

УДК 534.121.1:534.232.082.73

В.С. Дидковский<sup>1</sup>, д-р техн. наук, А.Е. Климов<sup>2</sup>, канд. техн. наук, А.Г. Лейко<sup>1</sup>, д-р техн. наук, О.Н. Петрищев<sup>1</sup>, д-р техн. наук

## Радиальные колебания цилиндрической пьезокерамической оболочки

Построена математическая модель гармонических осесимметричных радиальных колебаний пьезокерамической оболочки конечной высоты. Выполнен расчет электрического импеданса оболочки в режиме обратного пьезоэлектрического эффекта. Показано, что в окрестности радиальной и первой аксиальной резонансных частот наблюдается хорошее совпадение теоретических и экспериментальных значений электрического импеданса колеблющейся оболочки.

In this paper the mathematical model of harmonic radial axisymmetrical oscillation for the piezoelectrical shell of finite height is presented. The calculation of the electric impedance of the shell in converse piezoelectrical effect mode is provided. It is shown that the theoretical and experimentally obtained values of the electric impedance have a strong correspondence in the regions of radial and fundamental axial resonance frequencies.

**Ключевые слова:** пьезокерамика, толщинная поляризация, оболочка конечной высоты, радиальные колебания, электрический импеданс, электромеханический резонанс, электромеханический антирезонанс.

### Введение

В прикладной акустике, особенно связанной с возбуждением звуковых колебаний в жидкости, широкое применение нашли круговые цилиндрические преобразователи [1]. В качестве активного элемента при их построении обычно используются сплошные или секционированные оболочки конечной высоты. Стандартная схема построения цилиндрических преобразователей предусматривает вертикальный набор конечного числа таких оболочек в единой конструкции [2], что позволяет путем их электрической коммутации по определенной схеме формировать направленные свойства преобразователей как по ширине основного лепестка, так и по уровню боковых лепестков. При этом важную роль играет выбор отношения между диаметром оболочки и её высотой, поскольку он определяет соотношение частот резонансов мод различного вида и связанную с этим энергетическую эффективность упругих колебаний оболочек на

той моде, которая выбрана в качестве рабочей для преобразователя в целом. В связи с тем, что в круговых цилиндрических преобразователях используются, как правило, радиальные колебания, возникает необходимость в развитии теории гармонических радиальных колебаний пьезокерамических оболочек конечной высоты. Построению приближенной математической модели таких колебаний и посвящена данная работа.

### Постановка задачи

Рассмотрим находящуюся в вакууме цилиндрическую пьезокерамическую оболочку, сопряженную с цилиндрической системой координат  $(\rho, \vartheta, z)$  так, как это показано на рис. 1. Высота оболочки  $2h$ , радиус срединной поверхности –  $R_0$ , толщина –  $2\alpha$ . Естественно, что размеры оболочки удовлетворяют сильному неравенству  $2\alpha \ll (R_0, 2h)$ . Боковые поверхности керамической оболочки  $\rho = R_0 \pm \alpha$  металлизированы и к ним от внешнего генератора прикладывается гармонически изменяющаяся во времени по закону  $e^{i\omega t}$  ( $i = \sqrt{-1}$ ;  $\omega$  – круговая частота;  $t$  – время) разность электрических потенциалов с амплитудным значением  $U_0$ .

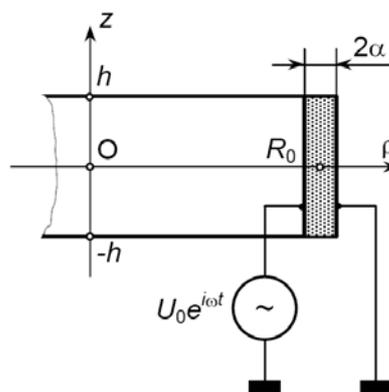


Рис. 1. Расчетная схема цилиндрической пьезокерамической оболочки

Материал оболочки поляризован в радиальном направлении. Это означает, что матрицы материальных констант пьезокерамики имеют следующие конструкции:

а) матрица адиабатических модулей упругости  $c_{\beta\lambda}^E$  ( $\beta, \lambda = 1, 2, \dots, 6$  – индексы Фойгта) в режиме постоянства напряженности электрического поля

$$|c_{\beta\lambda}^E| = \begin{vmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{22}^E & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44}^E & 0 & 0 \\ & & & & c_{55}^E & \\ & & & & & c_{55}^E \end{vmatrix}; \quad (1)$$

б) матрица адиабатических пьезоэлектрических модулей  $e_{k\beta}$  ( $k = 1, 2, 3$ ;  $\beta = 1, 2, \dots, 6$ )

$$|e_{k\beta}| = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{26} & 0 \end{vmatrix}; \quad (2)$$

в) матрица адиабатических диэлектрических проницаемостей  $\chi_{ij}^\varepsilon$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ), измеряемых в режиме постоянства деформации

$$|\chi_{ij}^\varepsilon| = \begin{vmatrix} \chi_{11}^\varepsilon & 0 & 0 \\ & \chi_{22}^\varepsilon & 0 \\ & & \chi_{22}^\varepsilon \end{vmatrix}. \quad (3)$$

При записи матриц (1)–(3) одинаковыми символами обозначены равные по величине элементы. Между справочными величинами  $c_{\beta\lambda}^{E \text{спр}}$ ,  $e_{k\beta}^{\text{спр}}$  и  $\chi_{ij}^{\varepsilon \text{спр}}$ , которые приводятся для случая, когда ось Oz совпадает с направлением вектора напряженности поляризующего пьезокерамику поля, и элементами матриц (1)–(3) имеют место следующие соотношения:  $c_{11}^E = c_{33}^{E \text{спр}}$ ;  $c_{22}^E = c_{11}^{E \text{спр}}$ ;  $c_{12}^E = c_{13}^{E \text{спр}}$ ;  $c_{13}^E = c_{12}^{E \text{спр}}$ ;  $c_{44}^E = (c_{11}^{E \text{спр}} - c_{12}^{E \text{спр}})/2$ ;  $c_{55}^E = c_{55}^{E \text{спр}}$ ;  $e_{11} = e_{33}^{\text{спр}}$ ;  $e_{12} = e_{31}^{\text{спр}}$ ;  $e_{26} = (e_{33}^{\text{спр}} - e_{31}^{\text{спр}})/2$ ;  $\chi_{11}^\varepsilon = \chi_{33}^{\varepsilon \text{спр}}$ ;  $\chi_{22}^\varepsilon = \chi_{11}^{\varepsilon \text{спр}}$ .

