

УДК 534.3

А.В. Коржик, канд. техн. наук, Ю.А. Солтановский

## Излучение звуковых волн секционированным цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем, подключенным к длинной линии

В результате решения задачи об излучении акустических волн круговым цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем с разрезными электродами в электроупругой постановке найден алгоритм, позволяющий аналитически определять динамические характеристики указанного источника звука.

The algorithm of analytic determination the dynamics characteristics of electroelastics cylindrical transducers with disconnected electrodes and long cable tracts is obtain for problem of acoustic radiation in conditions of interaction the acoustics, mechanics and electric fields.

**Ключевые слова:** оболочка, пьезокерамика, плоская звуковая волна, электрическая нагрузка, электрод.

### Введение

В настоящее время задачи об излучении звуковых волн в сквозной подстановке представлены достаточно широко. Тем не менее, в рамках теории гидроэлектроупругости вопросы о возбуждении пьезокерамических преобразователей в традиционном стационарном режиме в основном рассмотрены лишь для пьезокекерамических преобразователей с полностью электродированными поверхностями (см., например работы [1–3]). Случаи использования излучающих преобразователей со сплошными электродами и элетродами в виде секций исследованы лишь в нестационарной подстановке [3–6]. В указанных работах основное внимание уделено сферическим и цилиндрическим источникам звука, как наиболее часто встречающимся при решении сквозных задач. Известно [7], что применение электродов в виде секций, частично покрывающих поверхность преобразователя, приводит к обогащению модовой структуры создаваемого акустического поля за счет использования высших форм колебаний поверхности и особенностей коммутации секций электродов. Поэтому, представляется актуальным и целесообразным рассмотреть модель излучения звука в виде пьезокерамического цилиндрического преобразователя, на поверхность которого нанесены разрезные секции электроды.

Кроме этого, реальные условия работы большинства гидроакустических преобразователей предполагают использование протяженных кабельных соединений. Известно [8, 9], что при сопоставимости длин волн рабочего частотного диапазона и длины протяженных кабельных соединений, последние являются линиями с распределенными параметрами. Так для установившихся режимов, в этой связи, следует отметить такие работы как [10–12]. Такая ситуация приводит к необходимости учета параметров протяженных кабельных линий применительно к задаваемому режиму работы линии по входу неким задающим генератором и ее динамической нагрузке на выходе в виде пьезокерамического преобразователя. Все это и обуславливает цель данной работы, которая заключается в описании процесса излучения звуковых волн погруженной в идеальную жидкость пьезокерамической цилиндрической круговой оболочкой, на поверхность которой нанесена пара разрезных электродов, при условии подключения её электродов к выходам задающих генераторов через однородную протяженную электрическую линию с распределенными параметрами.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается задача об излучении звука в сквозной подстановке, предполагающая отыскание давления в акустическом поле по заданным электрическим характеристикам на выходе электрического задающего устройства.

Полагаем, что в идеальной малосжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$  размещен одиночный пьезокерамический круговой цилиндрический преобразователь бесконечной длины. Преобразователь представляется бесконечно длинной электроупругой, радиально поляризованной оболочкой произвольного срединного радиуса  $r_{0j}$  с толщиной стенки  $h_j$ , где  $j$  – переменная, задающая номер оболочки, (рис. 1). Внутри преобразователя – вакуум. На поверхность преобразователя нанесены разрезные электроды, которые электрически не соединены друг с другом, а подключены к выходам длинных линий  $l_{11}$  и  $l_{12}$ . По входу электри-

ческие линии подключены к задающие генераторам ЗГ11 и ЗГ12. Толщина электродов, а также оставшиеся неэлектропроводными участки поверхности преобразователя считаются малыми, не влияющими на его электро-механические характеристики и не требующими привлечения дополнительных граничных условий по механическому и электрическому полям. Считая оболочки тонкостенными, используем для описания движения их поверхности уравнения теории тонких оболочек, базирующихся на гипотезах Кирхгофа-Лява [13, 14]. При этом, колеблющаяся поверхность оболочки создает в рассматриваемой жидкой среде акустическое поле, которое в рамках стационарного возбуждения описывается уравнением Гельмгольца.

Введем ряд координатных систем (рис. 1):

- общую декартову систему координат  $OXYZ$ , которая размещена так, что ось  $OX$  лежит в плоскости нормального сечения оболочки, а ось  $OZ$  совпадает с продольной осью оболочки;

- локальную систему координат  $O_jX_jY_jZ_j$ , совпадающую с общей декартовой системой;
- локальную круговую цилиндрическую систему координат  $(o_jr_j\varphi_j)$ , которая связана с декартовой системой известными формулами перехода.

