

Теорія сигналів і систем

УДК 621. 3. 011: 621. 314

Ю.С. Петергеря, д-р техн. наук, Є.С. Пічкальов, Т.О. Терещенко, д-р техн. наук

Аналіз стійкості замкнених систем на базі квантового алгоритму Дойча-Джоза

Предложен способ определения устойчивости замкнутых систем авторегулирования с использованием квантового алгоритма Дойча-Джоза. Расширен перечень функций используемых в алгоритме Дойча-Джоза. Проанализирована устойчивость замкнутой системы с использованием квантового алгоритма.

The way of definition of stability of the closed systems of auto regulation with use of quantum algorithm Doycha-Dzhoza is offered. The list of functions of Doycha-Dzhoza used in an algorithm is extended. Stability of the closed system is analysed with the use of quantum algorithm.

Ключевые слова: квантовый алгоритм, алгоритм Дойча-Джоза, замкнутая система авторегулирования, устойчивость.

Вступ

Нині активно розвивається порівняно новий тип техніки – квантовий комп'ютер, особливістю якого є прискорення процесу розв'язку задач, що пов'язане з природою квантових елементів – кубітів [1, 2]. Для квантових алгоритмів є характерним збільшення інформаційного об'єму обробки сигналів на декілька порядків. Така особливість квантових алгоритмів дає змогу вирішувати важливі наукові та практичні задачі по зменшенню перехідного процесу в замкнених системах, наприклад, системах курсового автопілоту літака та системах автоматичної стабілізації заданих параметрів технологічного процесу. Для цього в таких системах необхідно збільшувати коефіцієнт зворотного зв'язку, проте це може призвести до втрати системою стійкості [3]. Тому важливо швидко визначати стійкість системи і у випадку її відсутності здійснювати регулюючий вплив на коефіцієнт підсилення для досягнення стійкості системи автоматичного регулювання.

При аналізі стійкості замкнених систем автоматичного регулювання використовують теорему прямого методу Ляпунова [3].

Робота полягає в зменшенні часу визначення стійкості системи шляхом застосування квантового алгоритму Дойча-Джоза.

Алгоритм Дойча-Джоза

Задача Дойча-Джоза полягає у визначенні, чи є функція двійкової змінної $f(x)$ постійною чи змінною [1]. Постійна функція приймає значення 0 (або 1) при будь-яких аргументах. Змінна – приймає значення 0 та 1 залежно від значення x . При цьому аргумент приймає лише два можливих значення 0 та 1.

При розв'язуванні даної задачі без використання квантового алгоритму необхідно провести, щонайменше два обчислення – знайти значення $f(0)$ і $f(1)$. При використанні квантової схеми завдяки взаємозв'язку між кубітами достатньо тільки однієї операції [2].

В найпростішому випадку для розв'язання поставленої задачі використовують два кубіти.

Квантовий біт або кубіт – це найменший дворівневий елемент для зберігання інформації в квантовому комп'ютері.

У класичному комп'ютері біт є найменшим елементом для зберігання інформації, і він може знаходитися в двох станах 0 та 1. Аналогічно до класичного біта двома можливими станами кубіту є $|0\rangle$ і $|1\rangle$. Різниця між кубітами та бітами полягає в тому, що кубіт може знаходитися в суперпозиції власних станів:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

де α і β будь-які комплексні числа, що задовольняють умові $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Перший кубіт є основним, його стан описується як $|x\rangle$ – вхід квантового комп'ютера. Другий кубіт є допоміжним і його стан описується як $|y\rangle$.

На рис. 1 зображена квантова схема алгоритму Дойча-Джоза, яка містить два кубіти, чотири гейта Адамара H та оракул $\hat{U}$ [1].

Квантовий комп'ютер проводить над двома кубітами наступну операцію:

$\hat{U}\{|x\rangle \otimes |y\rangle\} \Rightarrow |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle$, де операції $\oplus$, $\otimes$ – модулярне додавання та модулярне множення по модулю два [4].

