часть равенства (45) зависит только от переменной ρ , а правая

– от переменной z . В математическом анализе доказывается, что равенство (45) может выполняться для произвольных значений переменных ρ и z только в том случае, когда левая и правая части соотношения (45) равняются одной и той же константе, которая называется константой разделения. Методика приведения уравнения (42) к соотношению (45) называется методом разделения переменных или методом Фурье. Для удобства дальнейших записей обозначим константу разделения символом β^2 , т. е. будем считать ее численно равной квадрату некоторого действительного числа β . Это число подлежит определению в ходе решения задачи.

Таким образом, уравнение (45) распадается на два самостоятельных уравнения:

$$\frac{1}{R(\rho)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} \right) \right] + k_{ж}^2 = \beta^2, \quad (46)$$

$$-\frac{1}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = \beta^2. \quad (47)$$

Очевидно, что общее решение уравнения (47) имеет следующий вид:

$$Z(z) = M \cos \beta z + N \sin \beta z, \quad (48)$$

где M и N - константы, подлежащие определению в ходе решения задачи.

Уравнение (46) достаточно просто приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 R(\rho)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial R(\rho)}{\partial \rho} + (k_{ж}^2 - \beta^2) R(\rho) = 0. \quad (49)$$

Если обозначить $\lambda^2 = k_{ж}^2 - \beta^2$, то решение уравнения (49), которое сохраняет регулярность в области $0 \leq \rho \leq R$, с точностью до постоянного множителя записывается в следующем виде:

$$R(\rho) = J_0(\lambda \rho), \quad (50)$$

где $J_0(\lambda \rho)$ - функция Бесселя нулевого порядка.

Подставляя выражения (48) и (50) в определение скалярного потенциала (43), получаем следующую конструкцию:

$$\Phi(\rho, z) = J_0(\lambda \rho) [M \cos \beta z + N \sin \beta z], \quad (51)$$

Так как граничное условие (40) эквивалентно требованию $\Phi(R, z) = 0 \forall z \in [0, -\delta]$, то из выражения (50) следует, что

$$J_0(\lambda R) = 0. \quad (52)$$

На рис. 2 показан график изменения функции $J_0(\lambda \rho)$. Отчетливо видно, что при некоторых значениях аргумента q_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) функция Бесселя нулевого порядка принимает нулевые значения. Величины q_k являются корнями уравнения (52). Сама величина q_k очевидно, называется k -тым корнем функции $J_0(\lambda R)$. Числовые значения первых пяти корней функции $J_0(\lambda R)$ таковы: $q_1 = 2,404826$, $q_2 = 5,520078$, $q_3 = 8,653728$, $q_4 = 11,791534$, $q_5 = 14,930918$. Несложно заметить, что $q_k \approx q_{k-1} + \pi$. При этом приближенное равенство выполняется тем точнее, чем больше номер корня. Так, пятый и четвертый корни функции $J_0(\lambda R)$ отличаются друг от друга на $0,999297\pi$, десятый и одиннадцатый – на $0,999879\pi$, четырнадцатый и пятнадцатый – на $0,999937\pi$, девятнадцатый и двадцатый – на $0,999966\pi$. Если предположить, что точность выполнения инженерных расчетов ограничивается четвертой значащей цифрой после запятой, то можно говорить, что для номеров $k \geq 20$ выполняется точное равенство $q_k = q_{k-1} + \pi$

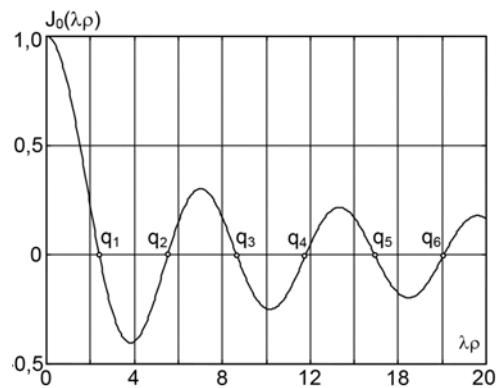


Рис. 2. График изменения функции $J_0(\lambda \rho)$

Из уравнения (52) следует, что $\lambda_k R = q_k$. Это эквивалентно равенству $k_{ж}^2 - \beta_k^2 = q_k^2 / R^2$. Из последнего соотношения следует определение констант разделения β_k :

$$\beta_k = \sqrt{k_{ж}^2 - q_k^2 / R^2}. \quad (53)$$

Принимая во внимание множественность констант разделения β_k , общее решение (51) необходимо записать в следующем виде:

$$\Phi(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} J_0(q_k \rho / R) [M_k \cos \beta_k z + N_k \sin \beta_k z], \quad (54)$$

Константы M_k и N_k определяются из условий на поверхности $z = 0$ и $z = -\delta$.