Считаем, что поле, создаваемое оболочкой (поле в точке  $M(r_j; \varphi_j)$ ), представлено равенством  $p_\Sigma = p_M(r_j; \varphi_j)$ . При этом,  $R_j \leq r_j < \infty$ , где

$R_j$  – внешний радиус оболочки  $\left( R_j = r_{0j} + \frac{h_j}{2} \right)$ ,  $\varphi_j \in [0; 2\pi]$ .

Условия передачи электрического сигнала каждой протяженной кабельной линией  $l_{11}$  и  $l_{12}$  описываются телеграфными уравнениями для линий фиксированной длины с малыми потерями [8, 9].

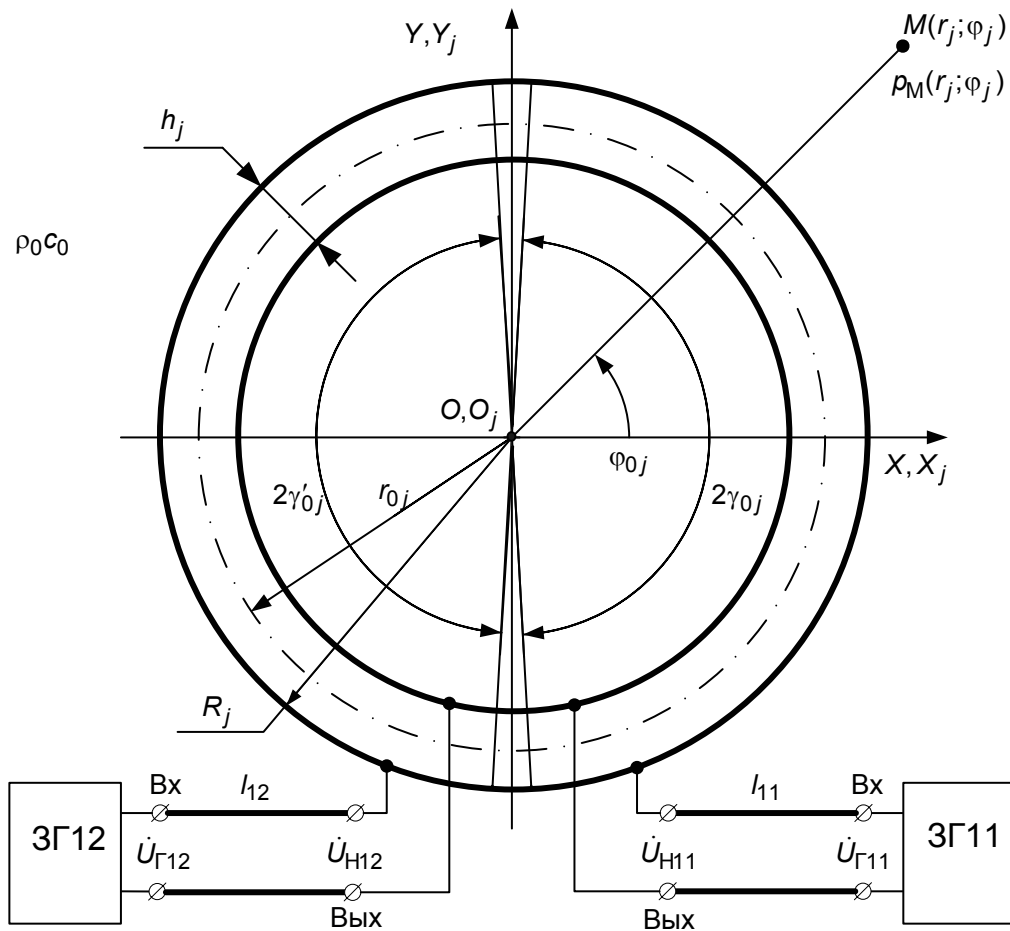


Рис. 1

Конкретизируя положения постановки задачи полагаем.

1. В предложенной среде акустическое поле описывается уравнением Гельмгольца, записанным относительно потенциала колебательной скорости  $\Phi$  :

$$\Delta\Phi + k_B^2\Phi = 0, \quad \Phi = \Phi(r_j, \varphi_j), \quad (1)$$

где  $k_B = \frac{\omega}{c}$  – волновое число,  $\omega$  – круговая частота.