На початку алгоритму кубіт $|x\rangle$ знаходиться в стані $|0\rangle$, а кубіт $|y\rangle$ у стані $|1\rangle$. Стан пари кубітів описується суперпозицією

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle.$$

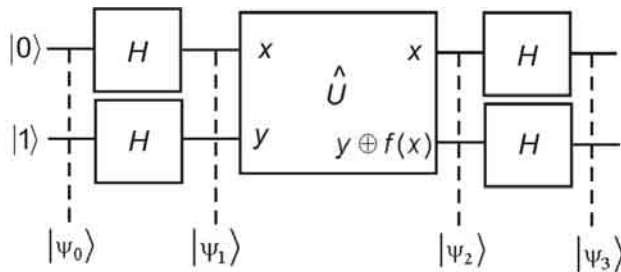


Рис. 1. Квантова схема алгоритму Дойча-Джоза

В результаті дії гейтів Адамара H формується наступна суперпозиція станів кубітів:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle).$$

Після дії оператора $\hat{U}$ стан системи в загальному вигляді визначається наступним чином:

$$\hat{U}[|x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)] = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{f(x)} \cdot |x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle).$$

Тоді стан кубітів буде мати вигляд:

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(-1)^{f(0)} \cdot (|0\rangle + (-1)^{f(1) \oplus f(0)} |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle).$$

Вихідний стан пари кубітів описується суперпозицією

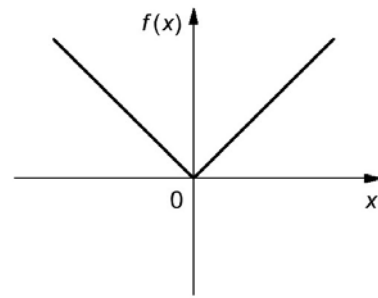
$$|\psi_3\rangle = \pm |f(0) \oplus f(1)\rangle \otimes |1\rangle = \begin{cases} \pm |01\rangle, & f(0) = f(1); \\ \pm |11\rangle, & f(0) \neq f(1). \end{cases} \quad (1)$$

З виразу (1) видно, що якщо стан першого кубіта на виході $|0\rangle$, то функція постійна, якщо $|1\rangle$ – змінна. При цьому не обчислюється значення функції, тобто квантовий комп'ютер виділяє «глобальну інформацію» з суперпозиції станів. Використання квантового алгоритму дозволяє завдяки лише одному обчисленню визначити, що функція є постійною або змінною.

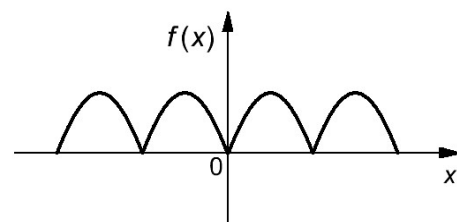
Алгоритм аналізу стійкості замкнених систем

Розглянемо застосування алгоритму Дойча-Джоза для аналізу стійкості замкненої системи у відповідності до методів Ляпунова. При проведенні аналізу визначають до якого з типів відноситься досліджувана функція – знаковизначена, знаковизначена чи знакопостійна функції. Знаковизначена функція для будь-яких значень аргументів зберігає свій знак і обертається в нуль тільки на початку координат, наприклад: $f(x) = |x|$ (рис. 2, а). Знаковизначена функція

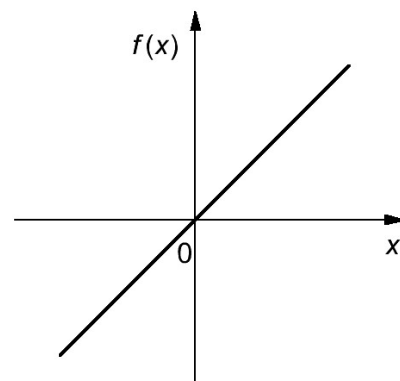
може бути позитивно або негативно визначена. Якщо функція зберігає той самий знак при будь-яких значеннях змінних, але обертається в нуль не тільки на початку координат, то вона називається знакопостійною (позитивною чи негативною). Прикладом є функція, що описується рівнянням $f(x) = |\sin(x)|$ (рис. 2, б). Якщо ж функція в деякій області не зберігає свій знак, то вона називається знакозмінною, наприклад: $f(x) = x$ (рис. 2, в).