Так как

$$u_z^{\text{ж}}(\rho, z) = \frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k J_0(q_k \rho / R) [-M_k \sin \beta_k z + N_k \cos \beta_k z],$$

то граничное условие (41) эквивалентно утверждению, что $M_k \sin \beta_k \delta + N_k \cos \beta_k \delta = 0$, откуда следует определение коэффициентов N_k :

$$N_k = -M_k \operatorname{tg} \beta_k \delta. \quad (55)$$

Подставляя выражение (55) в определение аксиального компонента вектора смещения материальных частиц жидкости, получаем

$$u_z^{\text{ж}}(\rho, z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k M_k J_0(q_k \rho / R) [\sin \beta_k z + \operatorname{tg} \beta_k \delta \cos \beta_k z]. \quad (56)$$

При этом выражение (54) приобретает следующий вид

$$\Phi(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k J_0(q_k \rho / R) [\cos \beta_k z - \operatorname{tg} \beta_k \delta \sin \beta_k z]. \quad (57)$$

Подставляя в соотношения (56) и (57) значения $z = 0$, приходим к следующей записи граничных условий (38), (39)

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k M_k J_0(q_k \rho / R) \operatorname{tg} \beta_k \delta = A, \quad (58)$$

$$-\rho_{\text{ж}} \omega^2 \sum_{k=1}^{\infty} M_k J_0(q_k \rho / R) = \gamma c_{33}^D \left\{ A \frac{K_3^2}{1 + K_3^2} \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha} + B \left[1 - \frac{K_3^2}{1 + K_3^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha} \right] + \frac{e_{33} U_0}{\gamma \alpha c_{33}^D} \right\}. \quad (59)$$

Очевидно, что константы A и B можно представить в виде рядов по ортогональным функциям. Функции $J_0(q_k \rho / R)$ образуют систему ортогональных функций на интервале $[0, R]$. Доказательством тому служит известный [11] интеграл

$$\int_0^1 x J_0(q_k x) J_0(q_p x) dx = \begin{cases} 0 & \forall k \neq p, \\ \frac{1}{2} J_1^2(q_k) & \text{при } k = p. \end{cases} \quad (60)$$

Полагая,

что

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(q_k \rho / R), \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_0(q_k \rho / R),$$

из уравнения (58) находим, что

$$M_k = - \frac{A_k}{\beta_k \operatorname{tg} \beta_k \delta}. \quad (61)$$

Полагая, что $U_0 = \sum_{k=1}^{\infty} U_k J_0(q_k \rho / R)$, где ко-

эффициенты разложения $U_k = 2U_0 / [q_k J_1(q_k)]$ определены с помощью интеграла (60), граничное условие (59) можно записать в следующем виде

$$A_k a_{21}(k) + B_k a_{22} = - \frac{2e_{33} U_0}{\gamma \alpha c_{33}^D q_k J_1(q_k)}, \quad (62)$$

где

$$a_{21}(k) = \frac{K_3^2}{1 + K_3^2} \frac{(1 - \cos \gamma \alpha)}{\gamma \alpha} + \xi_{\text{ж}} \frac{k_{\text{ж}} \delta}{(\beta_k \delta) \operatorname{tg}(\beta_k \delta)};$$

$\xi_{\text{ж}} = \frac{\rho_{\text{ж}} v_{\text{ж}}}{\rho_0 v^D}$ - относительный акустический им-

педанс слоя согласующей жидкости

$$(v^D = \sqrt{c_{33}^D / \rho_0}); \quad a_{22} = 1 - \frac{K_3^2}{1 + K_3^2} \frac{\sin \gamma \alpha}{\gamma \alpha}.$$

Уравнение (35) необходимо переписать в следующем виде

$$A_k a_{11} + B_k a_{12} = - \frac{2e_{33} U_0}{\gamma \alpha c_{33}^D q_k J_1(q_k)}. \quad (63)$$

Решение системы уравнений (62), (63) очевидно:

$$A_k = - \frac{2e_{33} U_0}{\gamma \alpha c_{33}^D} \frac{(a_{22} - a_{12})}{q_k J_1(q_k) \Delta_0(k)},$$

$$B_k = - \frac{2e_{33} U_0}{\gamma \alpha c_{33}^D} \frac{[a_{11} - a_{21}(k)]}{q_k J_1(q_k) \Delta_0(k)}, \quad (64)$$

где $\Delta_0(k) = a_{11} a_{22} - a_{21}(k) a_{12}$ - главный определитель системы уравнений (62), (63).