2. Для описания движения оболочки с учетом её бесконечной длины, используем систему уравнений (см., например, работу [2]), для которой перемещения в осевом направлении  $V$  считаем отсутствующими ( $V = 0$ ). Таким образом, система уравнений движения  $j$ -й оболочки имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{h_j}{12R_j^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \right] \frac{\partial^2 U_j}{\partial \varphi_j^2} + \frac{\partial W_j}{\partial \varphi_j} - \\ & - \frac{h_j}{12R_j^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 W_j}{\partial \varphi_j^3} - \\ & - R_j \frac{e_{31}}{C_{11}^E} \frac{\partial E_{r,j}^{(0)}}{\partial \varphi_j} - \frac{R_j^2 \rho_{m,j}}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} = 0; \\ & \frac{\partial U_j}{\partial \varphi_j} + \frac{h_j}{12R_j^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^3 U_j}{\partial \varphi_j^3} - W_j - \\ & - \frac{h_j^2}{12R_j^2} \left( 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}^E \epsilon_{33}^S} \right) \frac{\partial^4 W_j}{\partial \varphi_j^4} + \\ & + \frac{e_{31} R_j}{C_{11}^E} E_{r,j}^{(0)} + \frac{R_j}{h_j C_{11}^E} q_r - \frac{R_j^2 \rho_{m,j}}{C_{11}^E} \frac{\partial^2 W_j}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \right. \quad (2)$$

где  $e_{31}$  – пьезомодуль;  $C_{11}^E$  – модуль упругости;  $\epsilon_{33}^S$  – диэлектрическая проницаемость;  $E_{r,j}^{(0)}$  – составляющая вектора напряженности электрического поля в радиальном направлении;  $\rho_{m,j}$  – плотность пьезокерамики оболочки;  $t$  – время;  $q_r$  – гидродинамическая нагрузка со стороны среды; а

$$\begin{aligned} U_j &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n^{(j)} e^{in\varphi_j}, \\ W_j &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} W_n^{(j)} e^{in\varphi_j} \end{aligned} \quad (3)$$

соответственно тангенциальная и нормальная составляющие перемещения точек поверхности оболочки.

3. Нагрузку  $q_r$  оболочки со стороны среды представляем акустическим воздействием вида:

$$q_r = p_\Sigma = p(r_j, \varphi_j) \Big|_{r_j=R_j}, \quad (4)$$

где  $p(r_j, \varphi_j) = \rho_0 \frac{\partial \Phi(r_j, \varphi_j)}{\partial t}$ .

4. На поверхности оболочки, которая контактирует с жидкостью, выполняется условие сопряжения в виде равенства нормальных составляющих скоростей частиц среды и скоростей смещения по нормали точек поверхности оболочки:

$$\frac{\partial W_j}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial r_j} = \frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p(r_j, \varphi_j)}{\partial r_j} \Big|_{r_j=R_j}. \quad (5)$$

5. Составляющие электромагнитного состояния в каждой кабельной линии ( $l_{11}$  и  $l_{12}$ ) описываются с помощью уравнений электрической линии с распределенными параметрами (см., например, работу [9]) для ситуации задания напряжений и токов в начале линии:

$$\begin{cases} \dot{U}_{H11} = \dot{U}_{\Gamma11} \text{ch}(\gamma x_{11}) - \dot{I}_{\Gamma11} \text{sh}(\gamma x_{11}); \\ \dot{I}_{H11} = \dot{I}_{\Gamma11} \text{ch}(\gamma x_{11}) - \frac{\dot{U}_{\Gamma11}}{Z_{B11}} \text{sh}(\gamma x_{11}), \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{U}_{H12} = \dot{U}_{\Gamma12} \text{ch}(\gamma x_{12}) - \dot{I}_{\Gamma12} \text{sh}(\gamma x_{12}); \\ \dot{I}_{H12} = \dot{I}_{\Gamma12} \text{ch}(\gamma x_{12}) - \frac{\dot{U}_{\Gamma12}}{Z_{B12}} \text{sh}(\gamma x_{12}). \end{cases}$$

В системах (6):  $x_{11}$ ,  $x_{12}$  – текущая координата линий  $l_{11}$  и  $l_{12}$  соответственно;  $\dot{U}_{H11}$ ,

$\dot{U}_{H12}$  – напряжения на электродах  $\gamma_{0j}$  и  $\gamma'_{0j}$  соответственно;  $\dot{I}_{H11}$ ,  $\dot{I}_{H12}$  – токи через преобразователь со стороны электродов  $\gamma_{0j}$  и  $\gamma'_{0j}$  соответственно;  $\dot{U}_{\Gamma11}$ ,  $\dot{U}_{\Gamma12}$ ,  $\dot{I}_{\Gamma11}$ ,  $\dot{I}_{\Gamma12}$  – напряжения и токи на выходах генераторов ЗГ11 и ЗГ12 соответственно;  $\gamma$  – постоянная распространения линии с малыми потерями, которая определяется из соотношения

$$\gamma = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} + \frac{G_0}{2} \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} - i\omega \sqrt{L_0 C_0}, \quad (7)$$