Генератор разности электрических потенциалов создает внутри оболочки осесимметричное электрическое поле, вектор напряженности которого гармонически изменяется во времени и практически полностью определяется радиальным компонентом  $E_\rho(t) = E_\rho e^{i\omega t}$ , где  $E_\rho$  – амплитудное значение. Под действием электрического поля в объеме оболочки возникают осесимметричные деформации, которые

формируются радиальными  $u_\rho(t)$  и аксиальными  $u_z(t)$  смещениями материальных частиц. Компоненты  $u_\rho(t)$  и  $u_z(t)$  вектора смещения изменяются во времени по гармоническому закону  $u_\beta(t) = u_\beta e^{i\omega t}$  ( $\beta = \rho, z$ ), а их амплитудные значения  $u_\rho$  и  $u_z$  зависят от координат точки наблюдения  $\rho$  и  $z$  (от окружной координаты  $\vartheta$  зависимости нет) и удовлетворяют уравнениям установившихся гармонических колебаний следующего вида [3]:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho} - \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\rho} + \rho_0 \omega^2 u_\rho = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho} + \rho_0 \omega^2 u_z = 0, \quad (5)$$

где  $\sigma_{\lambda\beta}$  ( $\lambda, \beta = \rho, \vartheta, z$ ) – амплитудные значения гармонически изменяющихся во времени результирующих механических напряжений в объеме деформируемой электрическим полем пьезокерамической оболочки;  $\rho_0$  – плотность пьезокерамики. Амплитудные значения результирующих напряжений  $\sigma_{\lambda\beta}$  определяются обобщенным законом Гука для упругой среды с усложненными (пьезоэлектрическими) свойствами [4]. С учетом структуры матриц материальных констант (1) и (2) соотношения для расчета величин  $\sigma_{\lambda\beta}$  запишем в следующем виде:

$$\sigma_{\rho\rho} = c_{11}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + c_{13}^E \varepsilon_{zz} - e_{11} E_\rho; \quad (6)$$

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = c_{12}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{22}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + c_{12}^E \varepsilon_{zz} - e_{12} E_\rho; \quad (7)$$

$$\sigma_{zz} = c_{13}^E \varepsilon_{\rho\rho} + c_{12}^E \varepsilon_{\vartheta\vartheta} + c_{22}^E \varepsilon_{zz} - e_{12} E_\rho; \quad (8)$$

$$\sigma_{\rho z} = \sigma_{z\rho} = c_{55}^E \left( \frac{\partial u_\rho}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \rho} \right), \quad (9)$$

где  $\varepsilon_{\beta\beta}$  ( $\beta = \rho, \vartheta, z$ ) – амплитудные значения гармонически изменяющихся во времени деформаций (относительных удлинений) бесконечно малых отрезков ориентированных вдоль соответствующих координатных линий. В случае осевой симметрии формулы для расчета деформаций через компоненты вектора смещения материальных частиц среды имеют вид

$$\varepsilon_{\rho\rho} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho}; \quad \varepsilon_{\vartheta\vartheta} = \frac{u_\rho}{\rho}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (10)$$

Так как оболочка колеблется в вакууме, то, в соответствии с третьим законом Ньютона, на её поверхности должны выполняться такие условия:

$$(\sigma_{\rho\rho}, \sigma_{\rho z}) \Big|_{\rho=R_0 \pm \alpha} = 0; \quad (11)$$

$$(\sigma_{zz}, \sigma_{z\rho}) \Big|_{z=\pm h} = 0. \quad (12)$$

Таким образом, математическое описание гармонических колебаний пьезокерамической оболочки, возбуждаемых при помощи генератора разности электрических потенциалов, сводится к решению граничной задачи формируемой дифференциальными уравнениями (4), (5) и условиями (11) и (12) на границе области существования решений, т. е. граничными условиями.

Дополнить изложенную выше постановку задачи необходимо следующими рассуждениями.

Степень адекватности любых математических моделей реальным объектам и происходящим в них процессам устанавливается в результате выполнения соответствующих экспериментов. При этом возникает подчас трудно разрешимая проблема учета влияния свойств и характеристик измерительных приборов на результаты измерений. По удачному стечению обстоятельств, эксперименты по исследованию вынужденных колебаний пьезокерамических объектов в режиме обратного пьезоэлектрического эффекта можно реализовать с минимальным набором простейшей измерительной аппаратуры и без каких-либо осложняющих ситуацию проблем.

Еще С. Баттерворт (Stephen Butterworth) (см. сноску на с. 314 в монографии [5]) в 1915 г. теоретически показал, что электромеханическая система, совершающая колебания за счет энергии источника разности электрических потенциалов, потребляет электрический ток как совокупность пассивных элементов  $L$  (индуктивность),  $C$  (электрическая емкость) и  $R$  (электрическое сопротивление), соединенных тем или иным способом. Естественно, что колеблющаяся пьезоэлектрическая оболочка не является исключением из этого общего правила.