а



б



в

Рис. 2. Знаковизначена (а), знакопостійна (б) і знакозмінна (в) функції

Пропонується такий алгоритм аналізу стійкості замкненої системи:

- визначити систему рівнянь, які будуть описувати роботу системи;
- задати знаковизначену функцію Ляпунова;
- отримати похідну від функції Ляпунова;

- проаналізувати за допомогою квантового алгоритму чи є функція похідної знаковизначеною і протилежною за знаком до функції Ляпунова;
- на базі теореми Ляпунова [3] про стійкість (або теореми про асимптотичну стійкість) визначити чи є дана система стійкою (асимптотично стійкою) або є нестійкою.

Для визначення властивостей функції похідної виконують її аналіз з використанням алгоритму Дойча-Джоза. Спочатку використовують квантовий алгоритм для одновимірної функції, який визначає чи є функція похідної знаковизначеною чи ні. Якщо функція знаковизначена, то система нестійка і аналіз стійкості завершений. У протилежному випадку визначається знак функції. При однакових знаках функції Ляпунова та похідної робиться висновок, що система нестійка. При протилежних знаках продовжується аналіз стійкості, який пов'язаний з розрізненням знаковизначеної та знакопостійної функції за допомогою багатовимірного квантового алгоритму Дойча-Джоза. У разі, коли функція похідної є знаковизначеною – система асимптотично стійка, якщо вона знакопостійна – стійка.

Застосування квантового алгоритму аналізу стійкості

Замкнена система (рис. 3) внаслідок дії дестабілізуючих факторів, наприклад, зміни параметрів системи або дії зовнішнього впливу, може переходити в нестійкий стан.



Рис. 3. Загальна схема авторегулювання

Задачею системи регулювання є забезпечення стійкого стану системи при максимально можливому коефіцієнті підсилення.

Розглянемо алгоритм роботи системи регулювання (рис. 4). Вихідний сигнал аналізується квантовим комп'ютером згідно з квантовим алгоритмом Дойча-Джоза та визначаються умови стійкості у відповідності до теорем Ляпунова. Робота блоків модифікації оракула та аналізу за допомогою алгоритму Дойча-Джоза, що є не-

розривно зв'язаними, складається з двох етапів. На першому етапі блок модифікації оракула від'ємним значенням функції похідної Ляпунова $f(x)$ ставить у відповідність значення нуля, а нульовим та позитивним – значення одиниці. Алгоритм Дойча-Джоза аналізує функцію за критерієм знакозмінності. Якщо досліджувана функція знакозмінна, то система нестійка, у протилежному випадку аналізується знак функції і, якщо похідна та вихідна функція Ляпунова одного знаку – система нестійка. При протилежному знаку цих функцій необхідний другий етап аналізу, на якому блок модифікації оракула додатним значенням функції ставить у відповідність одиницю, а нульові залишає без зміни. На цьому етапі визначається якою є функція похідної – знакопостійною чи знаковизначеною. Якщо функція похідної є знаковизначеною, то система асимптотично стійка, якщо знакопостійна – стійка.

Якщо система визначена як стійка, то формується сигнал керування, що збільшує коефіцієнт підсилення. Якщо ж система нестійка, то коефіцієнт підсилення зменшується і система виходить з нестійкого стану. Аналіз вихідного сигналу потребує деякого часу. При аналізі вихідного сигналу замкненої системи класичними методами такий час аналізу параметрів системи може бути настільки великим, що система не вийде з нестійкого стану. Застосування квантового комп'ютера дозволить уникнути таких ситуацій, оскільки аналіз стійкості системи за допомогою квантового алгоритму потребує значно менше часу – при застосуванні одновимірного алгоритму Дойча-Джоза в два рази, багатовимірного – в 2^n разів [1]. Зменшення часу аналізу пояснюється тим, що в класичних методах при аналізі функції потрібно виконати мінімум два обчислення значення функції.