где  $R_0, G_0, L_0, C_0$  – продольное активное сопротивление, поперечная проводимость, индуктивность и емкость единицы длины линии соответственно. При этом волновое сопротивление линии с малыми потерями  $Z_B$  определяется из соотношения (для линии 1 –  $Z_{B11}$ , а для линии 2 –  $Z_{B12}$ , соответственно):

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \left[ 1 - i \left( -\frac{R_0}{2\omega L_0} + \frac{G_0}{2\omega C_0} \right) \right]. \quad (8)$$

Заметим, что если линия не имеет потерь, то выражения (7) и (8) сводятся к виду:

$$\gamma = -i\omega\sqrt{L_0 C_0}; \quad (9)$$

$$Z_B = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \quad (10)$$

Граничные условия задачи включают в себя:

- а) условия сопряжения вида (4);
- б) условие излучения Зоммерфельда;
- в) электрические условия, рассматриваемые относительно разностей электрических потенциалов на электродах преобразователя  $\Delta\psi_{j11}$  и  $\Delta\psi_{j12}$ . При этом, для записи полной системы соотношений по электрическому полю, использованы уравнения вынужденной электростатики [14]:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0; \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

где  $\mathbf{D}$  – вектор электрической индукции;  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля, а также уравнения для определения значений  $\dot{U}_{H11}$ ,  $\dot{U}_{H12}$  и  $\dot{I}_{H11}$ ,  $\dot{I}_{H12}$  в любой точке линий  $l_{11}$  и  $l_{12}$  для каждого из электродов.

Поскольку электроды, нанесенные на поверхность преобразователя-оболочки, – разрезные, считаем, что составляющая напряженности  $E_{r,j}^{(0)}$  зависит от угла следующим образом:

$$E_{r,j}^{(0)} = E_{r,j}^{(0)}(\varphi_j) = E_{r,j11}^{(0)} f_1(\varphi_j) + E_{r,j12}^{(0)} f_2(\varphi_j), \quad (11)$$

где  $E_{r,j11}^{(0)}$  и  $E_{r,j12}^{(0)}$  – амплитуды напряженности для каждой из пар электродов. Амплитуды  $E_{r,j11}^{(0)}$  и  $E_{r,j12}^{(0)}$  с учетом работ [2, 14] записываются относительно разностей потенциалов на электродах преобразователя  $\Delta\psi_{j11}$  и  $\Delta\psi_{j12}$  как:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{j11} = \dot{U}_{H11} &= - \int_{-\frac{h_j}{2}}^{\frac{h_j}{2}} E_{r,j11}^{(0)}(\varphi_j) d\eta; \\ \Delta\psi_{j12} = \dot{U}_{H12} &= - \int_{-\frac{h_j}{2}}^{\frac{h_j}{2}} E_{r,j12}^{(0)}(\varphi_j) d\eta \quad (12) \\ \left( \eta \in \left[ -\frac{h_j}{2}; +\frac{h_j}{2} \right] \right). \end{aligned}$$

Относительно функций  $f_1(\varphi_j)$ ,  $f_2(\varphi_j)$  заметим, что они представляют собою функции включения вида  $f(\varphi) = \operatorname{rect} B$  при  $B = 1$  [11], и могут быть разложены в ряд Фурье:

$$\begin{aligned} f_1(\varphi_j) &= \frac{1}{\pi} \sum_k \gamma_{0j} \frac{\sin(k\gamma_{0j})}{k\gamma_{0j}} e^{ik\varphi_j}; \\ f_2(\varphi_j) &= \frac{1}{\pi} \sum_k \gamma'_{0j} \frac{\sin(k\gamma'_{0j})}{k\gamma'_{0j}} e^{ik(\varphi_j + \pi)} \quad (-\infty < k < \infty), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\gamma_{0j}$ ,  $\gamma'_{0j}$  – углы, характеризующие половину раскрытия электродов.