Электрический импеданс  $Z_{эл}$  пьезокерамической оболочки определяется в соответствии с законом Ома:  $Z_{эл} = U_0/I$ , где  $I$  – амплитуда переменного тока в проводниках, которые соединяют электродированные поверхности оболочки с генератором разности электрических потенциалов (рис. 1). Очевидно, что  $I = i\omega Q_{эл}$ , где  $Q_{эл}$  – амплитудное значение электрического заряда на электродированных поверхностях оболочки. Электрический заряд  $Q_{эл}$  на поверхности  $S$  определяется через нормальный к данной поверхности компонент вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  следующим образом [6]:

$$Q_{эл} = \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}, \quad (13)$$

где  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ ;  $\mathbf{n}$  – вектор единичной нормали к элементу поверхности  $dS$ . Применительно к рассматриваемой ситуации соотношение (13) можно представить в виде

$$Q_{эл} = 2\pi R_0 \int_{-h}^h D_{\rho} dz, \quad (14)$$

где  $D_{\rho}$  – амплитуда гармонически изменяющегося во времени радиального компонента вектора электрической индукции деформируемого электрическим полем пьезоэлектрика, который определяется законом электрической поляризации диэлектриков с усложненными свойствами [3] и для данной ситуации рассчитывается по формуле

$$D_{\rho} = \epsilon_{11}\epsilon_{\rho\rho} + \epsilon_{12}\epsilon_{\rho\rho} + \epsilon_{12}\epsilon_{\rho\rho} + \chi_{11}^{\epsilon} E_{\rho}. \quad (15)$$

Подставляя выражение (15) в формулу (14), а полученный результат в определение электрического импеданса  $Z_{эл}$ , получаем

$$Z_{эл} = \frac{-iU_0}{\left[ 2\pi R_0 \int_{-h}^h (\epsilon_{11}\epsilon_{\rho\rho} + \epsilon_{12}\epsilon_{\rho\rho} + \epsilon_{12}\epsilon_{\rho\rho} + \chi_{11}^{\epsilon} E_{\rho}) dz \right]}. \quad (16)$$

Электрический импеданс  $Z_{эл}$  измеряется тривиальным способом с точностью вполне достаточной для экспериментальной проверки теоретических результатов.

Из конструкции выражения (16) отчетливо видно, что частотно-зависимый характер изменения электрического импеданса полностью определяется усредненными по высоте оболочки характеристиками напряженно-деформированного состояния изучаемого объекта. Таким образом, математическая модель напряженно-деформированного состояния пьезоэлектрического элемента, т. е. решение граничной задачи (4), (5), (11), (12), определяет свойства и характеристики математической модели электрического импеданса реального объекта. Насколько аналитическая конструкция (16) будет соответствовать результатам эксперимента, настолько решение граничной задачи (4), (5), (11), (12) будет соответствовать реальному напряженно-деформированному состоянию колеблющейся пьезокерамической оболочки.

Таким образом, полное теоретическое исследование гармонических колебаний пьезокерамической оболочки предполагает решение граничной задачи (4), (5), (11), (12) и построение на основе полученного решения выражения для

расчета и экспериментальной проверки электрического импеданса  $Z_{эл}$  пьезоэлектрического элемента.

### Определение компонентов напряженно-деформированного состояния пьезокерамической оболочки

Предположим, что круговая частота  $\omega$  смены знака разности электрических потенциалов выбрана таким образом, что масштаб пространственной неоднородности (длина волны) напряженно-деформированного состояния материала оболочки существенно превышает её толщину  $2\alpha$ . Это позволяет считать напряжения и деформации не зависящими от значений радиальной координаты  $\rho$ . Поскольку  $\sigma_{\rho\rho} = 0$  при  $\rho = R_0 \pm \alpha$ , постольку  $\sigma_{\rho\rho} = 0$  в любой точке объема оболочки. Подставляя в левую часть соотношения (6) значение  $\sigma_{\rho\rho} = 0$ , получаем выражение для расчета деформации  $\varepsilon_{\rho\rho}$ :

$$\varepsilon_{\rho\rho} = -\frac{c_{12}^E}{c_{11}^E}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + \frac{e_{11}}{c_{11}^E}E_{\rho}. \quad (17)$$

При записи выражения (17) принято во внимание, что для всех пьезокерамических материалов [3] с хорошей степенью точности выполняется приближенное равенство  $c_{12}^E \approx c_{13}^E$ . Различия между числовыми значениями модулей упругости составляют десятые доли процентов от номинальных значений  $c_{12}^E$  и  $c_{13}^E$  и эти различия можно интерпретировать как систематические погрешности метода экспериментального определения модулей упругости поляризованной пьезокерамики. По этой причине в формуле (17) и во всех дальнейших выкладках принято  $c_{12}^E = c_{13}^E$ .

Исключая при помощи выражения (17) величину  $\varepsilon_{\rho\rho}$  из соотношений (7) и (8), приходим к следующему результату:

$$\sigma_{\theta\theta} = c_{22}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{12}\varepsilon_{zz} - e_{12}^*E_{\rho}, \quad (18)$$

$$\sigma_{zz} = c_{12}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{22}\varepsilon_{zz} - e_{12}^*E_{\rho}, \quad (19)$$

где  $c_{22} = c_{22}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{11}^E$ ;  $c_{12} = c_{12}^E - (c_{12}^E)^2 / c_{11}^E$ ;  
 $e_{12}^* = e_{12} - e_{11}c_{12}^E / c_{11}^E$ .

Определим величину  $E_{\rho}$  с учетом того, что в объеме пьезоэлектрической оболочки существует двухосное напряженно-деформированное состояние.

Так как пьезокерамика является достаточно хорошим диэлектриком, то, полагая объемную плотность свободных носителей электричества равной нулю, приходим к выводу, что источники и стоки [6] силовых линий электрического поля в объеме деформируемого пьезодиэлектрика отсутствуют и вектор  $\mathbf{D}$  электрической индукции удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (20)$$

С учетом всех ранее сформулированных предположений можно записать, что  $D_{\theta} = D_z = 0$ , радиальный компонент

$$D_{\rho} = e_{12}^*(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + \chi_{11}^{\sigma} E_{\rho}, \quad (21)$$

где  $\chi_{11}^{\sigma} = \chi_{11}^{\varepsilon} + e_{11}^2 / c_{11}^E$  – диэлектрическая проницаемость свободного пьезоэлектрика.