Расчет коэффициента электромеханического преобразования типового пьезоэлектрического преобразователя в режиме излучения ультразвуковых волн завершается определением амплитуды U_0 разности электрических потенциалов на электродированных поверхностях пьезокерамического диска.

Из представленной на рис. 1 расчетной схемы с очевидностью следует, что

$$U_0 = U_{\Gamma} \frac{Z_{\text{эл}}(\omega)}{Z_{\Gamma} + Z_{\text{эл}}(\omega)}, \quad (65)$$

где $Z_{эл}(\omega)$ - электрический импеданс колеблющегося пьезокерамического диска.

Числовые значения этого импеданса определяются из закона Ома для участка электрической цепи, т. е.

$$Z_{эл}(\omega) = U_0/I, \quad (66)$$

где $I = -i\omega Q$ - амплитуда протекающего в проводниках электрического тока; Q - амплитудное значение электрического заряда на электродированных поверхностях пьезокерамического диска. Электрический заряд Q определяется амплитудным значением аксиального компонента вектора электрической индукции следующим образом

$$Q = 2\pi \int_0^R \rho D_z d\rho, \quad (67)$$

$$F(\omega) = \frac{4K_3^2}{1 + K_3^2} \left[-\frac{(1 - \cos \gamma\alpha)}{\gamma\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{22} - a_{12}}{q_k^2 \Delta_0(k)} + \frac{\sin \gamma\alpha}{\gamma\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{11} - a_{21}(k)}{q_k^2 \Delta_0(k)} \right] + 1.$$

В случае $K_3^2 = 0$, т. е. когда диэлектрик не обладает пьезоэлектрическими свойствами, частотно зависящая функция $F(\omega) = 1$.

После определения амплитудного значения электрического заряда элементарно определяется электрический импеданс колеблющегося пьезокерамического диска $Z_{эл}(\omega) = 1/[i\omega C_0^E F(\omega)]$ и разность электрических потенциалов на электродах U_0 :

$$U_0 = \frac{U_{\Gamma}}{1 + i\omega C_0^E Z_{\Gamma} F(\omega)}. \quad (70)$$

После этого определяется коэффициент A_k и избыточное давление на площадке $z = -\delta$

$$K_{эм}(\omega, \rho, \Pi) = \frac{(a_{22} - a_{12})k_{ж}\delta}{1 + i\omega C_0^E Z_{\Gamma} F(\omega)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(q_k \rho/R)}{(\beta_k \delta) \sin(\beta_k \delta) q_k J_1(q_k) \Delta_0(k)}. \quad (72)$$

Выполним количественные оценки частотной характеристики электромеханического преобразования типового пьезоэлектрического преобразователя.

3. Исследование частотной характеристики электромеханического преобразования типового пьезоэлектрического преобразователя в режиме излучения ультразвуковых колебаний

На рис. 3 показаны результаты вычислений разности электрических потенциалов U_0 на электродированных поверхностях пьезокерами-

где величина D_z определяется из соотношения (24). С учетом выражений (64) соотношение (24) можно представить в следующем виде

$$D_z = -\frac{2e_{33}^2 U_0}{\gamma\alpha^2 c_{33}^D} \left\{ -(1 - \cos \gamma\alpha) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_{22} - a_{12}) J_0(q_k \rho/R)}{q_k J_1(q_k) \Delta_0(k)} + \sin \gamma\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[a_{11} - a_{21}(k)] J_0(q_k \rho/R)}{q_k J_1(q_k) \Delta_0(k)} \right\} - \chi_{33}^E \frac{U_0}{\alpha}. \quad (68)$$

Подставляя выражение (68) в формулу (67), получаем после выполнения очевидных вычислений следующий результат

$$Q = -C_0^E U_0 F(\omega), \quad (69)$$

где $C_0^E = \pi R^2 \chi_{33}^E / \alpha$ - статическая электрическая емкость пьезокерамического диска;

механического контакта с акустической нагрузкой пьезоэлектрического преобразователя:

$$\Delta P(\rho, -\delta) = -U_{\Gamma} W_{эм}(\omega, \rho, -\delta), \quad (71)$$

где $W_{эм}(\omega, \rho, -\delta) = W_0 K_{эм}(\omega, \rho, \Pi)$; $W_0 = 4e_{33} \xi_{ж} / \alpha$ - абсолютное значение коэффициента электромеханического преобразования (размерность - паскаль деленный на вольт); $K_{эм}(\omega, \rho, \Pi)$ - безразмерный, зависящий от частоты ω , радиальной координаты ρ и набора параметров Π , коэффициент передачи с электрической стороны на механическую сторону преобразователя, т. е. частотная характеристика электромеханического преобразования. Формула для расчета этой характеристики имеет следующий вид