Токи через преобразователь со стороны соответствующих электродов с площадями  $S_{11}$  и  $S_{12}$  определяются по зарядам  $Q_{11}$  и  $Q_{12}$  с учетом бесконечной длины оболочки, гармонического характера возбуждения преобразователя и соотношений для компонента вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  в направлении толщинной координаты выражениями [14]:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= - \int_{S_{11}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{11}) dS_{11} = - \int_{S_{11}} D_{r11}^{(0)} dS_{11}; \\ Q_{12} &= - \int_{S_{12}} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{12}) dS_{12} = - \int_{S_{12}} D_{r12}^{(0)} dS_{12}. \end{aligned} \quad (14)$$

Переходя к углу  $\varphi_j$  для  $dS_{11} = R_j d\varphi_j$ ,  $dS_{12} = R_j d\varphi_j$  и возможной длины преобразователя  $\ell$ , запишем:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{H11} = \dot{i}_{\gamma_{0j}} &= \frac{\partial Q_{11}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\ell dz_j \int_{-\gamma_{0j}}^{\gamma_{0j}} D_{r11}^{(0)} R_j d\varphi_j; \\ \dot{I}_{H12} = \dot{i}_{\gamma'_{0j}} &= \frac{\partial Q_{12}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\ell dz_j \int_{-\gamma'_{0j}}^{\gamma'_{0j}} D_{r12}^{(0)} R_j d\varphi_j, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $z_j$  – вертикальная координата.

Известно [14], что

$$D_r^{(0)} = \varepsilon_{33}^S E_{r,j}^{(0)} + \varepsilon_{31} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}, \quad (16)$$

где  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)}$  – составляющая вектора деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\varphi\varphi}^{(0)} &= \frac{1}{R_j} \frac{\partial U_j}{\partial \varphi_j} + \frac{1}{R_j} W_j = \\ &= \frac{1}{R_j} \left( \sum_n U_n^{(j)} e^{in\varphi_j} + \sum_n W_n^{(j)} e^{in\varphi_j} \right), \quad -\infty < n < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, используя выражения (14) и (15), переходя к перемещениям  $U_j$  и  $W_j$ , для электрических токов запишем:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{H11} = \dot{U}_{\gamma 0j} = i\omega R_j \left( 2\gamma_{0j} \varepsilon_{33}^S \frac{\dot{U}_{H11}}{h_j} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_{31}}{R_j} 2\gamma_{0j} \left[ \sum_n \left( inU_n^{(j)} + W_n^{(j)} \right) \frac{\sin(n\gamma_{0j})}{n\gamma_{0j}} \right] \right); \\ \dot{U}_{H12} = \dot{U}_{\gamma' 0j} = i\omega R_j \left( 2\gamma'_{0j} \varepsilon_{33}^S \frac{\dot{U}_{H11}}{h_j} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_{31}}{R_j} 2\gamma'_{0j} \left[ \sum_n \left( inU_n^{(j)} + W_n^{(j)} \right) \frac{\sin(n\gamma'_{0j})}{n\gamma'_{0j}} \right] \right). \end{aligned} \quad (17)$$

## 2. Решение задачи

С учетом представления внешней нагрузки оболочки со стороны среды как акустической, дополним систему (2) разложением для поля создаваемого цилиндрическим бесконечным по длине источником звука [15]:

$$\begin{aligned} q_r = p_{\Sigma} = p(r_j, \varphi_j) \Big|_{r_j=R_j} = \\ = \sum_m A_m^{(j)} H_m^{(1)}(k_B R_j) e^{im\varphi_j}, \end{aligned} \quad (18)$$

где  $A_m^{(j)}$  – неизвестные коэффициенты ( $-\infty < m < \infty$ );  $H_m^{(1)}$  – функция Ханкеля первого рода порядка  $m$ .

Подставляя выражения (3), (11)–(13) в уравнение движения оболочки (2), а также используя условие  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  и уравнение (16) для отыскания  $\frac{\partial E_{r,j}^{(0)}}{\partial \varphi_j}$ , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_n N_n(\omega) U_n^{(j)} e^{in\varphi_j} + \sum_n iM_n W_n^{(j)} e^{in\varphi_j} = 0 \\ -\sum_n i\tilde{M}_n U_n^{(j)} e^{in\varphi_j} + \sum_n \tilde{N}_n(\omega) W_n^{(j)} e^{in\varphi_j} = \\ = c' (\dot{U}_{H11} f_1(\varphi_j) + \dot{U}_{H12} f_2(\varphi_j)) - eq_r, \end{cases} \quad (19)$$

где  $\tilde{N}_n(\omega) = -d\omega^2 - (1 + abn^4)$ ;  $M_n = n(1 + c + abn^2)$ ;

$N_n(\omega) = -d\omega^2 - (1 + c + ab)n^2$ ;  $\tilde{M}_n = n(1 + abn^2)$ ;

$a = \frac{h_j^2}{12R_j^2}$ ;  $c = \frac{\varepsilon_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S h_j}$ ;  $e = \frac{R_j^2}{h_j C_{11}^E}$ ;  $b = 1 + \frac{\varepsilon_{31}^2}{C_{11}^E \varepsilon_{33}^S}$ ;

$d = \frac{R_j^2 \rho_{mj}}{C_{11}^E}$ ;  $c' = \frac{\varepsilon_{31} R_j}{C_{11}^E h_j}$ .