Очевидно, что условие (20) отсутствия свободных электрических зарядов в данном случае приобретает вид  $\partial(\rho D_{\rho}) / \partial \rho = 0$ , откуда следует, что

$$D_{\rho} = K / \rho, \quad (22)$$

где  $K$  – константа. Для определения этой константы подставим в левую часть выражения (22) правую часть соотношения (21), полагая при этом, что  $\varepsilon_{\theta\theta} = u_{\rho} / R_0$ ,  $\varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z$  и  $E_{\rho} = -\partial \varphi / \partial \rho$ , где  $\varphi$  – электрический потенциал электрического поля внутри деформируемого пьезоэлектрика. Интегрируя левую и правую части полученного соотношения по переменной  $\rho$  в пределах от  $R_0 - \alpha$  до  $R_0 + \alpha$ , получаем

$$K = R_0 \xi \left[ e_{12}^* \left( \frac{u_{\rho}}{R_0} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \chi_{11}^{\sigma} \frac{U_0}{2\alpha} \right], \quad (23)$$

где  $\xi = 2\alpha / (R_0 \ln(R_0 + \alpha / R_0 - \alpha))$ .

Выражение (22) можно записать в следующем виде:

$$e_{12}^* \left( \frac{u_{\rho}}{R_0} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \chi_{11}^{\sigma} E_{\rho} = \frac{K}{\rho} \approx \frac{K}{R_0}. \quad (24)$$

Подставляя в правую часть соотношения (24) определение (23) константы  $K$ , получаем формулу для расчета радиального компонента  $E_{\rho}$  вектора напряженности электрического поля в деформируемом пьезоэлектрическом элементе:

$$E_{\rho} = -(1 - \xi) \frac{e_{12}^*}{\chi_{11}^{\sigma}} \left( \frac{u_{\rho}}{R_0} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \xi \frac{U_0}{2\alpha}. \quad (25)$$

Подстановка выражения (25) в определения (18) и (19) нормальных напряжений  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  и  $\sigma_{zz}$  дает следующий результат:

$$\sigma_{\vartheta\vartheta} = \tilde{c}_{22} \frac{u_p}{R_0} + \tilde{c}_{12} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tilde{e}_{12} \frac{U_0}{2\alpha}, \quad (26)$$

$$\sigma_{zz} = \tilde{c}_{12} \frac{u_p}{R_0} + \tilde{c}_{22} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tilde{e}_{12} \frac{U_0}{2\alpha}, \quad (27)$$

где  $\tilde{c}_{22} = c_{22} + (1-\xi) \frac{e_{12}^*}{\chi_{11}^*}$ ;  $\tilde{c}_{12} = c_{12} + (1-\xi) \frac{e_{12}^*}{\chi_{11}^*}$ ;  $\tilde{e}_{12} = e_{12}^* \xi$ .

Для тонких упругих оболочек в первом приближении можно считать, что радиальный компонент  $u_p$  вектора смещения материальных частиц слабо зависит от значений координаты  $z$ , т. е. производная  $\partial u_p / \partial z$  мала и касательное напряжение  $\sigma_{pz}$  существенно меньше нормальных напряжений  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  и  $\sigma_{zz}$ . По этой причине компонент  $\sigma_{pz}$  можно не учитывать при оценках напряженно-деформированного состояния тонких оболочек. Аналогичное упрощающее предположение формулируется при исследовании поперечного изгиба тонких стержней. Полагая  $\sigma_{pz} = \sigma_{zp} \approx 0$  и учитывая однородность напряженно-деформированного состояния по толщине оболочки, уравнения установившихся колебаний (4) и (5) можно записать в таком виде:

$$-\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{R_0} + \rho_0 \omega^2 u_p = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 \omega^2 u_z = 0. \quad (29)$$

Решения уравнений (28) и (29) автоматически удовлетворяют условиям (11) и (12) в части равенства нулю касательного напряжения  $\sigma_{zp}$ .

Подставляя в уравнения (28) и (29) соотношения (26) и (27), получаем

$$-\tilde{c}_{22} \frac{u_p}{R_0} - \tilde{c}_{12} \frac{1}{R_0} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\tilde{e}_{12} U_0}{R_0 2\alpha} + \rho_0 \omega^2 u_p = 0, \quad (30)$$

$$\tilde{c}_{12} \frac{1}{R_0} \frac{\partial u_p}{\partial z} + \tilde{c}_{22} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \rho_0 \omega^2 u_z = 0. \quad (31)$$

Из уравнения (30) следует, что

$$\frac{u_p}{R_0} = -\frac{1}{\tilde{c}_{22} [1 - (\gamma R_0)^2]} \left( \tilde{c}_{12} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tilde{e}_{12} \frac{U_0}{2\alpha} \right), \quad (32)$$

где волновое число  $\gamma = \omega / \sqrt{\tilde{c}_{22} / \rho_0}$ .

Подставляя соотношение (32) в выражение (27), получаем определение аксиального напряжения  $\sigma_{zz}$ :

$$\sigma_{zz} = G_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_z \frac{U_0}{2\alpha}. \quad (33)$$

Подстановка последнего выражения в уравнение (31) приводит его к обыкновенному дифференциальному уравнению такого вида:

$$\frac{d^2 u_z}{dz^2} + \beta^2 u_z = 0. \quad (34)$$

В соотношениях (33) и (34) приняты следующие обозначения:

$$G_z = \tilde{c}_{22} - \frac{\tilde{c}_{12}^2}{\tilde{c}_{22} [1 - (\gamma R_0)^2]};$$

$$e_z = \tilde{e}_{12} - \frac{\tilde{e}_{12} \tilde{c}_{12}}{\tilde{c}_{22} [1 - (\gamma R_0)^2]}; \quad (35)$$

$$\beta^2 = \frac{\gamma^2 [1 - (\gamma R_0)^2]}{1 - (\gamma R_0)^2 - (\tilde{c}_{12} / \tilde{c}_{22})^2}.$$