ческого диска, которые были выполнены по формуле (70) для генератора электрических потенциалов с внутренним сопротивлением $Z_{\Gamma} = R_{\Gamma} = 50$ Ом. Пьезоэлектрический диск выполнен из пьезокерамики типа ЦТС-19. В расчет заложены следующие параметры пьезокерамики: $c_{33}^E = 102$ ГПа; $\rho_0 = 7400$ кг/м³; $e_{33} = 18$ Кл/м²; $\chi_{33}^E = 1500 \chi_0$; $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; добротность пьезокерамики $Q_{пк} = 80$. Радиус и толщина пьезокерамического диска в миллиметрах указаны на врезке

в поле рисунка. Толщина слоя согласующей жидкости $\delta=0,05$ мм. Добротность жидкости (величина обратно пропорциональная вязкости жидкости) $Q_{ж} = 5$. Эта жидкость имеет вязкость примерно в два раза меньше чем у глицерина. Плотность жидкости $\rho_{ж} = 1000$ кг/м³, скорость звука - $v_{ж} = 1500$ м/с. При выполнении вычислений суммировались первые двадцать корней q_k . По осям ординат на рис. 3 отсчитываются безразмерные значения разности электрических потенциалов, т. е. отношения ReU_0/U_T

(символ ReU_0 означает действительную часть комплекснозначной функции U_0), по осям абсцисс – безразмерное волновое число $\gamma\alpha$. Варьируемым параметром показанного на рис. 3 семейства кривых является относительный акустический импеданс ξ_T тыловой акустической нагрузки. Числовое значение параметра $\xi_T = 0,25n$, где n - номер кривой, т. е. числа 1, 2, ..., 5, которые проставлены в поле рисунков возле соответствующих кривых.

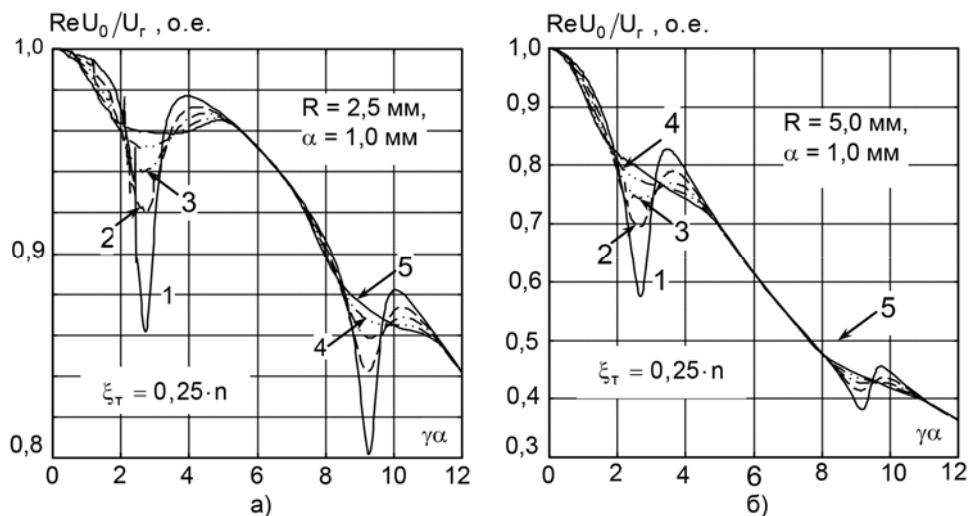


Рис. 3. Графики частотно зависимых изменений разностей электрических потенциалов на электродированных поверхностях пьезокерамического диска

Представленные на рис. 3 графики иллюстрируют влияние параметров материала тыловой акустической нагрузки на характер частотно зависимого изменения разности электрических потенциалов на электродированных поверхностях пьезокерамического диска.