Використання алгоритму Дойча-Джоза дозволяє виконати аналіз функції в одновимірному випадку лише за одне обчислення. У n -вимірному випадку при використанні квантового алгоритму час аналізу зменшується в 2^n разів у порівнянні з класичними методами. При цьому забезпечується максимально можливий коефіцієнт зворотного зв'язку замкненої системи.

Приклад.

Нехай нелінійна замкнена система авторегулювання описується наступними рівняннями в матричній формі:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ay + b\xi; \\ \frac{d\xi}{dt} = \Phi(\sigma); \\ \sigma = cy - r\xi. \end{cases} \quad (2)$$

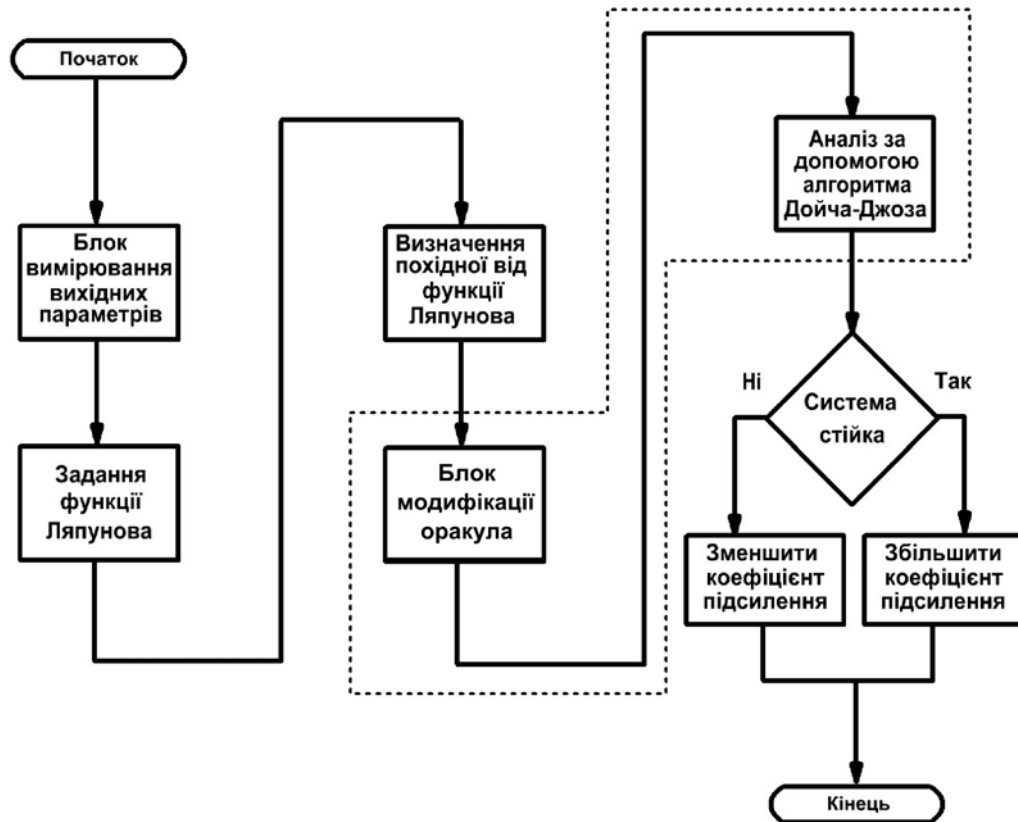
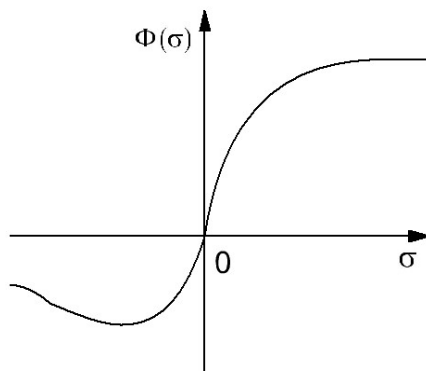


Рис. 4. Алгоритм роботи системи регулювання замкненої системи

Нелінійна функція $\Phi(\sigma)$ (рис. 5) має довільну непарно-симетричну форму, що задовольняє умовам

- а) $\Phi(\sigma)|_{\sigma=0} = 0$;
- б) $\sigma \cdot \Phi(\sigma) > 0$ при $\sigma \neq 0$.