Очевидно, что безразмерную величину  $\gamma R_0$  в соотношении (35) можно трактовать как безразмерную частоту  $\Omega$ , которая по определению является независимой переменной. При этом безразмерная величина  $\zeta = \beta R_0$  приобретает статус зависимой переменной. Физический смысл величины  $\zeta$  определяется уравнением (34) – это волновое число гармонически изменяющихся во времени аксиальных смещений материальных частиц. График зависимости  $\Omega = f(\zeta)$ , который имеет смысл частотного спектра волновых чисел аксиальных гармонических колебаний пьезокерамической оболочки, представлен на рис. 2. Его вид определяется качественным содержанием сформулированных выше предположений о характере напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при радиальных колебаниях, которые составляют основное содержание так называемой мембранной теории упругих оболочек, развитой в середине двадцатого века (см., например, рис. 1 в статье [7]). При построении графиков, показанных на рис. 2, были использованы следующие числовые данные:  $c_{11}^E = 106$  ГПа;  $c_{22}^E = 112,2$  ГПа;  $c_{12}^E = 62,2$  ГПа;  $e_{11} = 15,1$  Кл/м<sup>2</sup>;  $e_{12} = -3,4$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\chi_{11}^E = 820 \chi_0$ ;  $\chi_{11}^E = 840 \chi_0$ ;  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;  $\rho_0 = 7400$  кг/м<sup>3</sup>;  $R_0 = 14 \cdot 10^{-3}$  м;  $\alpha = 10^{-3}$  м.

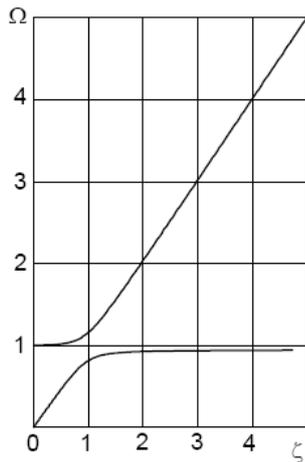


Рис. 2. Частотный спектр волновых чисел аксиальных колебаний оболочки из пьезокерамики ЦТС-19

Соответствующее физическому смыслу рассматриваемой задачи и удовлетворяющее граничному условию (12) решение уравнения (34) имеет такой вид:

$$u_z = -\frac{e_z U_0 \sin \beta z}{2\alpha \beta G_z \cos \beta h}. \quad (36)$$

Подстановка соотношения (36) в определение (32) окружной деформации приводит к следующему результату:

$$\frac{u_p}{R_0} = -\frac{\tilde{e}_{12} U_0}{2\alpha \tilde{c}_{22} [1 - (\gamma R_0)^2]} \left( 1 - \frac{\tilde{c}_{12} e_z}{G_z \tilde{e}_{12}} \cdot \frac{\cos \beta z}{\cos \beta h} \right). \quad (37)$$

Второе слагаемое в круглых скобках выражения (37) имеет смысл погрешности в предположении слабой зависимости радиальных смещений от координаты  $z$ .

На рис. 3 показано, как на различных частотах распределяются по высоте оболочки модули радиальных (сплошные линии) и аксиальных (штриховые линии) смещений материальных частиц. Высота оболочки  $2h = 20 \cdot 10^{-3}$  м, радиус срединной окружности  $R_0 = 14 \cdot 10^{-3}$  м, толщина оболочки  $2\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$  м. Материал оболочки – пьезокерамика ЦТС-19 с добротностью  $Q = 80$ . На электродированные поверхности  $R_0 \pm \alpha$  подается разность электрических потенциалов  $U_0 = 1$  В. По осям ординат на рис. 3 отложены абсолютные значения (модули) смещений материальных частиц в нанометрах. По осям абсцисс отложена циклическая частота в килогерцах. Отчетливо видно, что в диапазоне частот  $0 \leq f \leq 100$  кГц имеются две резонансные частоты, на которых смещения материальных частиц приобретают максимальные значения. При

этом несложно заметить, что на первой резонансной частоте максимальные значения приобретают радиальные смещения, а на второй – аксиальные. По этой причине напряженно-деформированное состояние оболочки на первой частоте будем называть радиальным резонансом, а на второй – аксиальным. Можно показать, что радиальный резонанс наблюдается на частоте, которой соответствует значение  $\gamma R_0 = 1$ . При этом аксиальный резонанс наблюдается на частотах, которым соответствуют значения  $\beta h = \pi(1 + 2m)/2$ , где  $m = 0, 1, 2, \dots$

Особо следует отметить, что первая ветвь частотного спектра волновых чисел аксиальных смещений (первая мода) формирует бесконечное множество практически накладывающихся друг на друга резонансных частот (бесконечно вырожденный резонанс), на которых для реальных, т. е. обладающих потерями, сред не наблюдается увеличения амплитудных значений аксиальных смещений материальных частиц оболочки. Более того, на графиках рис. 3, б–д можно увидеть, что перед частотой радиального резонанса есть точка на оси частот, в которой  $|u_z| \rightarrow 0$ . Это соответствует безразмерной частоте  $\Omega \rightarrow \Omega^* = \sqrt{1 - (\tilde{c}_{12}/\tilde{c}_{22})^2}$ , на которой  $\beta \rightarrow \infty$  (см. рис. 2).

Аксиальные резонансы формируются второй модой аксиальных смещений материальных частиц оболочки и им соответствуют безразмерные частоты

$$\Omega_m = \sqrt{\frac{1 + \hat{q}_m^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 + \hat{q}_m^2}{2}\right)^2 - \hat{q}_m^2 [1 - (\tilde{c}_{12}/\tilde{c}_{22})^2]}},$$

где  $\hat{q}_m = \pi(2m - 1)/2$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots$  – номер аксиального резонанса.