Отчетливо видно, что на фоне монотонного уменьшения разности потенциалов U_0 с ростом частоты или, что то же самое, с ростом безразмерного волнового числа $\gamma\alpha$, имеются резкие неоднородности в окрестности значений $\gamma\alpha = \pi$ и $\gamma\alpha = 3\pi$. Эти неоднородности обусловлены резким изменением электрического импеданса $Z_{эл}(\omega)$, которые вызваны специфическими резонансными явлениями в объеме колеблющегося пьезоэлектрического диска [10]. Уменьшение значений разности потенциалов U_0 обусловлено тем, что электрический импеданс пьезокерамического диска носит емкостной характер. Самое существенное заключается в том, что при некоторых значениях относительного

акустического импеданса ($\xi_T \approx 1$) неоднородности частотно зависимого изменения разности электрических потенциалов U_0 существенно уменьшаются. Отсюда следует вывод, что выбором материала тыловой акустической нагрузки можно осуществлять управление частотно зависимым изменением разности электрических потенциалов на электродированных поверхностях пьезокерамического диска и, следовательно, передаточными характеристиками пьезоэлектрического преобразователя в целом. Для пьезокерамики типа ЦТС значению $\xi_T = 1$ соответствуют два материала – серебро и латунь. Применение металла в качестве материала тыловой акустической нагрузки сопряжено с пересмотром стандартных конструктивных решений, которые стандартно используются при изготовлении пьезоэлектрических преобразователей.

Итак, тыловая акустическая нагрузка, которую называют демпфером, на самом деле является важным элементом преобразователя. Назначение этого элемента – управление и

стабилизация частотных характеристик пьезоэлектрического преобразователя.

На рис. 4 показаны результаты вычислений коэффициента электромеханического преобразования, которые выполнены по формуле (72). Эпюры частотно зависимого изменения коэффициента $K_{ЭМ}(\omega, \rho, \Pi)$ построены для того же набора параметров, который был принят при расчете кривых, показанных на рис. 3. Радиус пьезокерамического диска $R = 1\text{ мм}$.

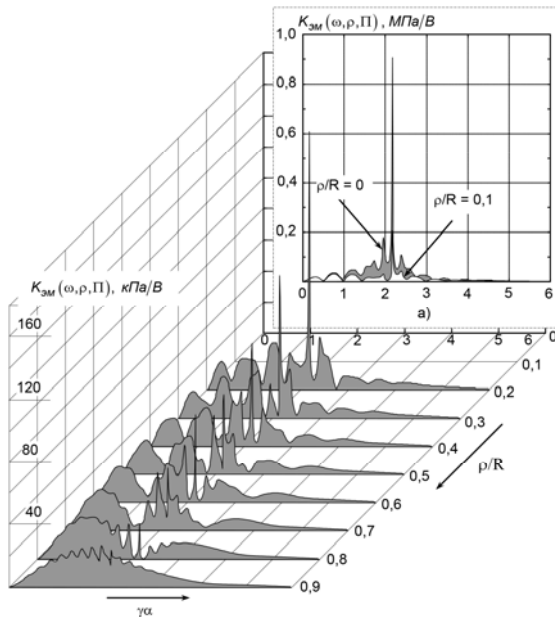


Рис. 4. Графики частотно зависимых изменений коэффициентов электромеханического преобразования на различных расстояниях от центра площадки механического контакта

По оси ординат на рис. 4 отсчитываются числовые значения модуля коэффициента электромеханического преобразования. По оси абсцисс - безразмерное волновое число γa . Каждая из эпюр построена для фиксированного

значения радиальной координаты ρ , которая задается в долях радиуса R пьезокерамического диска. Максимальные значения модуля коэффициента электромеханического преобразования довольно быстро спадают по мере удаления от центра ($\rho = 0$) площадки механического контакта. Для наглядности построения эпюр для фиксированных радиусов $\rho/R > 0,1$ две эпюры для $\rho/R = 0$ и $\rho/R = 0,1$ вынесены на отдельный фрагмент рис. 4. При $\rho/R = 1$ коэффициент $K_{ЭМ}(\omega, R, \Pi) = 0$. Таким образом, присутствие слоя согласующей жидкости обеспечивает дополнительные неоднородности частотной характеристики при фиксированном радиальном расстоянии от центра пьезокерамического диска и существенную неоднородность в радиальном направлении избыточных давлений на поверхности акустической нагрузки.

Отмеченные особенности формирования избыточных давлений на поверхности акустической нагрузки преобразователя, т. е. на поверхности металла, позволяют утверждать, что нельзя пренебрегать влиянием слоя согласующей жидкости на передаточные характеристики пьезоэлектрического преобразователя.