Используя первое уравнение системы (19), устанавливая зависимость между тангенциальной  $U_n^{(j)}$  и нормальной составляющей перемещений  $W_n^{(j)}$  как

$$U_n^{(j)} = -i \frac{M_n W_n^{(j)}}{N_n(\omega)}, \quad (20)$$

а также, используя свойства полноты и ортогональности функций вида  $e^{in\varphi_j}$ ,  $e^{-ip\varphi_j}$  на интервале  $\varphi_j \in [0; 2\pi]$  для  $-\infty < n < \infty$  и  $-\infty < p < \infty$ ,

найдем  $W_n^{(j)}$  с учетом выражений (18)–(20):

$$\begin{aligned} W_n^{(j)} = \left( \tilde{c} \dot{U}_{n\gamma\gamma'} - A_n H_n^{(1)}(k_B R_j) \right) \times \\ \times \frac{N_n(\omega)}{\left( N_n(\omega) \tilde{N}_n(\omega) - M_n \tilde{M}_n \right)}, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\dot{U}_{n\gamma\gamma'} = \dot{U}_{H11} \xi_n + \dot{U}_{H12} \xi'_n$ ;  $\tilde{c} = \frac{c'}{2}$ . При этом коэффициенты  $\xi_n$  и  $\xi'_n$  определяются следующим образом:

$$\frac{1}{\pi} \xi_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \text{ и } n = 2p + 1; \\ 0 & \text{при } n = 2p \end{cases} \quad (p = 1, 2, 3, \dots),$$

$$\xi'_n = e^{ik\pi} \xi_n.$$

Как видно, данный вид электродирования определяет как электромеханически активные лишь нулевую и нечетные формы колебаний (смотри коэффициент  $\xi_n$ ).

Далее, используя условия сопряжения (5) и полученное выражение (21), отыщем неизвестный коэффициент разложения (18), изменив переменную суммирования с  $m$  на  $n$ :

$$A_n^{(j)} = \frac{-\tilde{D}_n^{(j)}(\omega)}{-\tilde{C}_n^{(j)}(\omega) H_n^{(1)}(kR_j) - \frac{1}{\omega \rho_0 c_0} H_n^{(1)'}(kR_j)}, \quad (22)$$

где  $\tilde{C}_n^{(j)}(\omega) = \frac{N_n(\omega)}{\left( N_n(\omega) \tilde{N}_n(\omega) - M_n \tilde{M}_n \right)}$ ;

$$\tilde{D}_n^{(j)} = \tilde{c} \cdot \dot{U}_{n\gamma\gamma'} \cdot \tilde{C}_n^{(j)}(\omega).$$

Таким образом, отыскав  $A_n^{(j)}$ , можно определить значение акустического давления, создаваемого рассматриваемым излучателем

$$\begin{aligned} p(r_j, \varphi_j) = \\ = \sum_n \frac{\tilde{D}_n^{(j)}(\omega) H_n^{(1)}(k_B R_j)}{\tilde{C}_n^{(j)}(\omega) H_n^{(1)}(k_B R_j) - \frac{1}{\omega \rho_0 c_0} H_n^{(1)'}(k_B R_j)} e^{in\varphi_j}. \end{aligned} \quad (23)$$

Предложенный подход также позволяет отыскать колебательную скорость на поверхности излучателя и в произвольной точке поля цилиндрической волны для различных сочетаний напряжений и токов  $\dot{U}_{\Gamma 11}$ ,  $\dot{U}_{\Gamma 12}$ ,  $\dot{I}_{\Gamma 11}$ ,  $\dot{I}_{\Gamma 12}$  в начале кабельной линии (выход задающего генератора), а так же составляющие перемеще-