При вычислении электрического импеданса  $Z_{эл}$  колеблющейся оболочки воспользуемся тем обстоятельством, что  $D_p \approx C/R_0$ . Принимая в формуле (16) величину  $R = R_0$  и подставляя в интеграл определенную формулой (23) константу  $K$ , с учетом соотношений (36) и (37) получаем следующий результат:

$$Z_{эл} = -\frac{i}{\omega C_0^\sigma} F(\omega), \quad (38)$$

где  $C_0^\sigma = 2\pi R_0 \chi_{11}^\sigma h/\alpha$  – статическая электрическая емкость свободной пьезокерамической оболочки;  $F(\omega) = [K_p^2 f(\gamma, \beta) + 1]^{-1}$  – зависящая

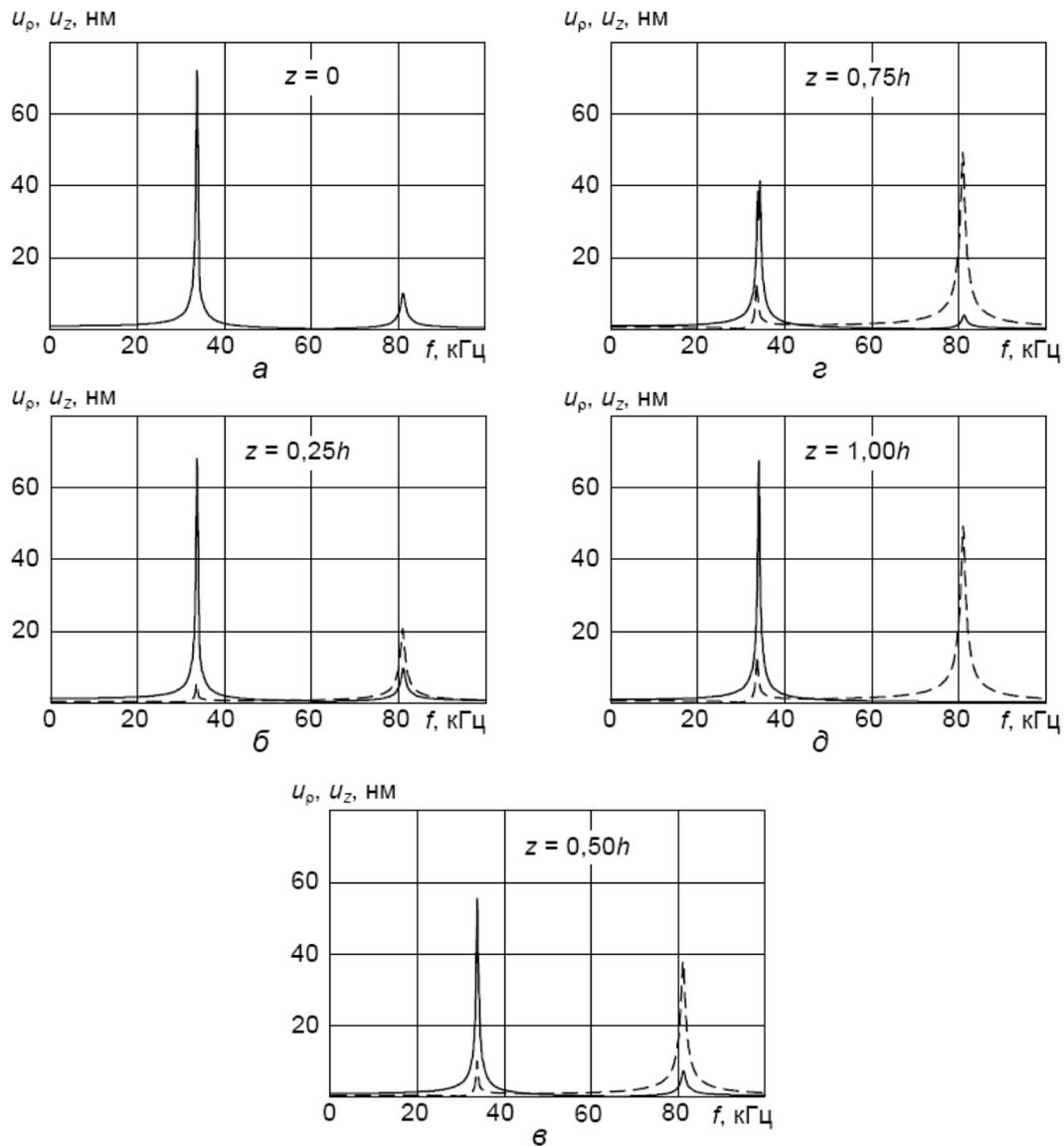


Рис. 3. Распределение радиальных (—) и аксиальных (- -) смещений материальных частиц на различных частотах по высоте цилиндрической оболочки из пьезокерамики ЦТС-19 ( $U_0 = 1$  В)

от частоты  $\omega$  (волнового числа  $\gamma$ ) и волнового числа  $\beta$  функция, которая учитывает поляризационные эффекты в диэлектрике, обусловленные пьезоэлектрическими эффектами. В определении функции  $F(\omega)$  символом

$K_p^2 = e_{12}^* \tilde{e}_{12} / (\chi_{11}^{\sigma} \tilde{c}_{22})$  обозначен квадрат коэффициента электромеханической связи пьезоэлектрика в режиме радиальных колебаний цилиндрической оболочки. Эта безразмерная, меньше единицы, величина пропорциональна эффективности двойного преобразования энергии при заданном режиме деформирования цилиндрической пьезокерамической оболочки. При  $K_p^2 = 0$ , что соответствует обыкновенному диэлектрику между двумя концентрическими металлическими поверхностями,  $F(\omega) = 1$  и вы-

ражение (38) приобретает стандартную форму реактивного емкостного сопротивления. Функция  $f(\gamma, \beta)$  определяется следующим выражением:

$$f(\gamma, \beta) = \xi \times \left\{ \frac{1}{1 - (\gamma R_0)^2} - \frac{\tilde{c}_{12} e_z}{G_z \tilde{e}_{12}} \cdot \frac{\text{tg}(\beta h)}{(\beta h)} \cdot \left[ \frac{1}{1 - (\gamma R_0)^2} - \frac{\tilde{c}_{22}}{\tilde{c}_{12}} \right] \right\}, \quad (39)$$

которое учитывает радиус и высоту оболочки, а также основные физико-механические параметры пьезокерамики, из которой она изготовлена.