На рис. 5 показано влияние относительного акустического импеданса тыловой акустической нагрузки частотно зависимое изменение усредненного по площади механического контакта коэффициента электромеханического преобразования. Расчеты выполнялись по следующей формуле

$$\hat{K}_{ЭМ}(\omega, \Pi) = \frac{(a_{22} - a_{12})k_{ж}\delta}{1 + i\omega C_0^E Z_r F(\omega)} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta_k \delta) \sin(\beta_k \delta) q_k^2 \Delta_0(k)} \quad (73)$$

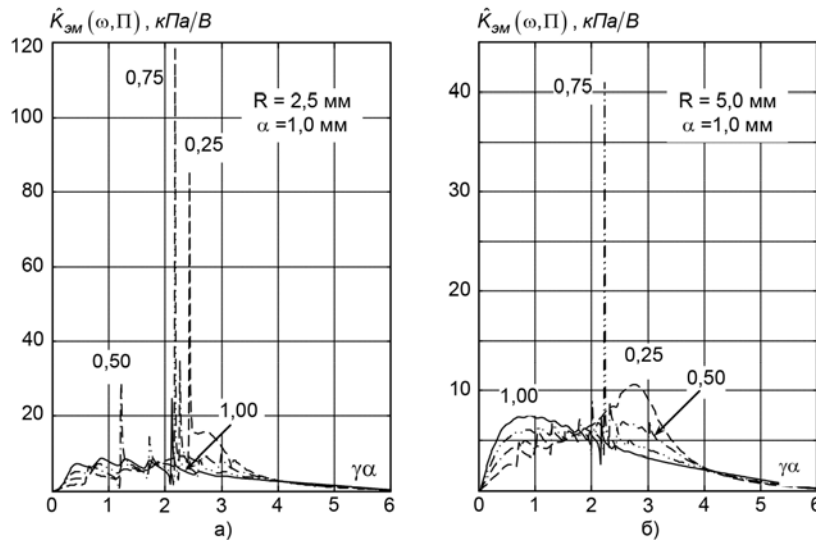


Рис. 5. Графики влияния относительного акустического импеданса тыловой акустической нагрузки на частотно зависимое изменение усредненного по площадке механического контакта коэффициента электромеханического преобразования

При вычислении функции $F(\omega)$ и при суммировании ряда в формуле (73) использовались первые двадцать нулей q_k функции Бесселя первого порядка. Набор параметров и, в частности, толщина согласующего слоя те же, что и при построении предыдущих графиков.

Вновь, как и при сравнительном анализе графиков для разности потенциалов U_0 , можно сделать вывод, что при относительном акустическом импедансе $\xi_T = 1$ наблюдаются минимальные неоднородности частотно зависимого изменения усредненного коэффициента электромеханического преобразования. При этом расширяется полоса частот, в пределах которой наблюдается один и тот же уровень электромеханического преобразования. Помимо этого отчетливо видно, что при одном и том же уровне разности потенциалов на выходе генератора эффективность электромеханического преобразования резко уменьшается с ростом радиуса пьезокерамического диска. Из этого следует, что пьезоэлектрические преобразователи, которые должны эффективно работать в максимально широкой полосе частот, должны изготавливаться из пьезокерамических дисков минимального радиуса с латунной тыловой акустической нагрузкой.

На рис. 6 показаны результаты расчетов усредненного по площади механического контакта коэффициента электромеханического преобразования для фиксированного по толщине

($\delta = 0,05 \text{ мм}$) слоя, который образован различными по своей добротности (вязкости) жидкостями. Числовые значения добротностей жидкостей проставлены цифрами возле соответствующих кривых. Хорошо видно, что изменение добротности, которая обратно пропорциональна динамической вязкости жидкости, в достаточно широких пределах практически не отражается на эффективности электромеханического преобразования. Если не принимать во внимание незначительное уменьшение ширины полосы частот, в пределах которой сохраняется одинаковая эффективность электромеханического преобразования, то можно утверждать, что применение максимально вязких жидкостей дает положительный эффект. При $Q_{jk} = 0,5$ (это вязкость в два-три раза большая вязкости глицерина) наблюдается минимальная неоднородность частотной характеристики. При этом можно ожидать минимальных нелинейностей фазочастотной характеристики преобразователя и, как следствие, минимальных искажений формы импульсных сигналов с нулевой постоянной составляющей в частотном спектре.

Показанные на рис. 6 результаты дают основание для следующего заключения. Практическое применение ультразвукового преобразователя контактного типа предполагает использование регламентированной согласующей жидкости со стабилизированными во времени физико-механическими характеристиками.