Рис. 5. Вигляд нелінійної функції $\Phi(\sigma)$

Будемо вважати, що лінійна частина системи стійка, тобто $a < 0$.

Введемо нову змінну

$$z = ay + b\xi. \quad (3)$$

Тоді

$$\frac{dz}{dt} = a \frac{dy}{dt} + b \frac{d\xi}{dt}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = c \frac{dy}{dt} - r \frac{d\xi}{dt}.$$

З урахуванням співвідношення (3) вихідну систему рівнянь (2) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = az + b\Phi(\sigma); \\ \frac{d\sigma}{dt} = c\sigma - r\Phi(\sigma). \end{cases} \quad (4)$$

При цьому повинна виконуватися умова не-виродженості загальної матриці системи:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & -r \end{vmatrix} \neq 0. \quad (5)$$

Функцію Ляпунова виберемо в наступному вигляді:

$$V(z, \sigma) = hz^2 + \int_0^\sigma \Phi(\sigma) d\sigma, \quad h > 0. \quad (6)$$

Як видно з формули (6) та рис. 4 функція Ляпунова є знаковизначеною і додатною.

Похідна функції Ляпунова визначається як

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{dV}{dt} = 2hz \frac{dz}{dt} + \Phi(\sigma) \frac{d\sigma}{dt} = \\ &= 2ahz^2 + 2\Phi(\sigma)z(bh + c/2) - r\Phi^2(\sigma). \end{aligned}$$

Функція $f(t)$ подається на блок модифікатора оракула який ставить у відповідність від'ємним значенням функції – 0, а додатним – 1. Похідна функції Ляпунова після перетворення модифікатором оракула аналізується квантовим алгоритмом Дойча-Джоза (рис. 4).

Розглянемо можливі випадки.

1. Похідна функції Ляпунова на всьому визначеному проміжку від'ємна і не приймає значення нуля. На першому етапі аналізу блок модифікації оракула додатним значенням функції похідної Ляпунова $f(x)$ ставить у відповідність значення нуля, а нульовим та від'ємним – значення одиниці (рис. 6). У точках $|x\rangle = |0\rangle$ та $|x\rangle = |1\rangle$ проводиться дослідження функції $f(x)$ оракулом $\hat{U}$ (рис. 1).

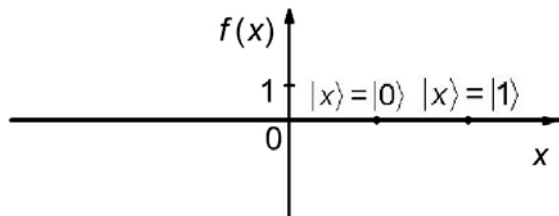


Рис. 6. Точки аналізу досліджуваної функції одним кубітом $|x\rangle$

Тоді у відповідності до формули (1) стан пари кубітів описуватиметься наступним рівнянням:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} \cdot |f(0) \oplus f(1)\rangle \otimes |1\rangle = -|01\rangle, \quad (7)$$

де $f(1) = f(0) = 1$.

Таким чином стан першого кубіта рівний $|0\rangle$, а отже похідна функції є не знакозмінною функцією, протилежною за знаком до функції Ляпунова. Згідно з алгоритмом проводиться другий етап аналізу. Блок модифікації оракула від'ємним значенням функції ставить у відповідність одиницю, а нульові залишає без зміни.

При повторному аналізі функції похідної отримуємо стан двох кубітів, який ідентичний отриманому в рівнянні (7).