ний точек поверхности оболочки  $W$  и  $U$  (см. выражение (2)):

$$W_n^{(j)} = \left( \tilde{c} \dot{U}_{n\gamma\gamma'} - \frac{-\tilde{D}_n^{(j)}(\omega) H_n^{(1)}(k_\epsilon R_j)}{-\tilde{C}_n^{(j)}(\omega) H_n^{(1)}(k_\epsilon R_j) - \frac{1}{\omega \rho_0 c_0} H_n^{(1)\prime}(k_\epsilon R_j)} \right) \times \tilde{C}_n^{(j)}(\omega);$$

$$U_n^{(j)} = -iM_n \left( \tilde{c} \dot{U}_{n\gamma\gamma'} - \frac{-\tilde{D}_n^{(j)}(\omega) H_n^{(1)}(kR_j)}{-\tilde{C}_n^{(j)}(\omega) H_n^{(1)}(k_\epsilon R_j) - \frac{1}{\omega \rho_0 c_0} H_n^{(1)\prime}(k_\epsilon R_j)} \right) \times \frac{\tilde{C}_n^{(j)}(\omega)}{N_n(\omega)}. \quad (24)$$

Токи через указанные группы электродов определяются при помощи выражений (17).

Заметим, что в выражениях (17), первое слагаемое определяет статическую составляющую общего реактивного сопротивления, а второе слагаемое – динамическую составляющую. Так, что статические составляющие  $C_{011}$  (для электродов с раскрывом  $[-\gamma_{0j}; \gamma_{0j}]$ ) и  $C_{012}$  (для электродов с раскрывом  $[-\gamma'_{0j}; \gamma'_{0j}]$ ) и динамические составляющие  $C_{\sim 11}$  (для электродов с раскрывом  $[-\gamma_{0j}; \gamma_{0j}]$ ) и  $C_{\sim 12}$  (для электродов с раскрывом  $[-\gamma'_{0j}; \gamma'_{0j}]$ ) определяются соотношениями:

$$C_{011} = \epsilon_{33} \dot{U}_{H11} \frac{R_j}{h_j} 2\gamma_{0j};$$

$$C_{012} = \epsilon_{33} \dot{U}_{H12} \frac{R_j}{h_j} 2\gamma'_{0j};$$

$$C_{\sim 11} = e_{31} \cdot 2\gamma_{0j} \times \sum_n \left( \left[ inU_n^{(j)} + W_n^{(j)} \right] \frac{\sin(n\gamma_{0j})}{n\gamma_{0j}} \right); \quad (25)$$

$$C_{\sim 12} = e_{31} \cdot 2\gamma'_{0j} \times \sum_n \left( \left[ inU_n^{(j)} + W_n^{(j)} \right] \frac{\sin(n\gamma'_{0j})}{n\gamma'_{0j}} \right).$$

При этом общее реактивное сопротивление  $X_c = \omega C_\Sigma = \omega C_{0p} + \omega C_{\sim p}$ , где  $p$  – порядковый номер электрода.

Отметим, что фактически, работа преобразователя может быть описана с помощью нулевой и нечетных гармоник, что объясняется видом электродирования и способом включения электродов [12].

Представляется полезным перейти к ситуации полного электродирования поверхности преобразователя. Для такого случая, изменение  $E_{r,j}^{(0)}$  по угловой координате не происходит,

следовательно, член  $\frac{\partial E_{r,j}^{(0)}}{\partial \phi_j}$  первого уравнения

системы уравнений движения оболочки [2] становится равным нулю. Функции включения исчезают, оболочка совершает только радиальные колебания (что соответствует реализации лишь нулевой моды) и выражения (20)–(25) существенно упрощаются. Так, с учетом равенства нулю тангенциальной составляющей перемещений ( $U_n^{(j)} = 0$ ), можно записать:

$$W_n^{(j)} = W_0^{(j)}. \quad (26)$$

При этом

$$W_0^{(j)} = -\frac{\tilde{c} U_\gamma d\omega^2}{1+d\omega^2} - A_0 H_0^{(1)}(k_\epsilon R_j) \frac{d\omega^2}{1+d\omega^2}, \quad (27)$$

а давление, создаваемое таким цилиндрическим источником нулевого порядка  $p_0(r)$ , определится как:

$$p_0(r) = \frac{H_0^{(1)}(k_\epsilon r_j)}{\frac{d\omega^2}{1+d\omega^2} H_0^{(1)}(k_\epsilon R_j) - \frac{1}{\omega \rho_0 c_0} H_n^{(1)\prime}(k_\epsilon R_j)}, \quad (28)$$

где

$$A_0 = \frac{\tilde{c} U_\gamma \frac{d\omega^2}{1+d\omega^2}}{\frac{d\omega^2}{1+d\omega^2} H_0^{(1)}(k_\epsilon R_j) - \frac{1}{\omega \rho_0 c_0} H_n^{(1)\prime}(k_\epsilon R_j)}, \quad (29)$$

$U_\gamma = U_H$ ,

а ток

$$I_0 = i\omega R_j \left( 2\pi \epsilon_{33} \frac{U_\gamma}{h_j} + \frac{e_{31}}{R_j} W_0 \right) \quad (30)$$

Выражения (26)–(30) совпадают с выражениями, приведенными в работе [2], и могут быть использованы для оценки динамических характеристик указанного источника с полностью электродированной поверхностью. При этом  $U_\gamma$  может быть либо задано (если нет необходимости учета длинной линии), либо определено с использованием группы уравнений (6)–(10).