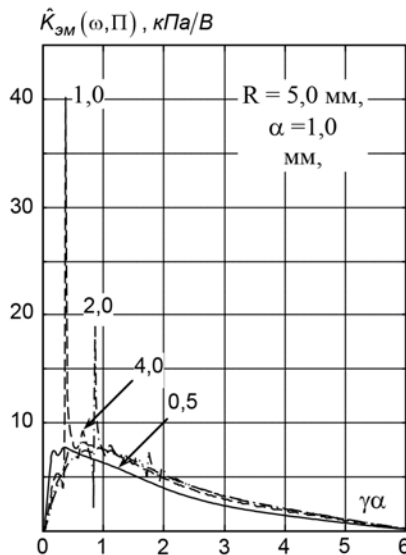


Рис. 6. Графики влияния вязкости согласующей жидкости на частотно зависимое изменение усредненного коэффициента электромеханического преобразования

На рис. 7 показаны результаты расчетов усредненного коэффициента электромеханического преобразования при различных толщинах слоя согласующей жидкости. Толщина слоя в микрометрах проставлена цифрами возле соответствующих кривых. Добротность жидкости $Q_{ж} = 5$. Из представленных результатов следует очевидный вывод – необходимо стремиться к минимальной толщине слоя согласующей жидкости. Кроме того, необходимо конструктивно обеспечить стабильность толщины этого слоя во время работы пьезоэлектрического преобразователя.

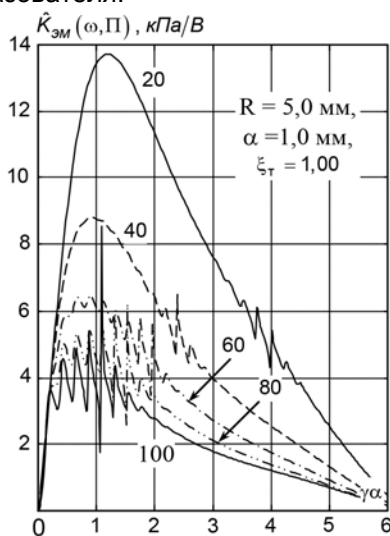


Рис. 7. Графики влияния толщины слоя согласующей жидкости на частотно зависимое изменение усредненного коэффициента электромеханического преобразования

Таким образом, так называемые мелочи, т. е. элементы конструкции пьезоэлектрического преобразователя, которые традиционно считались второстепенными, при более детальном рассмотрении приобретают роль элементов, которые формируют передаточные характеристики преобразователя.

Выводы

Основным результаты настоящей статьи можно сформулировать следующим образом.

Впервые построена математическая модель пьезоэлектрического преобразователя, которая максимально учитывает роль и влияние основных элементов его конструкции. В этой модели учитываются внутреннее сопротивление генератора электрических сигналов и, что самое существенное, влияние слоя согласующей жидкости. Полученные теоретические результаты позволяют по новому, более рационально, осуществлять конструирование ультразвуковых пьезоэлектрических преобразователей для неразрушающего контроля металлоизделий.

Список использованных источников

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наукова думка, 1981. – 283 с.
2. Данилов В. Н. К вопросу о расчете акустического поля прямого преобразователя с пьезопластинами различных форм // Дефектоскопия. – 2004. – № 2. – С. 3 – 15.
3. Данилов В. Н. К расчету АРД – диаграмм прямых преобразователей для отражателей сферической и цилиндрической форм // Дефектоскопия. – 2009. – № 8. – С. 38 – 55.
4. Данилов В. Н. Расчет акустического тракта дефектоскопа с прямыми круглыми преобразователями // Дефектоскопия. – 1996. – № 10. – С. 11 – 17.
5. Данилов В.Н. К расчету АРД-диаграмм прямого преобразователя с прямоугольной пьезопластиной и отражателями в виде круглых плоскодонных отверстий // Дефектоскопия. – 2010. – № 2. – С. 48 – 55.
6. Данилов В. Н., Ермолов И.Н. Расчет АРД – диаграммы по максимуму эхосигналов // Дефектоскопия. – 2000. – № 12. – С. 35 – 42.
7. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 567 с.
8. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.

9. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
10. *Петрищев О. Н.* Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса. Киев: Аверс, 2012. – 300 с.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
12. *Чабанов В. Е.* О публикациях, посвященных исследованию работы пьезопреобразователей // Дефектоскопия. – 1998. – № 12. – С. 58 – 67.
13. *Шарапов В. М. и др.* Электроакустические преобразователи / В. М. Шарапов, И. Г. Минаев, Ж. В. Сотула, Л. Г. Куницкая/ под ред. В. М. Шарапова – Москва: Техносфера, 2013. – 296 с.

Поступила в редакцию 22 января 2014 г.

УДК 534.131.1:534.232.082.73

В.М. Шарапов², д-р. техн. наук, **О.М. Петрищев**¹, д-р. техн. наук, **М.І. Романюк**¹, **Ж.В. Сотула**², канд. техн. наук

¹Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

²Черкаський державний технологічний університет, бульв. Шевченко, 460, м.Черкаси, 18006, Україна.