Стан першого кубіта рівний $|0\rangle$, а отже похідна функції є знаковизначеною функцією, протилежною за знаком до функції Ляпунова.

Тому у відповідності до теорем Ляпунова система асимптотично стійка.

2. Похідна функції Ляпунова не змінює свій знак на визначеному проміжку, але приймає значення нуля, окрім початку координат. Тоді у відповідності до формули (1) стан пари кубітів описуватиметься наступним рівнянням:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} \cdot |f(0) \oplus f(1)\rangle \otimes |1\rangle = -|01\rangle,$$

де $f(1) = f(0) = 1$.

Стан першого кубіта рівний $|0\rangle$, а отже похідна функції є не знакозмінною функцією, протилежною за знаком до функції Ляпунова. Згідно з алгоритмом проводиться повторний аналіз.

При повторному аналізі функції похідної отримуємо суперпозицію станів двох кубітів:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} \cdot |f(0) \oplus f(1)\rangle \otimes |1\rangle = \pm|11\rangle,$$

де $f(1) = 1, f(0) = 0$.

Стан першого кубіта рівний $|1\rangle$, а отже похідна функції є знакопостійною функцією, протилежною за знаком до функції Ляпунова. Тому робимо висновок, у відповідності до теорем Ляпунова, що система стійка.

3. Похідна функції Ляпунова на всьому визначеному проміжку додатна і приймає значення нуля, окрім початку координат. У відповідності до формули (1) стан пари кубітів описуватиметься наступним рівнянням:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} \cdot |f(0) \oplus f(1)\rangle \otimes |1\rangle = +|01\rangle,$$

де $f(1) = f(0) = 0$.

Таким чином стан першого кубіта рівний $|0\rangle$, а отже похідна функції Ляпунова є не знакозмінною функцією, але не протилежна за знаком до функції Ляпунова. Тому робимо висновок, у відповідності до теорем Ляпунова, що система нестійка.

4. Похідна функції Ляпунова на визначеному проміжку змінює знак. Тоді у відповідності до формули (1) стан пари кубітів описуватиметься наступним рівнянням:

$$|\psi_3\rangle = (-1)^{f(0)} \cdot |f(0) \oplus f(1)\rangle \otimes |1\rangle = \pm|11\rangle,$$

де $f(1) = 1, f(0) = 0$.

Стан першого кубіта рівний $|1\rangle$, а отже похідна функції є знакозмінною функцією. Тому робимо висновок, що система нестійка.

Висновки

Проведено адаптацію квантового алгоритму Дойча-Джоза стосовно задачі аналізу стійкості замкнених систем. Розширено перелік функцій, які здатен використовувати квантовий алгоритм Дойча-Джоза – знакозмінною, знаковизначеною та знакопостійною функціями.

Перевага запропонованого способу визначення стійкості замкненої системи на базі квантового алгоритму Дойча-Джоза полягає в зменшенні часу визначення параметрів системи у два

рази при використанні одновимірного квантового алгоритму та в 2^n при аналізі параметрів з використанням багатовимірного алгоритму.

Застосування квантового комп'ютера в системі керування дає змогу досліджувати стійкість замкненої системи авторегулювання в реальному часі та забезпечити максимальний коефіцієнт зворотного зв'язку при наявності дестабілізуючих факторів, як-то зміни параметрів або наявності зовнішнього впливу.

Література

1. *Нильсен М., Чанг И.* Квантовые вычисления и квантовая информация: Пер. с англ. – М.: Мир, 2006. – 824 с.
2. *Валиев К.А., Кокин А.А.* Квантовые компьютеры: надежда и реальность. – Ижевск: РХД, 2001. – 352 с.
3. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972. – 768 с.
4. *Жуйков В.Я., Терещенко Т.А., Петергеря Ю.С.* Преобразования дискретных сигналов на конечных интервалах в ориентированном базисе. – К.: Аверс, 2004. – 274 с.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Поступила в редакцію 18 апреля 2008 г.