Как следует из выражения (30), динамическая составляющая электрической емкости преобразователя  $\Delta C_d = C_-$  определяется лишь радиальной составляющей колебаний оболочки  $W_0^{(j)}$ .

### Выводы

В результате решения задачи об излучении акустических волн круговым цилиндрическим пьезокерамическим преобразователем с разрезными электродами в электроупругой постановке найден алгоритм позволяющий аналитически определить динамические характеристики указанного источника звука, а именно:

- акустическое давление в произвольной точке поля;
- колебательные скорости в среде и на поверхности источника;
- импедансные характеристики;
- токи возбуждения преобразователя.

Алгоритм также учитывает возможные особенности возбуждения преобразователя, которые заключаются в использовании протяженной электрической линии (генератор-преобразователь), а также отличий в условиях согласования указанной двухэлектродной системы с задающим устройством.

Путем перехода к преобразователю с полностью электродированной поверхностью показано хорошее совпадение с имеющимися результатами и реализована возможность упрощения ситуации возбуждения преобразователя.

### Литература

1. *Гринченко В.Г., Лейко А.Г.* Излучение звука системами взаимодействующих пьезокерамических оболочек // Докл. IV Всесоюзн. симп. по физике акустикогидродинамических явлений и оптоакустики (5-10 октября 1985 г.). – Ашхабад, 1985. – С. 83–87.
2. *Дідковський В.С., Лейко О.Г., Савін В.Г.* Електроакустичні п'єзокерамічні перетворювачі (розрахунок, проектування, конструювання). – Кіровоград: «Імекс-ЛТД», 2006. – 448 с.
3. *Савин В.Г., Моргун И.О.* Преобразование акустических импульсов в электрические сферической пьезокерамической оболочкой // Электроника и связь. – 2006. – №6. – С. 36–42.
4. *Бабаев А.Э., Бут Л.М., Савин В.Г.* Нестационарные колебания тонкостенного цилиндрического пьезовибратора в жидкости при неосесимметричном электрическом возбуждении // Прикл. механ. – 1990. – Т.26. – С. 59–67.
5. *Бабаев А.Э., Лейко А.Г., Савин В.Г.* Акустические и механические поля радиально поляризованного цилиндрического вибратора при импульсном электрическом возбуждении // Акуст. журн. – 1989. – Т.35, № 2. – С. 211–217.
6. *Моргун И.О.* Излучение акустических импульсов сферическим тонкостенным пьезопреобразователем с разрезными электродами // Электроника и связь. – 2007. – № 3. – С. 43–48.
7. *Аронов Б.С.* Электромеханические преобразователи из пьезоэлектрической керамики. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. – 272 с.
8. *Анго А.* Математика для электро- и радиоимпульсов. – М.: Наука, 1964. – 772 с.
9. *Бессонов Л.А.* Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учеб. для вузов / под ред. Л.А. Бессонова. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Гардарики, 2007. – 701 с.
10. *Кубенко В.Д., Бабаев А.А.* Влияние кабельного тракта на работу цилиндрического пьезопреобразователя в нестационарных режимах // Прикл. механ. – 1997. – Т.33, № 11. – С. 46–62.
11. *Коржик О.В., Лейко О.Г.* Врахування кабельного тракту при розв'язанні задач прийому звукових хвиль системами багатомодових п'єзокерамічних циліндричних перетворювачів // Электроника и связь. – 2007. – № 3. – С. 54–62.
12. *Бабаев А.А.* Нестационарные режимы работы многомодового цилиндрического излучателя с учетом процессов в кабельном тракте // Прикл. механ. – 1990. – Т.26, № 12. – С. 59–67.
13. *Борисейко В.А., Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Соотношения электроупругости для цилиндрических оболочек вращения // Прикл. механ. – 1976. – Т.12, № 2. – С. 26–23.
14. *Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Под общ. ред. А.Н. Гузя. – Т.5: Электроупругость / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.*
15. *Скучик Е.* Основы акустики. – М.: Мир, 1976. – Т.1. – 520 с.