На рис. 4 показано частотно-зависимое изменение модуля электрического импеданса колеблющейся в вакууме оболочки из пьезокерамики ЦТС-19 с добротностью  $Q = 80$ . Размеры оболочки те же, что и в расчетах аксиальных и радиальных смещений, которые были выполнены при построении кривых на рис. 2. Сплошной

толстой линией показаны результаты расчета модуля  $Z_{эл}$  по формуле (38). Тонкими линиями показаны графики частотно-зависимого изменения радиальных (сплошная линия) и аксиальных (штриховая линия) смещений материальных частиц пьезокерамической оболочки. На частотах резонансов смещения достигают максимальных значений и, как следствие, максимальные значения принимают деформации и радиальный компонент вектора электрической индукции. Это эквивалентно резкому увеличению уровней поляризационных зарядов. По этой причине резко возрастает ток в проводниках, которые соединяют генератор разности электрических потенциалов и электродированные поверхности пьезокерамической оболочки.

Увеличение тока при постоянной амплитуде разности электрических потенциалов происходит только при уменьшении электрического импеданса в цепи электрического тока. Таким образом, на частотах механических резонансов наблюдается резкое уменьшение электрического импеданса колеблющегося пьезоэлектрического элемента вообще и цилиндрической оболочки в частности. При прохождении частоты резонанса в сторону возрастания частот знаки деформаций меняются. При этом наблюдается взаимная компенсация электрической и упругой составляющих электрической индукции в объеме деформируемого пьезоэлектрика. Как

следствие резко уменьшаются уровень результирующей электрической поляризации и электрический ток в проводниках. Последнее соответствует резкому увеличению электрического импеданса колеблющегося пьезоэлектрического образца. Так как на частоте резонанса пьезокерамический элемент потребляет максимальное количество энергии от источника колебаний, что составляет основное физическое содержание явления резонанса, то на частотах, где резко возрастает импеданс, это потребление сводится до минимума. По этой причине эти частоты можно называть частотами электромеханического антирезонанса.

На рис. 5 приведены расчетная (сплошная линия) и экспериментально полученная (штриховая линия) кривые частотной зависимости модуля электрического импеданса колеблющейся пьезоэлектрической оболочки. В расчет заложены те же параметры, что и при расчете кривой  $|Z_{эл}|$ , которая приведена на рис. 4. Естественно, что размеры оболочек в расчете и эксперименте выбраны одинаковыми, т. е.  $\alpha = 10^{-3}$  м;  $R_0 = 14 \cdot 10^{-3}$  м и  $2h = 20 \cdot 10^{-3}$  м. По оси ординат откладываются значения модуля электрического импеданса пьезокерамической оболочки в килоомах, а по оси абсцисс – нормированная на частоту первого резонанса текущая частота. Как и следовало ожидать, абсолютные

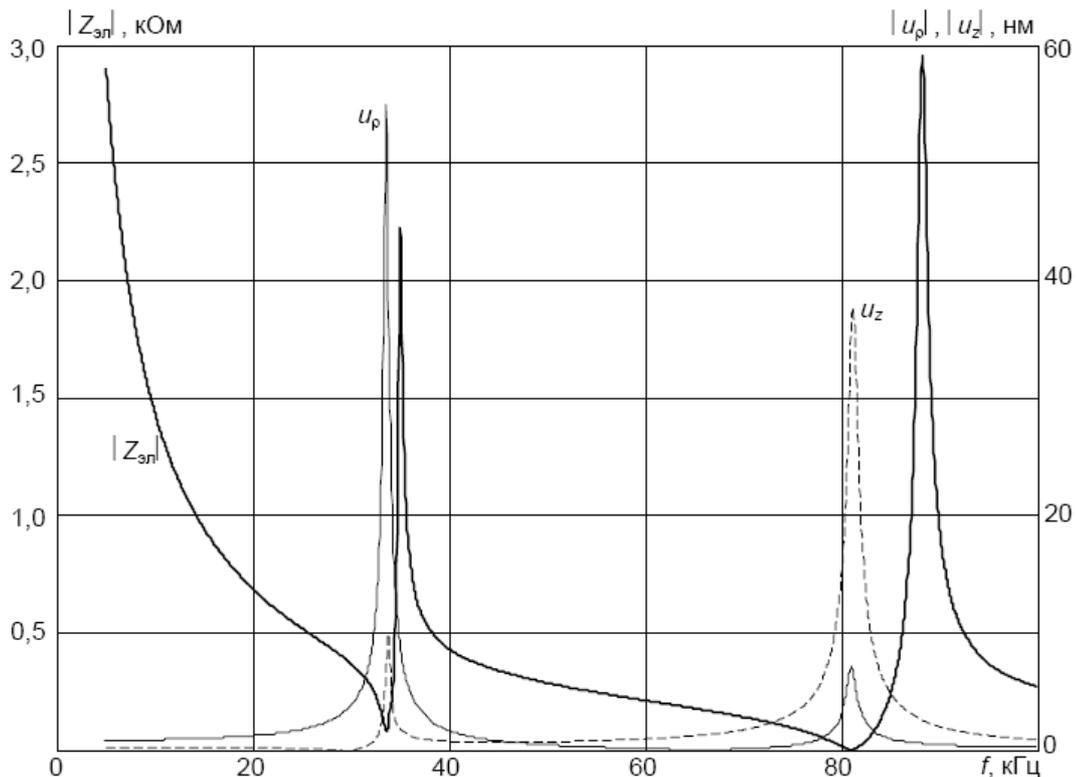


Рис. 4. Частотно-зависимое изменение электрического импеданса колеблющейся пьезокерамической оболочки