Методика розрахунку передатних характеристик п'єзокерамічного перетворювача у режимі випромінювання ультразвукових хвиль. Розрахунок коефіцієнта електромеханічного перетворення

В роботі дано визначення передатної характеристики ультразвукового п'єзоелектричного перетворювача та виконано розрахунок коефіцієнта електромеханічного перетворення з електричного входу на механічний бік п'єзоелектричного перетворювача. Вперше розглянуто питання про вплив шару узгоджуючої рідини на частоту залежну зміну коефіцієнта електромеханічного перетворення. Якщо площадка механічного контакту з акустичним навантаженням має кінцеві розміри, то шар узгоджуючої рідини є резонатором радіальних коливань та суттєво впливає на частотну характеристику п'єзоелектричного випромінювача. Бібл. 13, рис 7.

Ключові слова: передатні характеристики електроакустичного перетворювача, товщинні коливання, п'єзокерамічний диск, гармонійні коливання шару рідини.

UDC 534.131.1:534.232.082.73

V.M. Sharapov², Dr.Sc., **O.N. Petrishchev**¹, Dr.Sc., **M.I. Romanyuk**¹, **Zh.V. Sotula**², Ph.D.

¹National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", st. Polytechnique, 16, Kyiv, 03056, Ukraine.

²Cherkasy State Technological University, Shevchenko Blvd, 460, Cherkasy, 18006, Ukraine.

Method for calculation of piezoceramic transducer transmission characteristics in the mode of ultrasonic waves radiation. Part 1. Calculating the coefficient of electromechanical conversion

Definition for transmission characteristic of ultrasonic piezoelectric transducer is given in article and calculation of electromechanical transformation coefficient from electric input to the mechanic side of piezoelectric transducer is accomplished. Question of influence of liquid contact layer to frequency-dependent variation of electromechanical transformation coefficient is described in first time. In case then

area of mechanical contact with acoustic load have a finite size the liquid contact layer is the resonator of radial oscillation and it render a significant influence to frequency characteristic of piezoelectric oscillator. References 13, figures 7.

Keywords: transmission characteristics of the electro-acoustic transducer, the thickness fluctuations, piezoceramic disk, harmonic oscillations of the liquid layer.

References

1. Grinchenko V. T, Meleshko V. V (1981), «Harmonic Waves in elastic bodies». Kiev, Naukova Dumka. – P. 283 (Rus)
2. Danilov V.N. (2004), «On the direct calculation of the acoustic field with the adjustable piezoplates of various forms». Defectscopy, No 2. Pp. 3-15. (Rus)
3. Danilov V.N. (2009), «To calculation DGS diagrams direct converters for reflectors of spherical and cylindrical forms». Defectscopy. No 8. Pp. 38-55. (Rus)
4. Danilov V.N. (1996), «Calculation of the acoustic channel flaw detector with straight round converters». Defectscopy, No 10. Pp. 11-17. (Rus)
5. Danilov V.N. (2010), «On the calculation of DGS diagrams direct converter with a rectangular piezoceramic plates and reflectors in the form of round flat-bottomed holes». Defectscopy, No 2. Pp. 48-55. (Rus)
6. Danilov V.N, Ermolov I.N. (2000), «Calculation DGS-diagrams for the maximum echo». Defectscopy, No 12. Pp. 35 – 42. (Rus)
7. Donnell L.G. (1982), «Beams, plates and shells». Moscow, Nauka, P. 567. (Rus)
8. Koshliakov N.S., Gleaner E.B., Smirnov M.M. (1970), «Partial differential equations of mathematical physics». Moscow, Higher School, P. 710. (Rus)
9. Novatskiy V. (1986), «Electromagnetic effects in solids». Moscow, Mir. P. 160. (Rus)
10. Petrishchev O.N. (2012), «Harmonics piezoceramic elements. Part 1. Harmonic oscillations of piezoelectric elements in a vacuum and the method of resonance – antiresonance». Kiev: Avers, P. 300. (Rus)
11. Prudnikov A.P., Brychkov Ya.A. Marichev O.I. (1983), «Integrals and series. Special functions». Moscow: Nauka. P. 752. (Rus)
12. Chabanov V.E. (1998), «On publications directed to the study of piezoelectric transducers» // Defectscopy. No 12. Pp. 58 – 67.
13. Sharapov V.M., V.M. Sharapov, I.G. Minayev, Zh.V. Sotula, L.G. Kunitsky. (2013), «Electro-acoustic transducer». ed. V.M. Sharapov. Moscow: Technosphere. P.296.