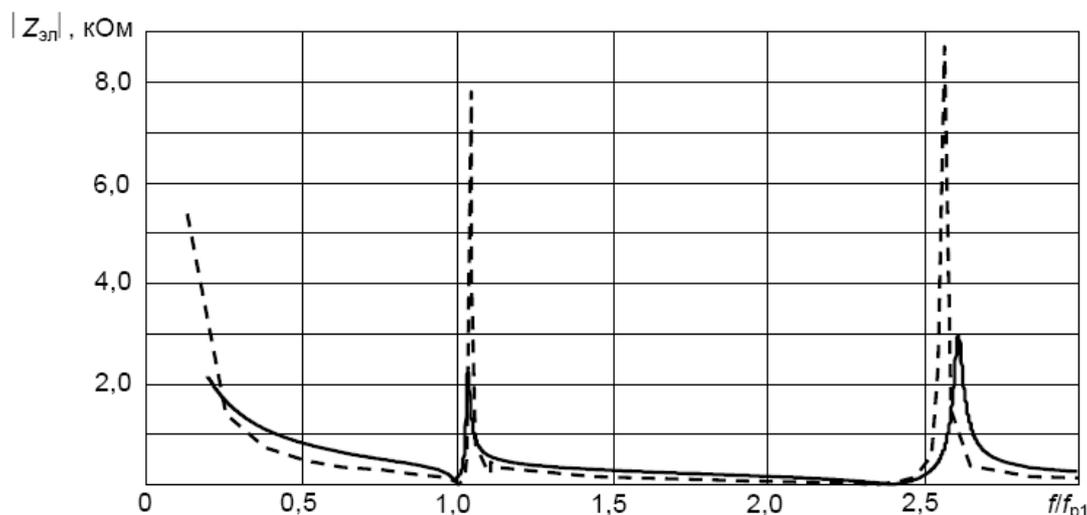


Рис. 5. Расчетные (—) и экспериментальные (- - -) значения модуля электрического импеданса колеблющейся пьезокерамической оболочки

значения частот резонансов и антирезонансов в расчете и эксперименте отличаются друг от друга. Так, следуя расчету, частоты первого и второго электромеханических резонансов соответственно равны  $f_{p1} = 33370$  Гц и  $f_{p2} = 81135$  Гц; отношение частот  $\zeta = f_{p2}/f_{p1} = 2,405$ .

Экспериментальные значения тех же величин равны соответственно  $f_{p1} = 40030$  Гц,  $f_{p2} = 93989$  Гц и  $\zeta = f_{p2}/f_{p1} = 2,348$ . Если экспериментальные данные принять в качестве истинных, то погрешности теоретического определения частот резонансов составляют  $\Delta f_{p1} = 15,7\%$  и  $\Delta f_{p2} = 13,8\%$ , а погрешность определения отношения частот –  $\Delta \zeta = -2,4\%$ . Полученные результаты объясняются очень просто. Числовые значения частот резонансов и антирезонансов определяются размерами и физико-механическими параметрами материала оболочки. Отношения частот резонансов одной и той же оболочки определяются практически только размерами. По этой причине наблюдается весьма удовлетворительное совпадение теоретически и экспериментально определенных отношений частот резонансов. Значительные расхождения абсолютных значений частот резонансов объясняется несоответствием физико-механических параметров пьезокерамики, которые были заложены в расчет и которые присущи экспериментально исследуемому объекту. Сопоставляя кривые можно сделать вывод, что добротность материала экспериментально исследуемой оболочки минимум в два с

половиной раза больше заложенной в расчет добротности  $Q = 80$ .

Таким образом, можно утверждать, что характер изменения обеих кривых, приведенных на рис. 5, в достаточно широком диапазоне частот совпадает с точностью до деталей. Это означает, что качественное содержание выражения (38) адекватно процессам, которые происходят в реальном объекте. Говоря иными словами, выражение (38) – математическая модель электрического импеданса колеблющейся оболочки – в достаточной мере адекватно реальному объекту и происходящим в нем процессам. Последнее позволяет предполагать, что математическое описание напряженно-деформированного состояния оболочки также достаточно хорошо соответствует реальному положению вещей.

## Выводы

Построена приближенная математическая модель напряженно-деформированного состояния, которое возникает при гармонических колебаниях пьезокерамической цилиндрической оболочки конечной высоты в режиме обратного пьезоэлектрического эффекта. На этой основе был выполнен расчет электрического импеданса колеблющейся оболочки. Расчетные данные достаточно хорошо совпадают с результатами эксперимента. Это позволяет предполагать о возможности применения разработанной математической модели в более сложных ситуациях, т. е. для расчета акустического поля в режиме излучения и электрического сигнала на выходе пьезоэлектрического преобразователя в режиме приема ультразвуковых сигналов.

**Литература**

1. *Лейко А.Г., Шамарин Ю.Е., Ткаченко В.П.* Подводная электроакустическая аппаратура и устройства: В 2 т. – К.: ГКППУ ГНИИ ГП, 2000. – Т. 1: Подводные акустические антенны. Методы расчета звуковых полей. – 320 с.
2. *Подводная электроакустическая аппаратура и устройства. Т.2. Технология акустических антенн. Методы изготовления с применением электрофизических приемов обработки / Ю.Е. Шамарин, А.Г. Лейко, А.Ю. Шамарин, В.П. Ткаченко – Киев, 2001. – 256 с.*
3. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 873 с.
4. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Отв. ред. А.Н. Гузь, АН УССР. Ин-т механики. – К.: Наукова думка, 1989. – Т. 5: Электроупругость – 280 с.
5. *Кэди У.* Пьезоэлектричество и его практическое применение. – М.: ИЛ, 1949. – 718 с.
6. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.
7. *Jnger M.G., Rosato F.J.* The Propagation of Elastic Waves in Thin-Walled Cylindrical Shells // J. Acoust. Soc. Amer. – 1954. – Vol.26, № 5. – P. 709–713.

<sup>1</sup> *Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»*

<sup>2</sup> *Киевский государственный НИИ гидроприборов*

*Поступила в редакцию 28 декабря 2008 г.*